高等数学

数学教研室 编

西北电讯工程学院

1975

高等数学

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

改革旧的教育制度，改革旧的教学方针和方法，是这场无产阶级文化大革命的一个极其重要的任务。

事物矛盾的法则，即对立统一的法则，是自然和社会的根本法则，因而也是思维的根本法则。

人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

前　　言

这本讲义是作为全院各专业通用的高等数学试用教材而编写的。在编写过程中曾与有关教员与学员进行多次讨论，共同商定编写提纲。教材初稿完成后，又经过多次讨论，最后才修改定稿。

为了使工农兵学员一开始就能对高等数学这门课程的全貌有一个大概的瞭解，从而更好地掌握高等数学内容的全部主线，同时，也为了使其它有关课程不致由于等待高等数学中的某些简单内容而迟迟不能开设，我们在第一章编写了“微积分概论”这一课题。各系在教学中可根据实际情况进行适当的取舍。

在编写过程中，我们试图以马、列和毛主席的哲学思想为指导，特别在微分学这一部分中我们是用马克思“数学手稿”的精神来编写的。但是，由于我们对“数学手稿”的精神领会得很不够，因此难免有不足之处，在这方面，我们恳切地希望同志们批评、指正。

为了贯彻毛主席所一贯倡导的理论联系实际的原则，在内容的叙述以及例题的选择方面，尽量以无线电方面的题材为主。关于线性非齐次微分方程的求解，采用了拉氏变换法。

希望本书经过试用取得经验，由工人、学员与教员三结合，编写出符合“教材要彻底改革”的高等数学。

编　　者

1975年7月

目　　录

第一章 微积分概论

§1. 微积分的基本分析方法

微积分这门科学，从产生到现在，大约已经有三百年的历史了。

恩格斯指出：**"…科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。"**①微积分这门科学既不是从天上掉下来的，也不是哪一个"非凡"人物头脑里所固有的，它的产生和发展自始至终都离不开生产的发展和需要。

十六—十七世纪的欧洲，资本主义处于上升时期。当时社会生产实践的发展向自然科学提出了新的课题，也为自然科学理论的研究创造了物质条件。比如，象航海和天文学的研究都需要制造精密的时钟，这就需要机械工业的相应发展。另外，由于当时战争的需要，弹道（抛射体）的研究也迫切需要新的数学工具。象这种描述时间、位置与速度三者之间复杂的关系，初等数学是无能为力的。

现在我们通过两个例子来看一看解决这类问题的微积分的分析方法。

［例 1.1］ 已知自由落体的速度为

$$v = gt,$$

其中 g 为重力加速度。试求落体在 0—T 这段时间内下落的距离（图 1.1）。

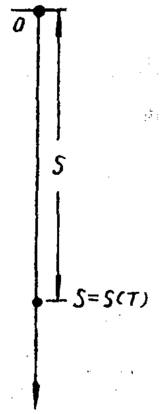

图 1.1

我们知道，如果物体作匀速直线运动，此时速度始终不变，那么

$$距离 = 速度 \times 时间。$$

但是，自由落体的运动并非匀速运动，即速度是随时间而不断改变的，因此，若采用匀速运动计算距离的方法，就会遇到初等数学所无法解决的矛盾——速度均匀与非均匀的矛盾。

不难想象，在一个很小的时间间隔内（例如 10^{-5} 秒内），自由落体运动速度的变化是不大的。因此，在这段时间内，我们可以把自由落体的运动近似地看作是匀速变化的。为此，我们把整个时间段 0—T 分成若干个小段。为简单起见，不妨把它分成 n 个相等的时间段（图1.2）：

$$\left[0, \frac{T}{n}\right], \left[\frac{T}{n}, \frac{2T}{n}\right], \cdots, \left[\frac{(n-1)T}{n}, \frac{nT}{n}\right].$$

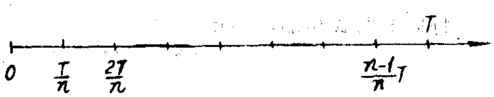

图 1.2

①恩格斯：《自然辩证法》，1971年版，第162页。

在每一个小时间段内，自由落体的运动可近似地看作匀速运动。比如，在$\left[0,\frac{T}{n}\right]$内可视落体的速度为$g\frac{T}{n}$，在$\left[\frac{T}{n},\frac{2T}{n}\right]$内速度为$\frac{2T}{n}$，等等，在$\left[\frac{(n-1)T}{n},\frac{nT}{n}\right]$内速度为$g\frac{nT}{n}$。因此

在$\left[0,\frac{T}{n}\right]$内落体下落距离$\approx\left(g\frac{T}{n}\right)\frac{T}{n}$，

在$\left[\frac{T}{n},\frac{2T}{n}\right]$内落体下落距离$\approx\left(g\frac{2T}{n}\right)\frac{T}{n}$，

…………………

在$\left[\frac{(n-1)T}{n},\frac{T}{n}\right]$内落体下落距离$\approx\left(g\frac{nT}{n}\right)\frac{T}{n}$

自由落体在整个时间段内下落的距离S(T)应当等于在每一个小时间段内落下的距离的总和，即

$$S(T)\approx\left(g\frac{T}{n}\right)\frac{T}{n}+\left(g\frac{2T}{n}\right)\frac{T}{n}+\cdots+\left(g\frac{nT}{n}\right)\frac{T}{n}$$

$$=g\frac{T^2}{n^2}(1+2+\cdots+n).$$

不难算出

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2}.\text{①}$$

这样一来，便有：

$$S(T)\approx g\frac{T^2}{n^2}\cdot\frac{n(1+n)}{2}=\frac{1}{2}gT^2\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

---

①事实上，若令

$$S_n=1+2+\cdots+n,$$

则S_n也可写成：

$$S_n=n+(n-1)+\cdots+1,$$

将以上两式相加，便得：

$$2S_m=\underbrace{(1+n)+(1+n)+\cdots+(1+n)}_{n个}$$

$$=n(1+n).$$

因此，

$$S_n=\frac{n(1+n)}{2}$$

容易看出，当时间段[0,T]等分的数目愈多，即n愈大时，

$$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$$

便愈接近1，从而$\frac{1}{2}gT^2\left(\frac{n+1}{n}\right)$也就愈接近$\frac{1}{2}gT^2$。因而，最后自然把$\frac{1}{2}gT^2$看作是自由落体在时间段[0，T]内落下的距离：

$$S(T)=\frac{1}{2}gT^2.$$

综观上述，我们可以把解决这一问题的方法概括为以下两个步骤：

第一步，将整个时间段[0,T]划分成n个小时间段，并且在每一个小时间段内以不变的速度代替变化的速度，从而使变速运动在这个小时间段内转化为匀速运动。这就是说，通过“以不变代变”（或者说，“以均匀代非均匀”）促使变速运动与匀速运动这对矛盾的转化。整个这一过程就是所谓“化整为零”的过程。

第二步，将落体在每一个小时间段内落下的距离加起来，便得到落体在整个时间段[0,T]内落下的距离的近似值：

$$S(T)\approx\frac{1}{2}gT^2\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}gT^2+\left(\frac{1}{2}gT^2\right)\frac{1}{n}.$$

但是，这时所得到的$\frac{1}{2}gT^2\left(\frac{n+1}{n}\right)$只能是S(T)的近似值。为得到S(T)的精确值，我们应当让整个时间段[0,T]所等分的小时间段的数目无限增多（从而每一个小时间段无限变细），也就是让n无限地变大，用数学符号写，就是让$n\to\infty$；此时$\frac{1}{n}$将消失为0，从而

$$\left(\frac{1}{2}gT^2\right)\frac{1}{n}$$

也随之消失为0。于是，便得到自由落体在时间段[0,T]内落下距离的精确值：

$$S(T)=\frac{1}{2}gT^2.$$

整个这一过程就是所谓“积零为整”的过程。用微积分的语言来说，就是所谓“积分过程”，并且用符号表成

$$S(T)=\int_0^T gt\,dt=\frac{1}{2}gT^2.$$

作为微积分这门科学的另一重要课题，我们再来研究与上面的例子刚好相反的一个问题。

［例1.2］　已知自由落体的运动规律为

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

试求落体在时刻 $t=t_0$ 的瞬时速度。

我们知道，物体作匀速直线运动时，速度始终是不变的，于是

$$速度=\frac{距离}{时间}。$$

但是，自由落体的运动是变速运动。因此，若采用匀速运动计算速度的方法，同样会遇到象例 1.1 一样的矛盾——速度均匀与非均匀的矛盾。

跟例 1.1 一样，在一个很小的时间间隔内，自由落体运动速度的变化是不大的，因而在这段时间内可以把自由落体的运动近似地看成是匀速变化的。于是，我们可以用这段很小的时间间隔内自由落体运动的平均速度来近似地代替自由落体在这段时间内的变速运动。为此我们考虑时刻 t_0 邻近的一个短暂的时间间隔 $[t_0, t_0+\Delta t]$，这里 Δt 代表时间增量，比如，可取 $\Delta t=10^{-5}$(秒)，于是 $[t_0, t_0+\Delta t]$ 便代表从时刻 t_0(秒) 到 t_0+10^{-5}(秒) 这段短暂的时间。自由落体在这段时间内落下的距离（用 ΔS 代表）应当是（图 1.3）：

$$\Delta S=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2$$

$$=gt_0\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2.$$

从而，在时间段 $[t_0, t_0+\Delta t]$ 内自由落体的平均速度（用 $\overline{V}$ 代表）便为：

$$\overline{V}=\frac{\Delta S}{\Delta t}=gt_0+\frac{1}{2}g(\Delta t).$$

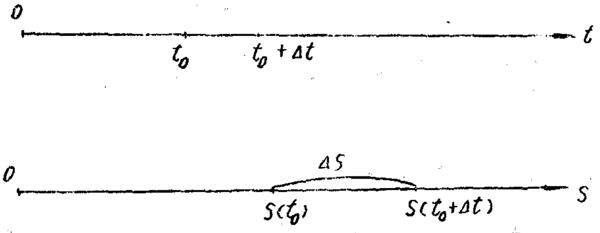

图 1.3

容易想象，时间间隔愈小（即 Δt 愈小），在 $[t_0, t_0+\Delta t]$ 这段时间内的平均速度就愈接近于落体在时刻 t_0 的瞬时速度。若用 V_{t_0} 代表自由落体在时刻 t_0 的瞬时速度，便有：

$$V_{t_0}\approx\overline{V}=gt_0+\frac{1}{2}g(\Delta t).$$

当 Δt 无限变小时（用数学符号来写，就是当 $\Delta t\to 0$ 时），量

$$\frac{1}{2}g(\Delta t)$$

便随 Δt 消失为 0 而消失为 0。此时，自然把 gt_0 看作是自由落体在时刻 t_0 的瞬时速度：

$$V_{t_0}=gt_0$$

处理上述问题的方法概括起来说，就是：

第一步，在时刻 t_0 附近取一个很小的时间间隔$[t_0, t_0+\Delta t]$，在这一小段时间内视落体运动为近似匀速的。

第二步，求出落体在时间段$[t_0, t_0+\Delta t]$内平均速度$\overline{V}$，并以此平均速度作为瞬时速度的近似值

$$V_{t_0} \approx \overline{V} = gt_0 + \frac{1}{2}g(\Delta t) \quad .$$

为得到瞬时速度V_{t_0}的精确值，必须让小时间段无限变细，也就是让 Δt 无限变小，用数学符号写，就是让 $\Delta t \to 0$；此时，量

$$\frac{1}{2}g(\Delta t)$$

将随之消失为 0。在“它们消失的确定时刻”（恩格斯语），平均速度

$$\overline{V} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = gt_0 + \frac{1}{2}g(\Delta t)$$

便转化为瞬时速度gt_0，即

$$V_{t_0} = gt_0$$

在高等数学中，这就是所谓“微商（求导）过程”，并且用符号表成

$$V_{t_0} = \left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=t_0} .$$

上述的两个例子完全揭露了微积分这门科学的核心问题。从物理学的角度来看，这是两个完全相反的问题：前者是已知速度求路程，后者是已知路程求速度。正是这两个方面的对立统一，便构成了微积分这门科学的基本课题。

综观上述两个问题的全貌，我们便会发现它们具有许多共性。首先，就所研究的对象而言，它们都是以随时间不断变化着的量作为研究对象。所不同的，第一个例子是研究微小量求和的问题，第二个例子则是研究两个微小量之商的问题。其次，就研究方法而言，所使用的都是“微观”方法。就是说，在一个十分短暂的时间间隔内，研究变量的局部变化，并且在这一局部范围内把变量近似地看成是不变的。最后，再让时间间隔无限变细，从而得到所要求的量。这种方法在数学上叫做极限方法。

其实，这种数学思想在中国古代就早已有了朴素的萌芽。远在魏晋时代（公元第三世纪）的刘徽就曾经提出“割圆术”，用以求圆的面积（图 1.4），并由此求出圆周率 π 的近似

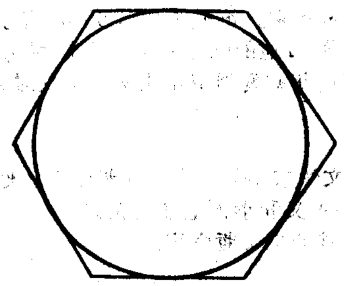

图 1.4

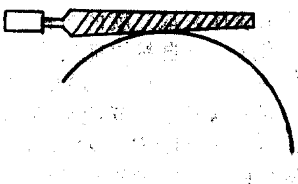

图 1.5

值为3.1416。工人师傅用锉刀锉圆形工件，从局部看，每锉一下都是直的。不断地锉去尖角，就会渐渐地锉出一个圆形工件来（图1.5）。

因此，恩格斯指出：**“高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下直线和曲线应当是一回事。”**①

在微积分这门科学的导源中，必须提到笛卡儿(Descartes)。②他在1637年著有“几何学”一书，在该书中第一次引出了坐标，从而有了变量的概念。恩格斯对此曾给予很高的评价：**“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生。”**③由于生产实践的需要，在广大劳动人民实践经验的基础上，终于在十七世纪的后半叶，由牛顿（Newton）④和莱布尼茨（Leibnitz）⑤总结和发展了前人的工作，几乎同时地建立了微积分。正如恩格斯所指出的：微积分**“是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的”**。⑥

通常所说的高等数学，就是指微积分这门学科而言。它大体上由微分学（相当于例1.2所揭示的内容）和积分学（相当于例1.1揭示的内容）这两大部分所构成。初等数学和高等数学的主要区别就在于前者是研究常量的数学，而后者则是研究变量的数学。恩格斯指出：**“初等数学，即常数的数学，是在形式逻辑的范围内活动的，至少总的来说是这样；而变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用”**。⑦在形而上学看来，曲的就是曲的，直的就是直的，匀速运动就是匀速运动，变速运动就是变速运动。但是，在辩证法看来，它们是一对一对的矛盾，矛盾着的两方面既有质的区别，又在一定的条件下相互转化。

微积分这门科学一经产生，便又反过来在科学实验和生产实践中显示出重要的成效。今天，它已经成为许多自然科学部门的重要基础理论。

伟大的革命导师马克思和恩格斯对于微积分这门科学的发展始终予以高度的重视。在十九世纪末，马克思研究了微积分，并且写了**“数学手稿”**。这部光辉著作是我们今天学习数学和从事数学研究工作的强有力的思想武器。恩格斯认为微积分的发明是人类精神的胜利；他并批判了政治骗子杜林认为纯数学是从头脑中构造出来的先验论。

马克思说：**“在我们这个时代，每一种事物好象都包含有自己的反面。……现代工业、科学与现代贫困、衰颓之间的这种对抗，我们时代的生产力与社会关系之间的这种对抗，是**

---

①恩格斯：《反杜林论》1970年版，第118页。

②笛卡儿（Descartes），1596—1650。法国哲学家和数学家。笛卡儿是二元论者。一方面，他的唯物主义自然观使他在科学上取得了成就；另一方面，他的唯心主义思想是维护宗教的。作为资产阶级的知识分子，他反映了当时十七世纪资产阶级想发展资本主义，又反对人民，对封建君主政体采取迁就的方针。

③恩格斯：《自然辩证法》，1971年版，第236页。

④牛顿（Newton），1642—1727。英国物理学家、天文学家和数学家。在哲学上，他认为空间、时间和物质是相互脱离的。恩格斯批判了牛顿在唯心主义和形而上学的错误。

⑤莱布尼茨（Leibniz），1646—1716。德国数学家，唯心主义哲学家。

⑥恩格斯：《自然辩证法》，1971年版，第236页。

⑦恩格斯：《反杜林论》，1970年版，第132页。

显而易见的、不可避免和毋庸争辩的事实。”①在资本主义社会，科学技术给广大劳动人民带来的是失业与贫困。科学技术只有掌握在无产阶级及广大劳动人民手中才能变成改造世界的强大的物质力量，才能**“把科学从阶级统治的工具变为人民的力量。”**

我国是社会主义国家，我们要又红又专，认真看书学习，弄通马克思主义，要努力学好技术，为巩固无产阶级专政，防止资本主义复辟，建设社会主义而斗争。

唯物辩证法是高等数学的灵魂。为学好这门课程，必须首先刻苦攻读马、列和毛主席的著作，以马克思主义的哲学思想作为指导思想。切不可以满足于记住几个公式和概念。而应努力学会用唯物辩证法来掌握高等数学的理论和方法。

§2. 变量和函数

在前一节中我们已经指出过，高等数学是以变量作为研究对象的一门学科。因此，研究高等数学必须从探讨变量以及变量之间的函数关系入手。变量与函数的概念，大家已经在初等数学中学习过了。在这一节，我们将对这些概念的有关内容作进一步的讨论。

一、常量与变量

辩证法告诉我们：应当从事物的发展变化中去把握客观事物的规律性。从量的方面来探讨客观事物的规律性，就导致了变量的概念。当我们从量的方面来考察事物的一个具体发展变化过程时，便会发现，其中有些量是不断变化的，即可以取不同的数值，这种量叫做**变量**；相反地，另外有些量在这一具体过程中是不变化的，即保持固定的数值，这种量叫做**常量**。必须注意，一个量究竟是常量还是变量，这要相对于一个具体过程而言。比如，一个小金属球从高处落下时，空气阻力对它的影响是微不足道的，在这一过程中我们可以把空气阻力视为常数 0 而不计。但是，如果研究一个降落伞从空中下落时，那么随着降落伞下落速度的增大，阻力也随之增大。此时，空气阻力就不能忽略不计了，并且它还是一个变量。

二、函数概念

在同一个现象中所碰到的各种变量，往往不是彼此孤立变化的。毛主席指出：“**…每一事物的运动都和它的周围其它事物互相联系着和互相影响着。**”③事物之间这种相互依赖与相互制约的关系在量的方面是怎样体现出来的呢？我们来看两个例子。

大家知道，森林中的树木，它的横断面的直径与其高度二者之间是有联系的。随着树木高度的增长，一般来说，它的横断面直径也相应的增大。

作为另一个例子，考虑自由落体落下的距离与时间的关系：

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

这两个例子虽然都反映了两个变量之间的依赖关系，但是两者却有本质的不同。第一个

①马克思：《在“人民报”创刊纪念会上的演说》，见马克思恩格斯选集，第二卷，1972 年版，78—79 页。

②马克思：《法兰西内战》初稿，马克思恩格斯选集，第二卷，1972 年版，第 422 页。

③《毛泽东选集》（合订本），第 276 页。

例子所反映出来的依赖关系是不精确的——尽管横断面的直径会影响树木的高度，但即使准确地知道了横断面的直径也无法准确地知道树木的高度，直径相同的树木可以有不同的高度。为了掌握一批树木的横断面直径与其高度的变化规律，必须对森林中大量（相同品种）树木进行统计观测。这是统计数学的任务，在高等数学中不研究这类问题。至于第二个例子所反映出来的距离与时间的依赖关系则是精确的关系——只要知道了自由落体运动所经历的时间 t，就能完全准确地知道物体下落的距离 S。高等数学中所要研究的正是这种依赖关系。这种依赖关系不但指出了两个变量的相互依赖性，而且还给出了反映这种联系的一条规律，按照这条规律，其中一个变量（例如时间 t）处于主动地位，它在某一个范围内每取一个数值，另一变量（例如距离 S）就有一个完全确定的值与之对应。反映这种精确依赖关系的，在数学上就是函数概念。

［定义1.1］假定在一个具体的过程中有两个变量 x 与 y。如果对于变量 x 的变化范围内的每一个值，变量 y 依照一定的规则有一个完全确定的值与之对应，那末，就说 y 是 x 的**函数**，记作

$$y = f(x),$$

其中 x 叫**自变量**，y 叫**因变量**。

在初等数学中我们已经熟悉了许多各种不同类型的函数，这里无需再一一重复。关于函数概念，有以下两点是最关重要的。

1°. 对应规则

在函数记号 $y=f(x)$ 中之“f”可以理解为变量 x 与y的一个对应规则。按照这一规则，在 x 的变化范围内每给一个值，y 便相应地有一个完全确定的值与之对应。如果对于自变量 x 的一个值 x_0，变量 y 所对应的值是y_0，那末就说函数$y=f(x)$在点x_0之值为y_0。并且记为 $y_0=f(x_0)$。在这里，函数符号 f 就好像是一个变换器，当输入一个x_0时，通过“变换器”f，就得到一个输出为$y_0=f(x_0)$的值。例如，当

$$y=f(x)=x^2$$

时，对应规则 f 相当于一个“平方器”，它把来自于自变量的任何值都进行平方运算，从而得到相应的函数值。例如

$$f(x_0)=x_0{}^2,$$
$$f(x_0+1)=(x_0+1)^2,$$
$$f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2$$

等等。

如果同时需要考察几个函数时，那么，可以分别用

$$y=f(x),\qquad y=\varphi(x),\qquad y=\psi(x)$$

等等，来表示不同的函数。

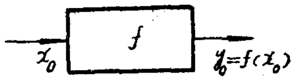

图 1.6

2°. 定义域

在函数概念的定义中还有一个重要的因素，那就是自变量的变化范围，称它为函数的定义域。换一句话说，所谓函数的定义域，就是在我们所考察的具体过程中自变量允许取值的

范围。

［例1.3］ 求函数

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

的定义域。

由于负数开方无意义（就实数范围而言），因此，这一函数的自变量允许取值的范围应当是满足不等式

$$1-x^2\geq 0$$

的全体实数。换言之，这一函数的定义域就是满足不等式

$$-1\leq x\leq 1$$

的全体实数（图1.7）.

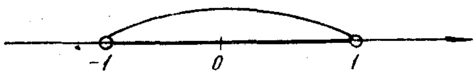

图 1.7

［例1.4］ 求函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

的定义域。

同前一个例子类似的道理，我们容易看出，这一函数的定义域应当是满足不等式

$$x^2-1>0$$

的全体实数，也就是满足$x<-1$或$x>1$的那种实数的全体（图1.8）。

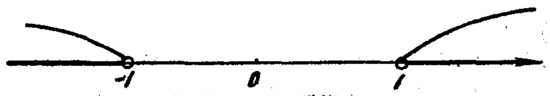

图 1.8

由这两个例子可以看出，一般说来，函数的定义域从几何上看是由数轴上的一个线段或几个线段构成的(这种线段可以是无限伸长的)。我们今后把这种线段称做**区间**。

我们分别称满足不等式

$$a\leq x\leq b;$$
$$a<x<b;$$
$$a\leq x<b,\ a<x\leq b$$

的那种实数 x 的全体为**以a，b为端点的闭区间、开区间、半开区间**，并且分别记为$[a, b]$，(a,b)，$[a, b)$，$(a, b]$。同时，分别称满足不等式

$$x>a;\ x\geq a;\ x<a;\ x\leq a$$