主编 明知白

数理化同步导学

SLH

高考突破 数学总复习

华东师范大学出版社

数理化同步导学

高考突破数学总复习

主　编　明知白

华　东　师　范　大　学　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

高考突破数学总复习/明知白主编. —上海:华东师范大学出版社,1999.8
(走向成功／王梓坤主编)
ISBN 7-5617-2055-6

Ⅰ.高… Ⅱ.明… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 32845 号

数理化同步导学

高考突破数学总复习

主编 明知白

华东师范大学出版社出版发行
(上海中山北路 3663 号 邮政编码 200062)
新华书店上海发行所经销
江苏如东印刷厂印刷
开本 880×1220 1/32 印张 9.75 字数 371 千字
2001 年 4 月新 1 版 2001 年 4 月第一次印刷

ISBN 7-5617-2055-6/G・965
定价 12.00 元

目 录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

§1.1　集合与充要条件

【考点述要】

本节的考试内容有：集合、子集、交集、并集、补集．充要条件．$|ax+b|<c$、$|ax+b|>c(c>0)$ 型不等式．一元二次不等式．

考试要求是：理解集合、子集、交集、并集的概念．了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合．理解充分条件、必要条件、充要条件的意义，能够初步判断给定的两个命题的充要关系．掌握 $|ax+b|<c$、$|ax+b|>c(c>0)$ 及一元二次不等式的解法．

集合与充要条件是学好高中数学的基础知识和重要工具，是高考中经常考查的内容．通常采用两种方式考查，一是考查集合与充要条件本身的知识；二是考查集合语言与集合思想，或是两个命题的充要关系与命题成立的充要条件等在各类数学题目中的应用．这类问题在高考中多数是容易题(难度为 0.7 以上)，少数是中等题(难度为 0.4—0.7)，常采用选择题的形式．

【考题例释】

例 1　设全集为 $\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x^2-5x-6>0\}$，$B=\{x\mid |x-5|<a\}$(a 是常数)，且 $11\in B$，则(　　)．

(A) $\overline{A}\cup B=\mathbf{R}$　　(B) $A\cup\overline{B}=\mathbf{R}$

(C) $\overline{A}\cup\overline{B}=\mathbf{R}$　　(D) $A\cup B=\mathbf{R}$

(1998 年，上海考题)

分析　由 $11\in B$，得 $a>6$，$B=\{x\mid 5-a<x<5+a\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 11\}$．而 $A=\{x\mid x<-1$ 或 $x>6\}$，故 $A\cup B=\mathbf{R}$，选 D．

也可取 $a=6.01$，代入 B，结合数轴选择．

9. 设函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{(x-1)^2+1}{1+2ax}$. 求 $f(x)$的定义域.

10. 设 $f(x)$的定义域为$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$, 且 $2f(x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}=0$. 求函数 $f(x)$及值域.

11. 设函数 $f(x)=(x^2-6)^{-1}$, $x\in[-2,\ -1]$, 求反函数 $f^{-1}(x)$, 并解方程 $f^{-1}(-3^{-1})=x+3$.

12. 建造一个容积为 8m^3, 深为 2m 的长方体无盖水池, 如果池底和池壁的造价每 m^2 分别为 120 元和 80 元, 求水池的最低总造价是多少元?

13. 设 α、β 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(m-1)x+m^2=4$ 的两个实根, 且 $y=\alpha^2+\beta^2$, 求函数 $y=f(m)$ 的定义域和值域.

14. 设函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$, 求其反函数 $f^{-1}(x)$, 并判定 $f^{-1}(x)$的图象是否过点(0, 1)? 与直线 $y=x$ 是否有交点?

15. 设函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,\ b,\ x\in\mathbf{R})$, 集合 $A=\{x\mid f(x)=x\}$, $B=\{x\mid f[f(x)]=x\}$. 设 $A=\{-1,\ 3\}$.

(1) 当 $x\leqslant 0$ 时, 求 $f^{-1}(x)$;

(2) 用列举法表示集合 B.

§1.3　函数的单调性与奇偶性

【考点述要】

考试内容是:函数的单调性,函数的奇偶性.

考试要求是:理解函数的单调性和奇偶性的概念,并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性,能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象.

善于运用函数的性质(函数的周期性在下一章)分析和解决问题是考核能力的重要内容之一,既可以设计成选择题或填空题,又可以设计成解答题.难度可以是容易题或中等题,也可以是具有较强的综合性的难题,灵活多变,富有新意.

【考题例释】

例 1　根据函数单调性的定义,证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在$(-\infty,\ +\infty)$上是减函数.

(1991 年,理,0.62)

证明 设 x_1、$x_2 \in (-\infty, +\infty)$，且 $x_1 < x_2$，则

$$f(x_2) - f(x_1) = x_1^3 - x_2^3$$

$$= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

由
$$x_1 < x_2,$$
得
$$x_1 - x_2 < 0. \quad ①$$

又 x_1、x_2 中，至少有一个不为零，所以

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0. \quad ②$$

由①、②得
$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0,$$
所以
$$f(x_1) > f(x_2).$$

故 $f(x) = -x^3 + 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

说明 论证 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ 的符号，也可分成 $x_1x_2 > 0$，$x_1x_2 = 0$，$x_1x_2 < 0$ 三类情形，都有 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$. 还可根据 $x_1^2 + x_2^2 > 2|x_1x_2| \geqslant |x_1x_2| \geqslant -x_1x_2$，证得 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$.

例 2 已知 $f(x) = 8 + 2x - x^2$，如果 $g(x) = f(2 - x^2)$，那么 $g(x)$（　　）.

(A) 在区间 $(-1, 0)$ 上是减函数　　(B) 在区间 $(0, 1)$ 上是减函数

(C) 在区间 $(-2, 0)$ 上是增函数　　(D) 在区间 $(0, 2)$ 上是增函数

(1989 年，理，0.53)

解 令 $u = 2 - x^2$，则在 $(-\infty, 0]$ 上 u 是增函数，在 $[0, +\infty)$ 上 u 是减函数.

而 $f(u) = -(u-1)^2 + 9$，在 $(-\infty, 1]$ 上 $f(u)$ 是增函数，在 $[1, +\infty)$ 上 $f(u)$ 是减函数.

综上，在 $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ 上 $g(x)$ 是减函数. 因此，选 A.

说明 复合函数的单调性，由构成它的几个基本函数的单调性决定，应熟悉判定方法.

本题可在已知条件不变的情况下，改成解答题，求函数 $g(x)$ 的单调区间，并指出 $g(x)$ 是增函数还是减函数，答案见下表：

函数 \ 增减性 \ 区间	$(-\infty,\ -1]$	$[-1,\ 0]$	$[0,\ 1]$	$[1,\ +\infty)$
$u=2-x^2$	↗	↗	↘	↘
$f(u)=8+2u-u^2$	↗	↘	↘	↗
$g(x)$	↗	↘	↗	↘

例 3　设 $f(x)$是$(-\infty,\ +\infty)$上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=x$．则 $f(7.5)$等于(　　)．

(A) 0.5　　(B) -0.5　　(C) 1.5　　(D) -1.5

(1996 年，文，0.35；理，0.59)

解　因为
$$f(x+2)=-f(x),$$
所以
$$f(7.5)=f(5.5+2)=-f(5.5).$$
同理
$$f(5.5)=-f(3.5),$$
$$f(3.5)=-f(1.5),$$
$$f(1.5)=-f(-0.5).$$
于是
$$f(7.5)=f(-0.5).$$
因为 $f(x)$是奇函数，所以
$$f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5.$$
故 $f(7.5)=-0.5$，应选 B．

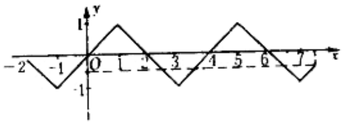

图 1-3

说明　也可以由 $f(x+2)=-f(x)=f(-x)$，得 $f[(x-1)+2]=f[-(x-1)]$，即 $f(1+x)=f(1-x)$．故 $x=1$是 $f(x)$图象的对称轴．又 $f(x)$的图象关于原点对称，图象如图 1-3 所示．易知 $f(7.5)=-0.5$．

另外，由 $f[(x+2)+2]=-f(x+2)=f(x)$，得 $f(x)$是周期为 4 的周期函数，于是
$$f(7.5)=f(-2\times 4+7.5)=f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5.$$

例 4　定义在$(-\infty,\ +\infty)$上的任意函数 $f(x)$都可以表示成一个奇函数

$g(x)$和一个偶函数$h(x)$之和.如果$f(x)=\lg(10^x+1)$, $x\in(-\infty, +\infty)$,那么(　　).

(A) $g(x)=x$, $h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

(B) $g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$, $h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

(C) $g(x)=\frac{x}{2}$, $h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

(D) $g(x)=-\frac{x}{2}$, $h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

(1994年,文,0.34;理,0.43)

解 因为$g(x)$是奇函数,$h(x)$是偶函数,且

$$f(x)=g(x)+h(x), \qquad ①$$

所以
$$f(-x)=g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x), \qquad ②$$

①+②,得
$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$

①-②,得
$$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

而
$$f(-x)=\lg(10^{-x}+1)=\lg(10^x+1)-x,$$

所以
$$h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}, \ g(x)=\frac{x}{2}.$$

因此,应选C.

说明 也可用筛选法,逐一验证:$g(x)+h(x)$是否与$f(x)$相同;$g(x)$是不是奇函数,$h(x)$是不是偶函数.

例5 设$f(x)=\frac{x+a}{x^2+bx+1}$是$(-\infty, +\infty)$上的奇函数(常数$a$, $b\in\mathbf{R}$),根据函数单调性定义判定其单调性,并求$f(x)$的最大(小)值.

解 因为$f(x)$是$(-\infty, +\infty)$上的奇函数,则

$$f(0)=0,$$

于是
$$a=0,$$

$$f(x)=\frac{x}{x^2+bx+1}.$$

又
$$f(-1)=-f(1),$$
于是
$$b=0,$$
$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}.$$

设 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{x_2^2+1}-\frac{x_1}{x_1^2+1}$$
$$=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)},$$

其中 $x_1-x_2<0$，$x_1^2+1>0$，$x_2^2+1>0$.

若
$$x_1<x_2\leqslant-1,$$
则
$$x_1x_2-1>0,$$
可得
$$f(x_1)>f(x_2);$$
若
$$x_2>x_1\geqslant1,$$
则
$$x_1x_2-1>0,$$
可得
$$f(x_1)>f(x_2);$$
若
$$-1<x_1<x_2<1,$$
有
$$|x_1|<1,\ |x_2|<1,$$
则
$$|x_1x_2|<1,\ x_1x_2-1<0,$$
可得
$$f(x_1)<f(x_2).$$

综上，在 $(-\infty,\ -1]$ 与 $[1,\ +\infty)$ 上 $f(x)$ 是减函数，在 $[-1,\ 1]$ 上 $f(x)$ 是增函数.

而
$$f(x)=\frac{1}{x+x^{-1}},$$
$x>0$ 时，
$$x+\frac{1}{x}\geqslant2,$$
当且仅当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{2}$.

由奇函数的性质，$x=-1$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\frac{1}{2}$.

【专题训练】

一、选择题

1. 设函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在 $(-\infty, 4]$ 上是减函数，则实数 a 取值范围是（　　）.

(A) $a\geqslant 3$　　(B) $a\leqslant 3$　　(C) $a\geqslant -3$　　(D) $a\leqslant -3$

2. 设函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$，那么（　　）.

(A) $f(1)<f(2)<f(4)$　　(B) $f(2)<f(1)<f(4)$

(C) $f(2)<f(4)<f(1)$　　(D) $f(4)<f(2)<f(1)$

3. 设奇函数 $f(x)$ 在 $[3, 7]$ 上是增函数且最小值为 5，则 $f(x)$ 在 $[-7, -3]$ 上是（　　）.

(A) 减函数且最小值为 -5　　(B) 减函数且最大值为 -5

(C) 增函数且最大值为 -5　　(D) 增函数且最小值为 -5

4. 设 $f(x)$ 是奇函数，$F(x)=x^3f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数，且 $u=F(a^2-a+1)$，$v=F(a^2+a+1)$，$w=F(-0.75)$．$a\in\mathbf{R}$，则有（　　）.

(A) $u\geqslant w$　　(B) $v>w$　　(C) $v\leqslant w$　　(D) $u<w$

二、填空题

5. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$ 的单调递减区间是______，递增区间是______.

6. 设函数 $f(x)=(m-1)x^2+2mx+3$ 是偶函数，则 $f(-\pi)$ 与 $f(-e)$ 的大小关系是______.

7. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $x\in[0, +\infty)$ 时，$f(x)=x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$．则 $x\in(-\infty, 0]$ 时，$f(x)=$______.

8. 设函数 $f(x)=x^2-\lg\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，$f(1)\approx 0.62$，则 $f(-1)\approx$______.

三、解答题

9. 设函数 $f(x)=x+2x^{-1}$．(1) 判定 $f(x)$ 的奇偶性；(2) 写出 $x>0$ 时，$f(x)$ 的单调区间，并利用函数单调性的定义予以证明.

10. 根据函数单调性与奇偶性定义，判定函数 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 的单调性与奇偶性，画出函数 $f(x)$ 的简图.

11. 设函数 $f(x)=x+\sqrt{2-x}$.

(1) 求 $f(x)$的定义域；

(2) 应用函数单调性定义，证明在$\left(-\infty, \frac{7}{4}\right]$上$f(x)$是增函数，并求 $f(x)$的最大值.

12. 设函数 $f(x)$是$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$上的奇函数，又 $f(x)$在$(0, +\infty)$上是减函数，且 $f(x)<0$. 判定 $F(x)=[f(x)]^{-1}$在$(-\infty, 0)$上的单调性并证明你的结论.

13. 设 $f(x)$是$(-2, 2)$上的偶函数，满足 $f(a)>f(1-a)$. 又在$[0, 2)$上 $f(x)$是减函数，试求 a 的取值范围.

14. 某商场销售甲商品获利 p 亿元、销售乙商品获利 q 亿元，与投入资金 x 亿元的关系应为 $p=\frac{x}{5}$，$q=\frac{3\sqrt{x}}{5}$. 现用 3 亿元资金经营这些商品. 求甲、乙商品各投入多少资金，才能总利润最大？最大利润是多少元？

15. 设 $f(x)=x^2+c$，且 $f[f(x)]=f(x^2+1)$.

(1) 设 $g(x)=f[f(x)]$，求 $g(x)$的解析式；

(2) 设 $\varphi(x)=g(x)+\lambda f(x)$，是否存在实数 λ，使 $\varphi(x)$在$(-\infty, -1)$上是减函数，在$(-1, 0)$上是增函数.

16. 设函数 $f(x)$在$(-\infty, 3]$上是减函数，若要使不等式 $f(a^2-\sin x)\leq f(a+1+\cos^2 x)$ 对任意实数 x 都成立，求实数 a 的取值范围.

§ 1.4　幂函数、指数函数和对数函数

【考点述要】

考试内容是：幂函数. 指数函数. 对数. 对数的性质和运算法则. 对数函数.

考试要求是：理解对数的概念，掌握对数的性质和运算法则，掌握幂函数的概念及其图象和性质. 运用函数性质解决问题时，所涉及幂函数 $y=x^{\alpha}$ 中的 α 限在集合$\left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$中取值. 掌握指数函数、对数函数的概念及其图象和性质.

这三类函数的定义、图象和性质是中学函数内容的主体，学习这三类函数的过程中所展现的数学思想方法具有导向作用，因此，这节内容在高考中地位重要，既可以考查基础知识、基本技能、基本思想和方法，又可以考查综合运用、分析问题和

解决问题的能力.

【考题例释】

例 1 (1) 设 a、b、c 都是正数,且 $3^a=4^b=6^c$, 那么(　　).

(A) $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　　(B) $\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$

(C) $\frac{1}{c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$　　(D) $\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$

(1993 年,文,0.47;理,0.63)

(2) 已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在$[0,\ 1]$上是 x 的减函数,则 a 的取值范围是(　　).

(A) $(0,\ 1)$　　(B) $(1,\ 2)$　　(C) $(0,\ 2)$　　(D) $[2,\ +\infty)$

(1995 年,理,0.63)

解 (1) 由条件,得

$$3=6^{\frac{c}{a}},\ 2=6^{\frac{c}{2b}},$$

则

$$6=6^{\frac{c}{a}+\frac{c}{2b}},$$

$$1=\frac{c}{a}+\frac{c}{2b},$$

$$\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}.$$

因此,选 B.

(2) 由题意, $a>0$ 且 $a\neq 1$, 可否定 C;取 $x=1$, 得 $2-a>0$, $a<2$, 可否定 D;取 $a=0.5$, 可否定 A;故选 B.

说明 第(1)题还可设 $3^a=4^b=6^c=k$, 取以 k 为底的对数后选择,方法较多,从略.第(2)题还可根据复合函数的单调性来判定.

例 2 已知函数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$.

(1) 证明 $f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$上是增函数;

(2) 证明对于任意不小于 3 的自然数,都有 $f(n)>\frac{n}{n+1}$.

(1991 年,三南,0.53)

证明 (1) 由条件得

$$f(x)=1-\frac{2}{2^x+1}.$$

设 $x_1,\ x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(1-\frac{2}{2^{x_2}+1}\right)-\left(1-\frac{2}{2^{x_1}+1}\right)$$

$$=\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}.$$

由指数函数 $y=2^x$ 的性质,得

$$(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)>0,$$

$$2^{x_2}-2^{x_1}>0,$$

所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$, $f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$上是增函数.

(2) 由题意

$$f(n)>\frac{n}{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow\frac{2^n-1}{2^n+1}>\frac{n}{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow 2^n>2n+1\quad(n\in\mathbf{N}\text{ 且 }n\geqslant 3).$$

因为 $$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n$$

$$=C_n^0+C_n^1+C_n^{n-1}+(C_n^2+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^n),$$

且 $$C_n^0=1,\quad C_n^1+C_n^{n-1}=2n,$$

当 $n\geqslant 3$ 时, $$C_n^2+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^n>0,$$

所以 $$2^n>2n+1\quad(n\geqslant 3),$$

即 $$f(n)>\frac{n}{n+1}\quad(n\in\mathbf{N}\text{ 且 }n\geqslant 3).$$

说明 将 $\frac{2^x-1}{2^x+1}$ 拆成 $1-\frac{2}{2^x+1}$,利于作差比较,第(2)题还可利用数学归纳法证明.

例 3 已知过原点 O 的一条直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图象交于 A、B 两点,分

别过点 A、B 作 y 轴的平行线与函数 $y=\log_2 x$ 的图象交于 C、D 两点.

(1) 证明点 C、D 和原点 O 在同一条直线上;

(2) 当 $BC \parallel x$ 轴时,求点 A 的坐标.

(1997 年,文,0.08)

解 (1) 设点 $A(x_1,\ \log_8 x_1)$, $B(x_2,\ \log_8 x_2)$. 由题设 $x_1>1$, $x_2>1$, 而点 O、A、B 三点共线,得

$$\frac{\log_8 x_1}{x_1}=\frac{\log_8 x_2}{x_2}. \qquad ①$$

又点 C、D 的坐标各为$(x_1,\ \log_2 x_1)$、$(x_2,\ \log_2 x_2)$,因为

$$\log_2 x_1=\frac{\log_8 x_1}{\log_8 2}=3\log_8 x_1,$$

$$\log_2 x_2=\frac{\log_8 x_2}{\log_8 2}=3\log_8 x_2,$$

且直线 OC 的斜率为

$$k_1=\frac{\log_2 x_1}{x_1}=\frac{3\log_8 x_1}{x_1},$$

直线 OD 的斜率为

$$k_2=\frac{\log_2 x_2}{x_2}=\frac{3\log_8 x_2}{x_2},$$

所以 $$k_1=k_2,$$

即点 O、C、D 在同一条直线上.

(2) 由 $BC \parallel x$ 轴,得

$$\log_2 x_1=\log_8 x_2,$$

即 $$\log_2 x_1=\frac{1}{3}\log_2 x_2,\quad x_2=x_1^3.$$

将其代入①,整理得

$$x_1^3\log_8 x_1=3x_1\log_8 x_1.$$

由 $$x_1>1,\ \log_8 x_1\neq 0,$$

得 $$x_1^3=3x_1,$$