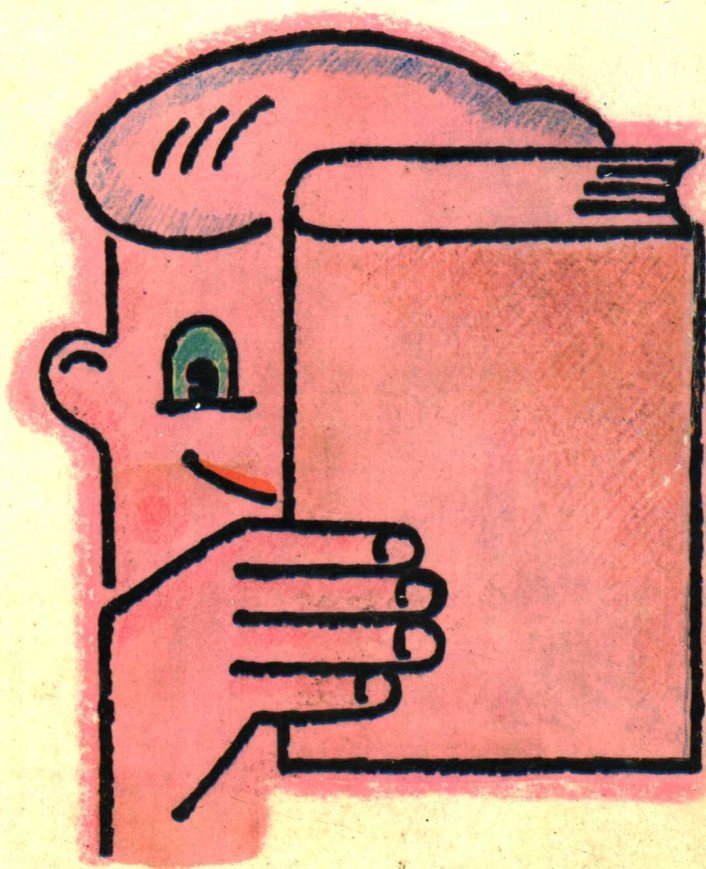


中学 数学解题精典



(京)新登字 103 号

责任编辑:任 敏

封面设计:罗雪村

中学数学解题精典
立 体 几 何
烟学敏 刘玉翘 主编

人民日报出版社出版

天津市新华书店发行

天津建新印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开 30 印张 1041.6 千字

1993 年 3 月第一版 1993 年 3 月第一次印刷

印数: 1—4500 册

ISBN 7-80002-564-0/G · 149 定价: 30.00 元

主 编 烟学敏 刘玉翹

副主编 余凤冈 王连笑 阙士刚

编 委(以下按姓氏笔划为序)

于大中	王培德	王连笑	王平梅
王毓筠	尹继民	刘玉翹	刘 勋
匡天椿	吕学林	余凤冈	李果民
李淑娟	张鼎言	张温慈	郁林生
郝昌盛	烟学敏	唐玉铎	高淑馨
徐学乾	梁汝芳	郭菊英	窦广生
阙士刚	蔡锡弟		

前 言

这套《中学数学解题精典》，是以现行中学数学教学大纲为依据，对涉及大纲中的必学内容按章、节顺序同步编纂的填补我国空白的一套大型工具书。是一大批特级、高级、一级教师多年心血的共同结晶。

为使广大中学、中专师生能够从中获益，这套大型工具书按内容分为初中代数、平面几何、高中代数(上、下)、三角、平面解析几何、立体几何共七卷。

这套大型工具书充分展现了以下几个特点：

类型全面：书中各单元均包括选择题、填空题、解答题等多种题型；

题目新颖：囊括了近十几年来国内外所见的各种最新题目；

筛选精心：在编纂过程中，精心研究了近些年全国各学校教学中和各类考试中所出现的各种题目，并从中精选出那些更具典型性、代表性、启发性的题目，使这套工具书成为当今中学数学优秀题目的精品库；

解法灵活：全书不少题给出一题多解，并注意点拨思路、启迪思维、揭示规律，使读者通过解题掌握方法和规律，从而不断提高自身的数学能力。

由于水平所限，虽经努力，但疏漏之处在所难免，欢迎读者批评指正。

编 者

1992年10月

目 录

第一章 直线和平面	1
知识要点	1
§ 1 直线和平面的位置关系	5
选择题(第 1—82 题)	5
填空题(第 83—110 题)	31
解答题(第 111—239 题)	38
§ 2 立体几何中常见的角	112
选择题(第 240—247 题)	112
填空题(第 248—250 题)	115
解答题(第 251—343 题)	118
§ 3 空间的距离	183
选择题(第 344—346 题)	183
填空题(第 347—353 题)	184
解答题(第 354—420 题)	187
§ 4 多面角	235
解答题(第 421—434 题)	235
第二章 多面体	243
知识要点	243
§ 1 棱柱	245
选择题(第 1—48 题)	245
填空题(第 49—80 题)	260
解答题(第 81—177 题)	271
§ 2 棱锥	342
选择题(第 178—245 题)	343
填空题(第 246—288 题)	366
解答题(第 289—550 题)	380
§ 3 棱台	618
选择题(第 551—572 题)	618
填空题(第 573—598 题)	626
解答题(第 599—666 题)	634

第三章 旋转体	686
知识要点	686
§ 1 圆柱	688
选择题(第 1—10 题)	688
填空题(第 11—19 题)	692
解答题(第 20—51 题)	695
§ 2 圆锥	710
选择题(第 52—77 题)	710
填空题(第 78—95 题)	721
解答题(第 96—143 题)	730
§ 3 圆台	762
选择题(第 144—158 题)	762
填空题(第 159—166 题)	769
解答题(第 167—198 题)	773
§ 4 球	794
选择题(第 199—224 题)	794
填空题(第 225—246 题)	806
解答题(第 247—337 题)	818
§ 5 复合体	880
选择题(第 338—343 题)	880
填空题(第 344—348 题)	883
解答题(第 349—420 题)	886
§ 6 旋转体综合题	944
解答题(第 421—461 题)	944

第一章 直线和平面

〔知识要点〕

一、平面

1. 公理 1 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

2. 公理 2 如果两个平面有一个公共点,那么它有且只有一条通过这个点的公共直线.

3. 公理 3 经过不在一条直线上的三点,有且只有一个平面.

4. 推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面.

5. 推论 2 经过两条相交直线,有且只有一个平面.

6. 推论 3 经过两条平行直线,有且只有一个平面.

二、空间两条直线

1. 两条直线(指不重合的两条直线)的位置关系:

(1) 相交直线——在同一个平面内,有且只有一个公共点;

(2) 平行直线——在同一个平面内,没有公共点;

(3) 异面直线——不同在任何一个平面内,没有公共点.

2. 平面内一点与平面外一点的连线,和平面内不经过该点的直线是异面直线

3. 公理 4 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

4. 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同,那么这两个角相等.

推论 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

5. 两条异面直线所成的角 设直线 a, b 是异面直线,经过空间任意一点 O ,分别引直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$,我们把 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 和 b 所成的角.如果两条异面直线所成的角是直角,我们就说两条异面直线互相垂直.

6. 两条异面直线的公垂线和距离 我们把和两条异面直线都垂直相交的直线叫做两条异面直线的公垂线.

两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长,叫做两条异面直线的距离.

7. 如果一条直线和两条平行线中的一条垂直,那么也必和另一条垂直.

三、空间直线和平面

1. 直线和平面位置关系:

(1) 直线在平面内——有无数个公共点;

(2) 直线和平面相交——有且只有一个公共点;

(3) 直线和平面平行——没有公共点.

我们把直线和平面相交或平行的情况统称为直线在平面外.

2. 直线和平面平行的判定定理 如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行,那么这条直线和这个平面平行.

3. 直线和平面平行的性质定理 如果一条直线和一个平面平行,经过这条直线的平面和这个平面相交,那么这条直线就和交线平行.

4. 直线和平面垂直 如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直,我们说这条直线和这个平面互相垂直,直线叫做平面的垂线,平面叫做直线的垂面.

过一点有且只有一条直线和一个平面垂直;过一点有且只有一个平面和一条直线垂直,平面的垂线和平面一定相交,交点叫做垂足.

和两个平行平面同时垂直的直线,叫做两个平行平面的公垂线,它夹在两个平行平面间的部分,叫做这两个平行平面的公垂线段.

5. 直线和平面垂直的判定定理 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,那么这条直线垂直于这个平面.

如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面,那么另一条也垂直于同一个平面.

6. 直线和平面垂直的性质定理 如果两条直线同垂直于一个平面,那么这两条直线平行.

从平面外一点引一个平面的垂线,这个点和垂足间的距离叫做这个点到这个平面的距离.

如果一条直线和一个平面平行,那么夹在这条直线和平面间的平行线段相等.

一条直线和一个平面平行,这条直线上任意一点到平面的距离,叫做这条直线和平面之间的距离.

7. 斜线在平面上的射影

自一点向平面引垂线,垂足叫做这点在这个平面上的射影,这个点与垂足间的线段叫做这点到这个平面的垂线段.

一条直线和一个平面相交,但不和这个平面垂直,这条直线叫做这个平面的斜线,斜线和平面的交点叫做斜足,斜线上一点与斜足间的线段叫做这点到这个平面的斜线段.

过斜线上的一点向平面引垂线,过垂足与斜足的直线叫做斜线在这个平面上的射影,垂足与斜足间的线段叫做这点到平面的斜线段在这个平面上的射影,斜线上任意一点在平面上的射影,一定在斜线的射影上.

8. 定理 从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中.

(1)射影相等的两条斜线段相等,射影较长的斜线段也较长;

(2)相等的斜线段的射影相等,较长的斜线段的射影也较长;

(3)垂线段比任何一条斜线段都短.

9. 直线和平面所成的角 平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角,叫做这条直线和这个平面所成的角.

一条直线垂直于平面,我们说它们所成的角是直角;一条直线和平面平行,或在平面内,我们说它们所成的角是 0° 角.

斜线和平面所成的角,是这条斜线和平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的角.

10. 三垂线定理 在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直.

三垂线定理的逆定理 在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线垂直,那么它也和这条斜线的射影垂直.

四、空间两个平面

1. 两个平面(指不重合的两个平面)的位置关系:

(1)两平面平行——没有公共点;

(2)两平面相交——有一条公共直线.

2. 两个平面平行的判定定理 如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面,那么这两个平面平行.

垂直于同一条直线的两个平面平行.

3. 两个平面平行的性质

(1)两个平面平行,其中一个平面内的直线必平行于另一个平面.

(2)如果两个平行平面同时和第三个平面相交,那么它们的交线平行.

(3)夹在两个平行平面间的平行线段相等.

(4) 一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面,也垂直于另一个平面.

和两个平行平面同时垂直的直线,叫做两个平行平面的公垂线,它夹在两个平行平面间的部分,叫做这两个平行平面的公垂线段.

(5) 两个平行平面的公垂线段都相等.

两个平行平面公垂线段的长叫做两个平行平面的距离.

(6) 经过平面外一点只有一个平面和已知平面平行.

4. 二面角 一个平面内的一条直线,把这个平面分成两部分,其中的每一部分都叫做半平面.从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角.这条直线叫做二面角的棱,这两个半平面叫做二面角的面.

以二面角的棱上任意一点为端点,在两个面内分别作垂直于棱的两条射线,这两条射线所成的角叫做二面角的平面角.

平面角是直角的二面角叫做直二面角.

5. 两个平面垂直的判定和性质

两个平面相交,如果所成的二面角是直二面角,就说这两个平面互相垂直.

两个平面垂直的判定定理 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面互相垂直.

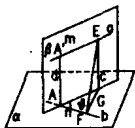
两个平面垂直的性质定理 如果两个平面垂直,那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

推论 如果两个平面互相垂直,那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线,在第一个平面内.

6. 三个两两垂直的平面的交线两两垂直.

7. 公式 已知两条异面直线所成的角为 θ , 它们的公垂线段 AA' 的长为 d , 在直线 a, b 上分别取 E, F , 设 $A'E = m, AF = n$, 则

$$EF = \sqrt{d^2 + m^2 + n^2 \pm 2mncos \theta} \text{ (下图)}$$



五、多面角

从一点出发不在同一平面内的几条射线,以及每两条相邻射线之间的平面部分所组成的图形,称为多面角.

组成多面角的射线称为多面角的棱,这些射线的公共点称为多面角

的顶点,相邻两棱间的平面部分称为多面角的面,在每个面内由两条棱组成的角称为多面角的面角,每相邻两个面间的二面角称为多面角的二面角.

一个多面角的面数等于它的棱数、面角数、二面角数.把一个多面角的任一个面伸展成平,如果所有其它各个面都在这个平面的同旁,这样的多面角称凸多面角,本书提到的多面角都是指凸多面角.

三个面角都是直角的三面角,称为直三面角.

§ 1 直线和平面的位置关系

选择题

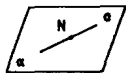
1. 点 N 在直线 a 上,直线 a 又在平面 α 内,可记为()

(A) $N \subset a \subset \alpha$.

(B) $N \in a \subset \alpha$.

(C) $N \in a \in \alpha$.

(D) $N \subset a \in \alpha$.



[解](B). 如图

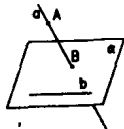
2. 平面 α 内一点 B 与平面 α 外一点 A 的连线是 a ,又平面 α 内不过 B 点的直线为 b ,下面表达式中正确的是()

(A) $a \parallel \alpha, a \parallel b, b \subset \alpha$.

(B) $a \parallel \alpha, a \not\parallel b, b \subset \alpha$

(C) $a \cap \alpha, a \parallel b, b \subset \alpha, A \in b$.

(D) $b \subset \alpha, A \notin \alpha, B \in \alpha, B \notin b, A \in a, B \in a$.



[解](D). 如图

3. P 为一点, l 为一直线, α, β 为平面,且 $P \in \alpha, P \in \beta, P \in l$,则有()

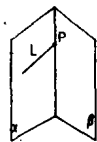
(A) $l \in \alpha \cap \beta$.

(B) $l \in \alpha \cup \beta$.

(C) $l = \alpha \cap \beta$.

(D) 以上都不对.

[解](D). 如图

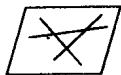
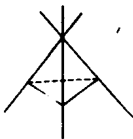


4. 空间有 $n(n \geq 3)$ 条直线,其中任意两条都相交,那么 n 条直线一定是()

(A) 共面.

- (B)不共面但过同一点.
 (C)过同一点或共面.
 (D)既不过同一点又不共面.

〔解〕(C).



5. 下列命题正确的是()

(A)一条直线上有一个点在平面内,则这条直线上所有的点在平面内.

(B)一条线上有两个点在平面内,则这条线在平面内.

(C)一条直线上有两个点在一个面内,则这条直线在这个面内.

(D)一条直线上有两点在一个平面内,则这条直线上所有点都在这个平面内.

〔解〕(D).

(A)是一个点在平面内,所以不正确.(B)指一条线,若是曲线则不正确.(C)指一个面,若是曲面则不对.(D)正确.

6. 下列命题正确的是()

(A)如果两个平面有一个公共点,则两平面一定是相交平面.

(B)如果两个平面有两个公共点,则两平面一定是相交平面.

(C)如果两个平面有三个公共点,则两平面一定是重合平面.

(D)如果两个平面有一个公共点,那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

〔解〕(D).

(A)有一个公共点也可能是重合平面.(B),(C)也可能是重合平面,也可能是相交平面.故(D)正确.

7. 两个平面重合的条件是它们的公共部分有()

(A)一个点和一条直线.

(B)三个点.

(C)无数个点.

(D)两条不重合,不异面的直线.

〔解〕(D).

(A)中的点可能在直线上;(B)中的三个点可能共线;(C)中无数个点可能共线,因此均不一定能使两平面重合,而(D)中则是平行或相交直线,所以选(D).

8. 一条直线及这条直线外且不共线的三点所确定的平面个数为()

(A)1. (B)3.

(C)4. (D)以上答案都不对.

〔解〕(D).

9. (1) 直线 a 在平面 α 内又在平面 β 内, 则 α, β 重合.

(2) 直线 a, b 相交, 直线 b, c 也相交, 则直线 a, c 也必相交.

(3) 直线 a, b 共面, 直线 b, c 也共面, 则直线 a, c 也必共面.

(4) a 在平面 α 外, 则直线 a 与平面 α 内任何一点都可唯一确定一个平面.

以上四个命题中错误的命题个数是()

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

〔解〕(D).

(1) 平面 α 与 β 可以相交于 a ; (2) a 与 c 不一定相交; (3) a 与 c 不一定共面; (4) 平面 α 内一点若是 a 与 α 的交点, 则不能唯一确定一个平面, 所以四个命题全错.

10. 下列命题中正确的是()

(A) 两条直线可以确定一个平面.

(B) 一个点, 一条直线可以确定一个平面.

(C) 一组对边平行的四边形是平面图形.

(D) 两两平行的三条直线共面.

〔解〕(C).

(A) 若两条直线异面, 则不能确定平面; (B) 若点在直线上, 则过此点与此直线有无数个平面, 不能确定一个平面; (D) 假设 $a \parallel b \parallel c$, 则 a 与 b 可确定一个平面, 而 c 可以在此平面内, 也可以不在此平面内, 故不能说这三条直线共面, (C) 因为一组对边平行, 所以另一组对边必在一组平行对边所确定的平面内. 因而 (C) 正确.

11. 两条异面直线指的是()

(A) 在空间内不相交的两条直线.

(B) 分别位于两个不同平面内的两条直线.

(C) 某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线.

(D) 一条直线在平面内, 另一条直线与平面相交, 其交点不在这条直线上.

〔解〕(D).

12. 一条直线和两条异面直线中的一条平行, 则它与另一的位置关系是()

(A) 平行.

(B) 相交.

(C) 异面.

(D) 相交或异面.

〔解〕(D).

13. 两条直线满足什么条件时, 这两条直线是异面直线().

(A) 分别在两个平行平面内.

(B) 分别在两个相交平面内, 且不相交.

(C) 分别在两个相交平面内, 且不平行.

(D) 分别在两个相交平面内, 其中一条与两个平面的交线相交, 另一条直线不通过这个交点.

〔解〕(D). (A) 如图甲情况, 则平行. (B) 如图乙情况, 则平行.

(C) 如图丙情况, 则相交.



(图甲)



(图乙)



(图丙)

14. 下面的判断中正确的是()

(A) 任意三点确定一个平面.

(B) 一条直线和任意一点确定一个平面.

(C) 两条互相垂直的直线确定一个平面.

(D) 和同一条直线相交的三条平行线确定一个平面.

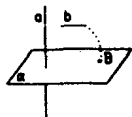
〔解〕(D).

(A) 若三点共线, 则不能确定一个平面.

(B) 若点在直线上, 不能确定一个平面.

(C) 若两直线异面垂直, 不能确定一个平面.

(A)、(B)、(C) 均不正确, 故答(D).



15. 如果直线 $a \perp b$, 且 $a \perp$ 平面 α , 则()

(A) $b \parallel \alpha$. (B) $b \subset \alpha$.

(C) $b \perp \alpha$. (D) $b \parallel \alpha$ 或 $b \subset \alpha$.

〔解〕(D).

当 $b \subset \alpha$ 时, 命题成立. 当 $b \not\subset \alpha$ 时, 因为 $a \perp b$, 设 b 与 α 交于 B , 过 B 可作一平面 $\beta \perp \alpha$, 这样过 B 有两平面与 α 垂直, 显然不成立. 所以 b 与 α 不相交, $b \parallel \alpha$.

16. 两条直线分别和第三条直线异面, 则此两直线的位置关系是()

(A)异面. (B)平行.

(C)异面或平行或相交. (D)相交.

〔解〕(C).

17. 直线 a, b 与两条异面直线 c, d 都相交, 由 a, b, c, d 四条直线最多共可确定 () 个平面.

(A)2. (B)3. (C)4. (D)5.

〔解〕(D).

四条直线若两两确定一个平面, 最多共可确定 $C_4^2=6$ 个平面, 但由于 c, d 异面, 因此可确定 $C_4^2-1=5$ 个平面.

18. 两条异面直线在同一平面内的射影是 ()

(A)两条相交直线. (B)两条平行线.

(C)相交或平行直线. (D)以上结果都不对.

〔解〕(D).

两条异面直线在同一平面内的射影, 可能是相交直线, 可能是平行直线, 也可能是一直线和线外一点.

19. 直线 a, b 是异面直线, $c \parallel a$, 那么直线 c, b ()

(A)是异面直线. (B)是相交直线.

(C)不可能平行. (D)可能平行.

若 $c \parallel b$, 又因为 $c \parallel a$, 所以必然有 $a \parallel b$, 与 a, b 是异面直线矛盾, 故选 (C)

20. 分别和两条异面直线相交的两条直线的位置关系是 ()

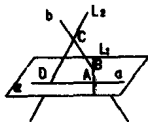
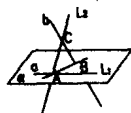
(A)异面. (B)平行.

(C)平行或异面. (D)异面或相交.

〔解〕(D).

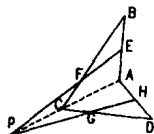
假设这两条直线平行, 则它们可确定一个平面 α , 两条平行线与两条异面直线的四个交点均在平面 α 上, 因此两条异面直线都在 α 内, 这是不可能的, 所以两条直线平行不成立.

如图, 设 a, b 是异面直线, l_1 分别和 a, b 相交, l_2 分别和 a, b 相交. 图甲: l_1 和 l_2 相交; 图乙: l_1 和 l_2 异面.



21. 在空间四边形 $ABCD$ 各边 AB, BC, CD, DA 上分别取 E, F, G, H 四点, 如果 EF, GH 交于一点 P , 则 ()

- (A) P 一定在直线 BD 上.
 (B) P 一定在直线 AC 上.
 (C) P 在直线 AC 或 BD 上.
 (D) P 既不在直线 AC 上, 也不在直线 BD 上.



〔解〕(B).

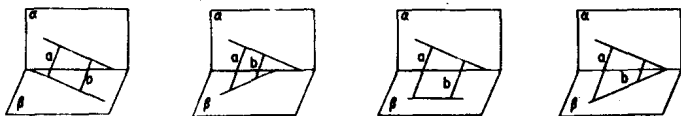
$\because EF \subset \text{平面 } ABC,$

$\therefore \text{点 } P \in \text{平面 } ABC.$

同理点 $P \in \text{平面 } ACD$

$\therefore \text{点 } P \text{ 一定在平面 } ABC \text{ 和平面 } ACD \text{ 的交线 } AC \text{ 上.}$

22. 下图, 直线 a 与直线 b 平行的关系, 只可能是 ()

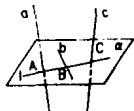


〔解〕(D).

容易得到 (A)、(B)、(C) 中直线 a 与直线 b 均异面, 故答 (D).

23. 已知三条直线 a, b, c 中任意两条异面, 那么与 a, b, c 都相交的直线

- (A) 不存在. (B) 1 条.
 (C) 恰有两条. (D) 无数条.



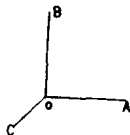
〔解〕(D).

如图, 在直线 a 上取一点 A , 过点 A 和直线 b 作平面 α , 若直线 c 与平面 α 相交于 C 点, 过 A, C 作直线 l 交 b 于 B (这样的 l 总会有的), 则直线 l 与 a, b, c 都相交, 改变点 A 在直线 a 上的位置得知这样的直线有无数条.

24. 在空间, 通过一点且两两垂直的直线 ()

- (A) 只有两条. (B) 只有三条.
 (C) 至多有三条. (D) 有无数条.

〔解〕(C).



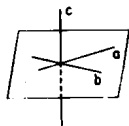
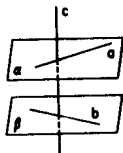
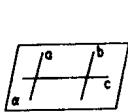
至多为如图情况,即三条.

25. 空间两直线 a, b 都垂直于直线 c , 则 a, b 的位置关系是 ()

- (A) 一定平行. (B) 一定相交.
(C) 一定异面. (D) 不能确定.

〔解〕(D).

如图甲则 $a \parallel b$. 如图乙则 a, b 异面. 如图丙则 a, b 相交. 故答(D).



(图甲)

(图乙)

(图丙)

26. a, b 是互不重合的二直线, 由以下给出的条件:

- ①. a, b 都与已知直线垂直.
- ②. a, b 都与已知平面平行.
- ③. a, b 都与已知平面垂直.
- ④. a, b 都与两条异面直线垂直.

其中能判定 $a \parallel b$ 的有 () 个.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

〔解〕(B).

③、④均可以.

27. 四个平面互不平行, 也不重合, 则它们交线的数目不能是 ()

- (A) 6. (B) 4. (C) 2. (D) 1.

〔解〕(C).

若四个平面交于一条直线, 则交线有一条, 若四个平面中每三个平面共点, 则共有交线 $C_4^3 = 6$ 条. 若四个平面交于一点, 但无公共交线, 则共有交线 4 条, 所以不可能有 2 条交线.

28. 下面平面几何中的定理, 在立体几何中仍然成立的个数是 ()

- ①. 四边相等的四边形是菱形.
- ②. 有三个角是直角的四边形是矩形.