专业教育出版　高考备考精品

高考零距离

精讲本

一轮复习

优化讲练

数学

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社

高考零距离 精讲本

数学 一轮复习优化讲练

本书编写组 编

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

书　　名　高考零距离　一轮复习优化讲练·数学
作　　者　本书编写组
责任编辑　田　鹏
出版发行　凤凰出版传媒集团
　　　　　江苏教育出版社(南京市马家街31号 210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京理工出版信息技术有限公司
印　　刷　丹阳教育印刷厂
厂　　址　丹阳市陵川绿岛北首(邮编 212300)
电　　话　0511-6520177
开　　本　787×1092毫米　1/16
印　　张　17.25
字　　数　575 000
版　　次　2006年6月第2版
　　　　　2006年6月第1次印刷
书　　号　ISBN 7-5343-6877-4/G·6562
定　　价　21.60元
批发电话　025-83260760，83260768
邮购电话　025-85400774，8008289797
短信咨询　10602585420909
E-mail　jsep@vip.163.com
盗版举报　025-83204538

目录

第一章　集合与简易逻辑 …… 001
第 1 课时　集合与集合运算(1) …… 001
第 2 课时　集合与集合运算(2) …… 002
第 3 课时　简易逻辑 …… 003

第二章　函数 …… 005
第 4 课时　映射与函数、反函数(1) …… 005
第 5 课时　映射与函数、反函数(2) …… 006
第 6 课时　函数的定义域 …… 007
第 7 课时　函数的值域 …… 008
第 8 课时　函数的解析式 …… 010
第 9 课时　函数的奇偶性 …… 011
第 10 课时　函数的单调性 …… 012
第 11 课时　二次函数(1) …… 013
第 12 课时　二次函数(2) …… 015
第 13 课时　函数的图象 …… 016
第 14 课时　指数与对数 …… 018
第 15 课时　指数函数、对数函数(1) …… 019
第 16 课时　指数函数、对数函数(2) …… 021
第 17 课时　函数的实际应用(1) …… 022
第 18 课时　函数的实际应用(2) …… 024
第 19 课时　函数性质的综合运用 …… 026

第三章　数列 …… 029
第 20 课时　等差数列与等比数列(1) …… 029
第 21 课时　等差数列与等比数列(2) …… 031
第 22 课时　等差数列与等比数列(3) …… 032
第 23 课时　数列的通项(1) …… 034

第 24 课时 数列的通项(2) …… 035
第 25 课时 数列求和 …… 037
第 26 课时 数列应用题(1) …… 038
第 27 课时 数列应用题(2) …… 040

第四章 三角函数 …… 043
第 28 课时 任意角的三角函数 …… 043
第 29 课时 同角三角函数关系及诱导公式 …… 044
第 30 课时 两角和与差的三角函数 …… 046
第 31 课时 二倍角的正弦、余弦、正切 …… 047
第 32 课时 三角函数的图象(1) …… 049
第 33 课时 三角函数的图象(2) …… 050
第 34 课时 三角函数的定义域、值域和最值 …… 052
第 35 课时 三角函数的性质 …… 053
第 36 课时 三角函数的化简与求值 …… 055
第 37 课时 三角形中的计算与证明 …… 056

第五章 平面向量 …… 059
第 38 课时 向量与向量的加减法 …… 059
第 39 课时 实数与向量的积 …… 060
第 40 课时 平面向量的坐标运算 …… 062
第 41 课时 平面向量的数量积 …… 063
第 42 课时 平面向量的应用 …… 064

第六章 不等式 …… 066
第 43 课时 不等式的性质 …… 066
第 44 课时 基本不等式 …… 067
第 45 课时 不等式的证明(1) …… 068
第 46 课时 不等式的证明(2) …… 070
第 47 课时 不等式的证明(3) …… 071
第 48 课时 不等式的解法(1) …… 072
第 49 课时 不等式的解法(2) …… 074
第 50 课时 含绝对值的不等式 …… 075
第 51 课时 不等式的综合应用 …… 076

第七章　直线和圆的方程 …… 079
第 52 课时　直线的倾斜角和斜率 …… 079
第 53 课时　直线方程 …… 080
第 54 课时　两条直线的位置关系 …… 082
第 55 课时　简单的线性规划 …… 083
第 56 课时　圆的方程(1) …… 086
第 57 课时　圆的方程(2) …… 087
第 58 课时　直线与圆的位置关系 …… 089

第八章　圆锥曲线方程 …… 091
第 59 课时　椭圆 …… 091
第 60 课时　双曲线 …… 092
第 61 课时　抛物线 …… 094
第 62 课时　直线与圆锥曲线的位置关系(1) …… 096
第 63 课时　直线与圆锥曲线的位置关系(2) …… 097
第 64 课时　直线与圆锥曲线的位置关系(3) …… 099
第 65 课时　求轨迹方程(1) …… 101
第 66 课时　求轨迹方程(2) …… 102
第 67 课时　解析几何中的最值问题 …… 104

第九章　直线、平面、简单几何体 …… 106
第 68 课时　平面及其基本性质 …… 106
第 69 课时　空间两条直线 …… 107
第 70 课时　直线与平面平行 …… 109
第 71 课时　直线与平面垂直 …… 111
第 72 课时　三垂线定理及其应用 …… 112
第 73 课时　平面与平面平行 …… 114
第 74 课时　平面与平面垂直 …… 115
第 75 课时　二面角(1) …… 117
第 76 课时　二面角(2) …… 119
第 77 课时　空间图形的平行关系 …… 120
第 78 课时　空间图形的垂直关系 …… 122
第 79 课时　空间图形所成的角 …… 124
第 80 课时　空间图形的距离 …… 125
第 81 课时　棱柱、棱锥的有关概念与性质 …… 128

第 82 课时　棱柱、棱锥的侧面积与体积 …… 130
第 83 课时　球 …… 132
第 84 课时　空间向量及其运算 …… 133
第 85 课时　空间向量的运用 …… 135

第十章　排列、组合和概率 …… 138
第 86 课时　基本原理、排列数与组合数 …… 138
第 87 课时　排列应用题 …… 139
第 88 课时　组合应用题 …… 141
第 89 课时　排列组合的混合应用 …… 142
第 90 课时　二项式定理 …… 143
第 91 课时　二项式系数的性质及二项式定理的应用 …… 144
第 92 课时　随机事件的概率 …… 145
第 93 课时　互斥事件的概率 …… 147
第 94 课时　相互独立事件同时发生的概率 …… 148
第 95 课时　统计 …… 150

第十一章　导数 …… 152
第 96 课时　导数的概念及运算 …… 152
第 97 课时　导数的简单运用 …… 153

参考答案 …… 155

高考零距离　提升演练·数学 …… 185

第一章　集合与简易逻辑

直击高考

高考试题中,涉及集合的知识主要呈现在两个方面,一是对集合概念的理解力的考查,要求考生对集合的有关概念与运算具有一定的理解能力,如集合的表示、元素与集合间的关系、集合与集合间的关系等;二是集合知识与其他领域知识的结合运用、集合语言与数学语言的互译等,要求考生熟练掌握集合的运算,具备一定的等价转化思想,能设计、使用集合进行数形互转,解决有关方程、不等式、函数及曲线等有关问题.

简易逻辑的有关知识是人们认识和研究事物的工具,高考中主要考查命题间的逻辑关系,以及判断能力、推理能力等.

第1课时　集合与集合运算(1)

知识精要

1. 了解集合的概念;理解子集、真子集的意义;掌握元素与集合、集合与集合之间的关系;会进行集合的交、并、补集运算.

2. 重点与难点:掌握有关的术语和符号,正确地表示集合.

方法引领

1. 弄清集合的有关概念

例1　下列关系中错误的是　　(　　)

A. $\varnothing\subseteq\{0\}$　　B. $0\in\{0\}$

C. $0\in\varnothing$　　D. $0\notin\{\varnothing\}$

解析　A、B、D均正确,C是错误的.

点评　应弄清元素与集合、集合与集合之间的关系.

例2　设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$, $N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,则　　(　　)

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

解析　M中的x可以写为$x=\frac{2k+1}{4}\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, N中的x可以写为$x=\frac{k+2}{4}\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. 由于$2k+1$能够取遍一切奇数,而$k+2$可取遍一切整数,故答案为B.

点评　弄清集合概念中"事物的全体"的意义.

例3　已知 $A=\{a,ab,\lg(ab)\}$, $B=\{0,b,|b|\}$,且$A=B$,求实数a、b的值.

解析　由$\begin{cases}\lg(ab)=0,\\a=b,\\ab=|b|,\end{cases}$ 得$\begin{cases}a=1,\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1,\\b=-1;\end{cases}$

由$\begin{cases}\lg(ab)=0,\\a=|b|,\\ab=b,\end{cases}$ 得$a=b=1$.

当$a=b=1$时,违背集合中元素的互异性,

∴ 当$a=b=-1$时,$A=B$.

点评　解集合问题要注意验证集合中的元素应是互异的.

2. 有关集合的运算中,准确理解集合语言是难点

例4　(1) 已知$A=\{(x,y)\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{(x,y)\mid y=7-x^2,x\in\mathbf{R}\}$,则$A\cap B=$______;

(2) 已知$A=\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{y\mid y=7-x^2,x\in\mathbf{R}\}$,则$A\cap B=$______.

解析　解方程组$\begin{cases}y=x^2-1,\\y=7-x^2,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-2,\\y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$曲线$y=x^2-1$和$y=7-x^2$的两个交点为$(-2,3)$和$(2,3)$,第(1)题中$A$、$B$为点集,$A\cap B=\{(-2,3),(2,3)\}$. 而第(2)题如果理解为$A\cap B=\{3\}$就错了,因为$A$、$B$都表示数集,它们分别表示函数$y=x^2-1$, $x\in\mathbf{R}$和$y=7-x^2$, $x\in\mathbf{R}$的值域,从整体上把握,应该有$A=\{y\mid y\geqslant-1\}$, $B=\{y\mid y\leqslant7\}$,因此$A\cap B=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 7\}$.

点评　应抓住代表元素,弄清集合属性.

例5　已知$A=\left\{x\,\middle|\,\frac{x+1}{2-x}<0\right\}$, $B=\{x\mid 4x+p<0\}$,试分别求出实数p的取值范围,使

(1) $A\cap B=B$;　　(2) $A\cup B=\mathbf{R}$.

解析　$A=\{x\mid x<-1$或$x>2\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,x<-\frac{p}{4}\right\}$.

(1) 要使$A\cap B=B$成立,即$B\subseteq A$, ∴ $-\frac{p}{4}$

$\leqslant -1$，即 $p \geqslant 4$.

(2) 要使 $A \cup B = \mathbf{R}$，则 $-\frac{p}{4} > 2$，$\therefore p < -8$.

点评 注意临界点，以确定参数范围的边界.

例 6 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - mx + 2 = 0\}$，且 $A \cup B = A$，求实数 m 的取值范围.

解析 $A = \{1, 2\}$，$\because A \cup B = A$，$\therefore B \subseteq A$，$\therefore B = \varnothing$ 或 $B = \{1\}$ 或 $B = \{2\}$ 或 $B = \{1, 2\}$.

1° 当 $B = \varnothing$ 时，$\Delta < 0$，$\therefore -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$；

2° 当 $B = \{1\}$ 时，$\Delta = 0$ 且 $1^2 - m \times 1 + 2 = 0$，无解；

3° 当 $B = \{2\}$ 时，$\Delta = 0$ 且 $2^2 - 2m + 2 = 0$，无解；

4° 当 $B = \{1, 2\}$ 时，由 $\begin{cases} 1 + 2 = m, \\ 1 \times 2 = 2, \end{cases}$ 得 $m = 3$.

综上所述，$-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ 或 $m = 3$.

点评 $B \subseteq A$ 时，勿忘 $B = \varnothing$.

考点链接

高考直接考查集合的内容一般是基本概念和基本运算，难度不会过大，但高考中集合知识也可以和其他知识如函数、方程、不等式、数列、解析几何等相结合出现综合性大题.

例 7 (2003 北京春)若集合 $M = \{y \mid y = 2^{-x}\}$，$N = \{y \mid y = \sqrt{x-1}\}$，则 $M \cap N =$ ( )

A. $\{y \mid y > 1\}$　　B. $\{y \mid y \geqslant 1\}$

C. $\{y \mid y > 0\}$　　D. $\{y \mid y \geqslant 0\}$

解析 $\because M = \{y \mid y = 2^{-x}\} = \{y \mid y > 0\}$，$N = \{y \mid y \geqslant 0\}$，$\therefore M \cap N = \{y \mid y > 0\}$，故选 C.

点评 本题主要是借助函数的性质考查集合的运算，在解决本题时要注意 M、N 是两个函数的值域，求 $M \cap N$ 就是求这两个函数值域的交集.

第 2 课时　集合与集合运算(2)

知识精要

1. 运用集合语言和集合思想参与解答函数、方程和不等式的有关问题，能用韦恩图解决问题.

2. 重点与难点：集合语言和其他数学语言的互化.

方法引领

1. 用韦恩图直观地处理有关集合运算

例 1 全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$A \subseteq U$，$B \subseteq U$ 且 $A \cap B = \{5\}$，$(\complement_U A) \cap B = \{4\}$，$(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{1, 2\}$，则以下四个命题中真命题是 ( )

A. $3 \notin A$，$3 \notin B$　　B. $3 \notin A$，$3 \in B$

C. $3 \in A$，$3 \in B$　　D. $3 \in A$，$3 \notin B$

解析 画韦恩图处理，选 D.

点评 韦恩图可以把交错混杂的集合运算变得脉络清晰.

例 2 设 $\text{card}(P) = 10$，$\text{card}(Q) = 20$，$\text{card}(P \cup Q) = 23$，则 $\text{card}(P \cap Q) =$ ( )

A. 3　　B. 7　　C. 13　　D. 30

解析 $\text{card}(P \cap Q) = \text{card}(P) + \text{card}(Q) - \text{card}(P \cup Q)$，选 B.

点评 同样可由韦恩图看出集合元素的个数.

例 3 已知 $A = \{(x, y) \mid x + my + 6 = 0\}$，$B = \{(x, y) \mid (m-2)x + 3y + 2m = 0\}$，且 $A \cap B = \varnothing$，则 $m =$ ________.

解析 点集问题可考虑数形结合，这里可看成两直线平行，$m = -1$.

点评 有关点集问题除韦恩图外，可考虑方程(不等式)表示的点集.

例 4 开校运会时，高三(2)班共有 28 名同学参加比赛，其中有 15 人参加游泳比赛，有 8 人参加田径比赛，有 14 人参加球类比赛，同时参加游泳和田径比赛的有 3 人，同时参加游泳和球类比赛的有 3 人，没有人同时参加三项比赛，问同时参加田径和球类比赛的有多少人？只参加游泳比赛的有多少人？

解析 设既参加田径比赛又参加球类比赛的人数为 x，则

$15 + (8 - 3) + (14 - x - 3) = 28$，$\therefore x = 3$.

$\therefore$ 只参加游泳比赛的有 9 人.

点评 韦恩图是解决此类问题的最佳方案.

2. 注重分析集合语言、数学语言与其他语言的互化

例 5 已知 $A = \{x \mid 2x^3 + 5x^2 + x - 2 > 0\}$，$B = \{x \mid x^2 + ax + b \leqslant 0\}$，且 $A \cup B = \{x \mid x + 2 > 0\}$，$A \cap B = \left\{x \middle| \frac{1}{2} < x \leqslant 3\right\}$，求实数 a、b 的值.

解析 $A = \left\{x \middle| -2 < x < -1 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$，又 $A \cup B = \{x \mid x > -2\}$，$A \cap B = \left\{x \middle| \frac{1}{2} < x \leqslant 3\right\}$，

$\therefore B=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$.

由韦达定理得 $\begin{cases}-a=-1+3, \\ b=3\times(-1),\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}a=-2, \\ b=-3.\end{cases}$

点评 这里是集合语言转化为不等式、方程的解的语言.

例 6 已知三条抛物线 $y=x^2-4ax-4a+3$, $y=x^2+(a-1)x+a^2$, $y=x^2+2ax-2a$ 中至少有一条与 x 轴有公共点,求实数 a 的取值范围.

解析 符合题意的情形有七种,而不符合题意的只有一种情形,可利用补集思想求解.

若三条抛物线均不与 x 轴相交,则 $\Delta_1<0$, $\Delta_2<0$, $\Delta_3<0$. 解得 $-\frac{3}{2}<a<-1$. 本题所求取值范围即为它的补集,即 $a\geqslant -1$ 或 $a\leqslant -\frac{3}{2}$.

点评 已知全集 I,若直接求其子集 A 有困难,则可先考虑求其补集 $\complement_I A$,再利用 $\complement_I(\complement_I A)=A$ 间接求出 A. 这种在顺向思维受阻后改用逆向思维的思想,就是数学上的补集思想方法. 补集思想方法的运用,常给人以"山重水复疑无路,柳暗花明又一村"的体验. 从哲学意义上讲,它是通过两次否定实现一次肯定,体现了否定之否定规律.

考点链接

例 7 (2005 全国Ⅰ)设 I 为全集, S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$,则下面论断中正确的是 ( )

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$

B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap \complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap \complement_I S_2\cap \complement_I S_3=\varnothing$

D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup \complement_I S_3)$

解析 选 C.

点评 三个集合的关系抽象而且复杂,可借助韦恩图,这类题在高考题的选择、填空题中较为常见. 此外有关函数综合题、方程、不等式等问题常以集合形式出现.

第3课时 简易逻辑

知识精要

1. 理解逻辑联结词"或""且""非"的含义及复合命题的构成;掌握真值表判断命题的真假;掌握四种命题的关系;掌握反证法及其证明步骤.

2. 重点与难点:掌握反证法的理论依据.

3. 掌握充分条件和必要条件的定义,能正确地判断充分条件、必要条件、充要条件.

方法引领

1. 逻辑联结词与复合命题

例 1 有下列命题:①2001 年 10 月 1 日是国庆节,又是中秋节;②10 的倍数一定是 5 的倍数;③梯形不是矩形;④$3\leqslant 2$. 其中,复合命题有 ( )

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

解析 ①③④均为复合命题,选 C.

例 2 $xy\neq 0$ 是指 ( )

A. $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$

B. $x\neq 0$ 或 $y\neq 0$

C. x、y 至少有一个不为 0

D. 不都是 0

解析 "$\neq$"问题要注意反思,选 A.

点评 要仔细审题,将其他语言转化为"或"、"且"、"非"的逻辑语言,从而作出准确判断.

例 3 写出下列命题的否定形式:

(1) 一个三角形中至多有一个钝角________;

(2) 一个三角形中至少有两个锐角________;

(3) 不论 k 取何实数, $x^2+x+k=0$ 必有实根________;

(4) 存在一个实数 x,使得 $x^2+x-1<0$ 成立________.

解析 (1)一个三角形中至少有两个钝角;(2)一个三角形中至多有一个锐角;(3)存在一个实数 k 使 $x^2+x+k=0$ 无实根;(4)对任意实数 x, $x^2+x-1\geqslant 0$ 都成立.

点评 "至多 n 个"的否定形式是"至少 $n+1$ 个","至少 n 个"的否定形式是"至多 $n-1$ 个","任意"的否定形式是"存在一个反例","存在一个"的否定形式是"任意一个都不成立".

2. 复合命题如何判断真假

例 4 已知命题 p: $\sqrt{19-8\sqrt{3}}+\sqrt{19+8\sqrt{3}}$ 不是有理数; q: 15 是质数. 由它们构成的"p 或 q"、"p 且 q"和"非 p"形式的复合命题中,真命题有 ( )

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　　　　　　D. 3 个

解析　仅非 p 为真，选 B.

点评　先判断 p、q 的真假，再根据真值表，判断复合命题的真假.

3. 四种命题及其相互关系

例 5　命题：若 $x^2+y^2=0$，则 x、y 全为 0 的逆命题为______________，否命题为______________.

解析　“都是”的否定形式应是“不都是”. 逆命题为“若 x、y 全为 0，则 $x^2+y^2=0$”，否命题为“若 $x^2+y^2\neq 0$，则 x、y 不全为 0”.

点评　分清逆命题与否命题.

例 6　设命题“若 $m>0$，则关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根”，试写出它的逆命题、否命题和逆否命题，并判断它们的真假.

解析　逆命题：若关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有实数根，则 $m>0$（假）；

否命题：若 $m\leqslant 0$，则关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 无实根（假）；

逆否命题：若关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 没有实根，则 $m\leqslant 0$（真）.

点评　四种命题中，原命题与逆否命题具有相同的真假性；逆命题与否命题互为逆否命题.

4. 充分条件与必要条件

例 7　指出下列各题中 p 是 q 的什么条件？（在 A“充分不必要条件”、B“必要不充分条件”、C“充要条件”、D“既不充分也不必要条件”中选出一种）

(1) p: $0<x<3$, q: $|x-1|<2$；(　　)

(2) p: $(x-2)(x-3)=0$, q: $x=2$；(　　)

(3) p: $c=0$, q: 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点；(　　)

(4) p: $a^2>b^2$, q: $a>b$；(　　)

(5) p: $\alpha=\beta$, q: $\tan\alpha=\tan\beta$.（　　）

解析　注意当 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，不能导出 $\tan\alpha=\tan\beta$. (1) A, (2) B, (3) C, (4) D, (5) D.

点评　注意：若 $A\Rightarrow B$，则 A 是 B 的充分条件；若 $A\Leftarrow B$，则 A 是 B 的必要条件.

例 8　已知 p: $\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$, q: $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0\ (m>0)$，若非 p 是非 q 的必要而不充分条件，求实数 m 的取值范围.

解析　p: $-2\leqslant x\leqslant 10$, q: $1-m\leqslant x\leqslant 1+m\ (m>0)$.

非 p 是非 q 的必要不充分条件 $\Rightarrow$ p 是 q 的充分不必要条件

$$\Rightarrow\begin{cases}1-m\leqslant -2,\\ 1+m\geqslant 10,\\ m>0\end{cases}\Rightarrow m\geqslant 9.$$

$\therefore$ m 的取值范围是 $m\geqslant 9$.

点评　本题中要注意 $m=9$ 时的情形，它也符合题意.

考点链接

简易逻辑问题在高考试卷中往往直接出现在选择、填空题中，解答题中也常以充要条件、复合命题等为载体，考查其他章节的知识，并以此考查学生的分析能力、逻辑推理能力.

例 9　(2005 福建)(理)已知 p: $|2x-3|<1$, q: $x(x-3)<0$，则 p 是 q 的　　　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

(文)已知 p: $a\neq 0$, q: $ab\neq 0$，则 p 是 q 的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

解析　理 A，文 B.

第二章　函　　数

直击高考

函数是高中数学的重要内容，也是高等数学的基础，函数中蕴含的运动变化的思想方法贯穿整个高中代数乃至解析几何中.

历年的高考题，无论是选择题、填空题还是解答题都重点考查函数知识. 一方面考查函数的概念、性质和图象，另一方面考查函数、方程、不等式等的综合运用. 在函数与解析几何的综合运用方面，侧重考查利用函数知识求解析几何中的最值、范围等问题. 此外，近年来涉及函数的应用问题也是高考的热点内容之一.

第4课时　映射与函数、反函数(1)

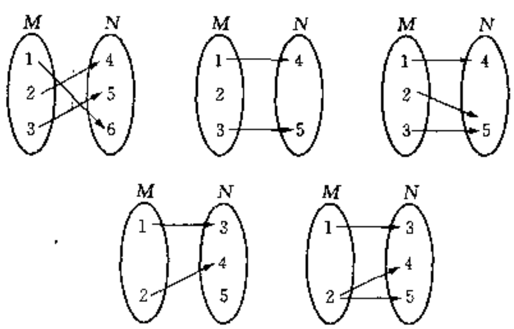
知识精要

了解映射、一一映射的概念；理解函数及有关概念；掌握反函数的求法；理解函数与其反函数的定义域以及图象之间的关系.

方法引领

1. 映射与函数的概念

例1　下列各图分别表示从集合 M 到集合 N 的对应，其中是集合 M 到集合 N 的映射的有　　(　　)



A. 2个　　B. 3个　　C. 4个　　D. 5个

解析　映射只能是一对一或多对一的对应，选B.

例2　下列各组函数中表示同一函数的是(　　)

A. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$

B. $y=\lg x$ 与 $y=\dfrac{1}{2}\lg x^2$

C. $y=\sqrt{x^2}-1$ 与 $y=x-1$

D. $y=x$ 与 $y=\log_a a^x(a>0,\ a\neq 1)$

解析　应从解析式及定义域两方面考虑，选D.

点评　(1)要弄清映射的对应原则是“一对一”或“多对一”，前提是 $A\to B$ 的对应中，A 中元素都有象. (2)函数是两个非空数集间的一个映射.

例3　以下是从集合 A 到集合 B 的对应：

① $A=\{0,\ 2\}$，$B=\{0,\ 1\}$，$f:\ x\to y=\dfrac{1}{2}x$；

② $A=\mathbf{R}$，$B=\mathbf{R}$，$f:\ x\to y=2x+1$；

③ $A=\{-2,\ 0,\ 2\}$，$B=\{0,\ 4\}$，$f:\ x\to y=x^2$；

④ $A=\mathbf{R}$，$B=\{y\mid y>0\}$，$f:\ x\to y=\dfrac{1}{x^2}$.

其中是一一映射的为__________.(只填序号)

解析　应既是“单射”又是“满射”，答案为①、②.

例4　若点$(x,\ y)$在映射 f 作用下的象为$(x+y,\ 2x)$，则点$(1,\ 2)$在 f 作用下的象是________，又点$(1,\ 2)$的原象是________.

解析　象是$(3,\ 2)$，原象是$(1,\ 0)$.

点评　要从“象”与“原象”的对应关系中，理解原函数与反函数的概念.

2. 有关函数与反函数问题

例5　若点$(1,\ 2)$既在函数 $y=\sqrt{ax+b}\ (a\neq 0)$ 的图象上，又在它的反函数的图象上，则 $a=$________，$b=$________.

解析　将点$(1,\ 2)$及$(2,\ 1)$分别代入 $y=\sqrt{ax+b}$，可得 $a=-3$，$b=7$.

点评　点$(a,\ b)$在反函数的图象上，则点$(b,\ a)$必在原函数的图象上.

例6　求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt{x-1}+2\ (x>1)$；

(2) $f(x)=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$；

(3) $y=\log_2(x^2-2x+3)\ (x\leqslant 1)$；

(4) $y=x^2+2x\ (x\geqslant 0)$.

解析　(1) $\because x>1$，$\therefore y>2$.

由 $y=\sqrt{x-1}+2$ 得 $x=(y-2)^2+1$，

$\therefore y=\sqrt{x-1}+2\ (x>1)$ 的反函数为

$f^{-1}(x)=(x-2)^2+1\ (x>2)$.

(2) $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1)$.

(3) $f^{-1}(x)=1-\sqrt{2^x-2}\ (x\geqslant 1)$.

(4) $f^{-1}(x)=\sqrt{1+x}-1\ (x\geqslant 0)$.

点评 求反函数时勿忘反函数的定义域即为原函数的值域.

例 7 若函数 $f(x)=\frac{x-2}{x+a}\ (x\neq -a)$ 的反函数恰好是 $f(x)$，求 a 的值.

解析 由 $f^{-1}(x)=\frac{-ax-2}{x-1}=f(x)$，得 $a=-1$.

点评 本例不仅反映了原函数和反函数可以是同一函数，同时也为论证某一函数图象关于直线 $y=x$ 对称提供了一种方法.

考点链接

映射问题常出现在高考题的选择、填空题中，函数与反函数问题在历年高考中都是必考内容.

例 8 (2000 全国)设集合 A 和 B 都是自然数集 $\mathbf{N}$，映射 $f: A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n，则在映射 f 下，象 20 的原象是 ( )

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

解析 $n\to 2^n+n$，由 $2^n+n=20$，观察得 $n=4$，选 C.

第 5 课时 映射与函数、反函数(2)

知识精要

了解互为反函数的函数图象之间的关系，会求一些简单函数的反函数.

方法引领

1. 求函数的反函数

例 1 函数 $y=\log_2(x^2+1)\ (x<0)$ 的反函数是________.

解析 答案为 $y=-\sqrt{2^x-1}\ (x>0)$.

点评 (1)函数 $y=\log_2(x^2+1)$ 没有反函数，$y=\log_2(x^2-1)(x<0)$ 有反函数；(2)反解 x 时，$x<0$，故 $x=-\sqrt{2^y-1}$；(3)原函数的值域为 $\{y\mid y>0\}$，从而得反函数的定义域为 $\{x\mid x>0\}$.

例 2 求下列函数的反函数.

(1) $y=\begin{cases}x^2,\ x\leqslant 0,\\ -3x,\ x>0;\end{cases}$ (2) $y=x|x|+2x$.

解析 (1) $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{x},\ x\geqslant 0,\\ -\frac{1}{3}x,\ x<0;\end{cases}$

(2) $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}-1,\ x\geqslant 0,\\ 1-\sqrt{1-x},\ x<0.\end{cases}$

点评 分段函数的反函数应分段求出每“一段”的反函数，再加以“组装”.

2. 反函数的图象及其与原函数图象的关系

例 3 若 $f(x)$ 的图象经过点 $(0,-1)$，则 $f(x+4)$ 的反函数的图象经过点________.

解析 不能误以为 $f(x+4)$ 的反函数是 $f^{-1}(x+4)$，答案为 $(-1,-4)$.

例 4 证明：函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}\ (a\neq 1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

证明 由 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ 得 $x=\frac{y-1}{ay-1}$，

$\therefore$ 原函数的反函数为 $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{ax-1}=f(x)$，

即原函数的反函数是其本身.

$\therefore y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

点评 函数 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

例 5 已知 $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$，函数 $y=g(x)$ 的图象与 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，求 $g(11)$ 的值.

解析 由 $y=\frac{2x+3}{x-1}$ 得 $x=\frac{y+3}{y-2}$，$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$，$\therefore f^{-1}(x+1)=\frac{x+4}{x-1}$.

$\because g(x)$ 与 $f^{-1}(x+1)$ 互为反函数，

由 $\frac{x+4}{x-1}=11$ 得 $x=\frac{3}{2}$，$\therefore g(11)=\frac{3}{2}$.

例 6 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant 1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 及其定义域；

(2) 若 $f^{-1}(n)<\frac{3^n+3^{-n}}{2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$，求 a 的取值范围.

解析 (1) 当 $a>1$ 时，$f^{-1}(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$ $(x\geqslant 0)$；

当 $0<a<1$ 时，$f^{-1}(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$ $(x\leqslant 0)$.

(2) $\because n\in \mathbf{N}^*$，$\therefore a>1$.

又 $\frac{a^n+a^{-n}}{2}<\frac{3^n+3^{-n}}{2}$，

$\therefore a^n-3^n+\frac{1}{a^n}-\frac{1}{3^n}<0$，

$\therefore (a^n-3^n)\left(1-\frac{1}{a^n3^n}\right)<0$，

$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^n<a^n<3^n$，$\therefore \frac{1}{3}<a<3$.

综上，$1<a<3$.

点评 复杂问题要按程序理清脉络，化归为基本问题.

考点链接

求反函数及反函数与原函数的图象关于直线 $y=x$ 对称这一性质的应用，是高考常考内容之一.

例 7 (2005 湖南)设函数 $f(x)$的图象关于点 $(1, 2)$对称，且存在反函数 $f^{-1}(x)$，$f(4)=0$，则 $f^{-1}(4)=$________.

解析 点$(4, 0)$在 $f(x)$的图象上，则它关于点 $(1, 2)$的对称点$(-2, 4)$也在 $f(x)$图象上，故点 $(4, -2)$在 $f^{-1}(x)$的图象上，$\therefore f^{-1}(4)=-2$.

第6课时 函数的定义域

考纲要求

会求已知函数解析式的函数的定义域及不给出函数解析式的函数的定义域问题，并注意实际问题中对变量的限制条件.

方法引领

1. 求已知函数的定义域

例 1 函数 $y=\frac{1}{x^2-|x|}$ 的定义域是________________.

解析 由 $x^2-|x|\neq 0$ 得 $|x|\neq 0$ 且 $|x|\neq 1$，所以定义域为 $\{x\mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x\neq \pm 1, x\neq 0\}$.

例 2 求函数 $y=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}+(3x-2)^0$ 的定义域.

解析 由 $\begin{cases}2x-x^2\geqslant 0,\\ 2x-1>0,\\ 2x-1\neq 1,\\ 3x-2\neq 0,\end{cases}$ 得 $\frac{1}{2}<x\leqslant 2$ 且 $x\neq \frac{2}{3}$，$x\neq 1$.

$\therefore$ 函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<x\leqslant 2 \text{ 且 } x\neq \frac{2}{3}, x\neq 1\right\}$.

点评 分式的分母应不为零，偶次根式的被开方数应为非负数，零的零次幂无意义，对数的真数应大于零、底数大于零且不等于 1.

例 3 求函数 $y=\lg(a^x+k\cdot 2^x)$ $(a>0, a\neq 2)$ 的定义域.

解析 由 $a^x+k\cdot 2^x>0$ 得 $\left(\frac{a}{2}\right)^x>-k$，

$\therefore$ (1) 当 $k\geqslant 0$ 时，函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

(2) 当 $k<0$ 时，1° 若 $a>2$，则函数的定义域为 $(\log_{\frac{a}{2}}(-k), +\infty)$；

2° 若 $0<a<2$，则函数的定义域为 $(-\infty, \log_{\frac{a}{2}}(-k))$.

点评 这里是以求定义域为载体，考查其他知识，并涉及分类讨论思想.

例 4 一根长为 l 的铁丝，围成一个一边长为 x 的矩形，则矩形的面积 S 和 x 之间的函数关系式为________________，定义域为________.

解析 这里矩形的两边均为正数，从而 $x>0$ 且 $\frac{l}{2}-x>0$，所以 $S=x\left(\frac{l}{2}-x\right)$，定义域为 $\left(0, \frac{l}{2}\right)$.

点评 实际问题中，要考虑变量的允许范围.

2. 综合应用问题

例 5 若函数 $f(x)=\frac{kx+5}{kx^2-4kx+3}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，则实数 k 的取值范围是____________.

解析 $\{x\mid kx^2-4kx+3\neq 0\}$ 与 $\{x\mid kx^2-4kx+3=0\}$ 在 $\mathbf{R}$ 内互为补集，故 $kx^2-4kx+3=0$ 的解集为 $\varnothing$，分 $k=0$ 和 $k\neq 0$ 讨论. 答案为 $\left[0, \frac{3}{4}\right)$.

例 6 函数 $f(x)$的定义域为$[-1, 1]$，若 $k\in (0, 1)$，则 $F(x)=f(x-k)+f(x+k)$ 的定义域是________.

解析 $f(x-k)$及$f(x+k)$必须同时有意义，$F(x)$才有意义.答案为$[k-1, 1-k]$.

例 7 已知$f(x)$的定义域为$[0, 1]$，求下列函数的定义域.

(1) $y=f(\log_{\frac{1}{2}}x)$； (2) $y=f(x)+f(x-1)$.

解析 (1) 由$0\leqslant\log_{\frac{1}{2}}x\leqslant 1$得$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，

$\therefore y=f(\log_{\frac{1}{2}}x)$的定义域为$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(2) 由$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-1\leqslant 1,\end{cases}$得$x=1$，

$\therefore y=f(x)+f(x-1)$的定义域为$\{1\}$.

点评 要认准定义域是指x的取值范围.

例 8 已知$f(x)=\log_a(x-ka)$，$g(x)=\log_a(x^2-a^2)$ $(a>0$且$a\neq 1)$，用k、a表示$f(x)$、$g(x)$的公共定义域.

解析 由$\begin{cases}x-ka>0,\\ x^2-a^2>0,\end{cases}$得$\begin{cases}x>ka,\\ x<-a\text{ 或 }x>a.\end{cases}$

(1) 当$k<-1$时，函数$f(x)$、$g(x)$的公共定义域为$(ka, -a)\cup(a, +\infty)$；

(2) 当$-1\leqslant k\leqslant 1$时，函数$f(x)$、$g(x)$的公共定义域为$(a, +\infty)$；

(3) 当$k>1$时，函数$f(x)$、$g(x)$的公共定义域为$(ka, +\infty)$.

考点链接

函数的定义域往往是解题过程中容易忽略的环节，高考对函数定义域常常是通过函数性质或函数应用来考查的，具有隐蔽性.所以在研究函数问题时，必须先考察函数定义域，确保解题万无一失.

例 9 (2003 北京春)某租赁公司拥有汽车100辆.当每辆车的月租金为3 000元时，可全部租出；当每辆车的月租金每增加50元时，未租出的车将会增加一辆.租出的车每辆每月需要维护费150元，未租出的车每辆每月需要维护费50元.

(1) 当每辆车的月租金定为3 600元时，能租出多少辆车？

(2) 当每辆车的月租金定为多少元时，租赁公司的月收益最大？最大月收益是多少？

解析 (1) 当每辆车的月租金定为3 600元时，未租出的车辆数为$\frac{3\,600-3\,000}{50}=12$，所以这时租出了88辆车.

(2) 设每辆车的月租金定为x元(显然$(x-3\,000)$应为50的整数倍).则租赁公司的月收益为

$$f(x)=\left(100-\frac{x-3\,000}{50}\right)(x-150)-\frac{x-3\,000}{50}\times 50.$$

整理，得$f(x)=-\frac{x^2}{50}+162x-21\,000$

$$=-\frac{1}{50}(x-4\,050)^2+307\,050.$$

所以，当$x=4\,050$时，$f(x)$最大，最大值为$f(4\,050)=307\,050$.即当每辆车的月租金定为4 050元时，租赁公司的月收益最大，最大月收益为307 050元.

点评 本题主要考查二次函数最值问题的求法以及根据实际问题建立函数模型的能力.

第7课时 函数的值域

知识精要

1. 掌握利用配方法、逆求法、判别式法求函数的值域.

2. 掌握利用换元法、不等式性质及函数单调性求函数的值域.

方法引领

1. 求函数的值域

例 1 写出下列函数的值域：

(1) $y=x^4+x^2+1$的值域是________；

(2) $y=\frac{3x+1}{2x-1}$的值域是________；

(3) $y=\frac{3^x}{3^x+1}$的值域是________；

(4) $y=x-\sqrt{1-x^2}$的值域是________.

解析 (1)用配方法并注意$t=x^2\geqslant 0$；(2)、(3)可逆求，注意$3^x>0$；(4)可考虑三角换元.

(1) $[1, +\infty)$； (2) $\left\{y\,\middle|\,y\neq\frac{3}{2}\right\}$； (3) $(0, 1)$； (4) $[-\sqrt{2}, 1]$.

例 2 函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(12x-27-x^2)$的值域是________.

解析 令$u=12x-27-x^2$，由u的取值范围得$\log_{\frac{1}{2}}u$的取值范围，值域为$[-2\log_2 3, +\infty)$.

例 3 函数$f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}x$的值域是$[-1, 1]$，则$f^{-1}(x)$的值域是________.

解析 这里旨在弄清反函数的值域即为原函数的定义域．由 $-1\leqslant 2\log_{\frac{1}{2}}x\leqslant 1$ 解出 x 即可．$f^{-1}(x)$ 的值域为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right]$．

例 4 求下列函数的值域：

(1) $y=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$； (2) $y=\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}$；

(3) $y=2x+4\sqrt{1-x}$；

(4) $y=|x+1|+\sqrt{(x-2)^2}$；

(5) $y=\dfrac{x^2-4x-3}{x-1}$ $(x\in[2,4])$．

解析 (1) $y=1-\dfrac{1}{x^2+x+1}$，易得值域为 $\left[-\frac{1}{3},1\right)$．

(2) 由 $\sin x=\dfrac{2-2y}{y+1}$ 得 $\left|\dfrac{2-2y}{y+1}\right|\leqslant 1$，

$\therefore \frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$，

$\therefore$ 函数的值域为 $\left[\frac{1}{3},3\right]$．

(3) 设 $t=\sqrt{1-x}$，则 $t\geqslant 0$，

$$y=-2t^2+4t+2$$
$$=-2(t-1)^2+4\leqslant 4,$$

$\therefore$ 函数的值域为 $(-\infty,4]$．

(4) $y=\begin{cases}1-2x, & x\leqslant -1,\\ 3, & -1<x<2,\\ 2x-1, & x\geqslant 2,\end{cases}$

$\therefore$ 函数的值域为 $[3,+\infty)$．

(5) $y=x-3-\dfrac{6}{x-1}$，

$\because$ 函数在 $[2,4]$ 上是增函数，

$\therefore -7\leqslant y\leqslant -1$，$\therefore$ 函数的值域为 $[-7,-1]$．

例 5 函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 的值域为 $[-1,4]$，求 a、b 的值．

解析 设 $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$，则 $yx^2+y-(ax+b)=0$，即 $yx^2-ax+(y-b)=0$．

$\because x\in\mathbf{R}$，$\therefore \Delta=a^2-4y(y-b)\geqslant 0$，即 $y^2-by-\dfrac{a^2}{4}\leqslant 0$．

$\because -1\leqslant y\leqslant 4$ 是 $y^2-by-\dfrac{a^2}{4}\leqslant 0$ 的解，$\therefore$ -1、4 是方程 $y^2-by-\dfrac{a^2}{4}=0$ 的两根，

$\therefore \begin{cases}b=-1+4=3,\\ -\dfrac{a^2}{4}=-1\times 4.\end{cases}$ $\therefore a=\pm 4$，$b=3$．

点评 解这类问题，要用逆向思维方法．

例 6 已知函数 $y=\sqrt{mx^2-6mx+m+8}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$．

(1) 求实数 m 的取值范围；

(2) 当 m 变化时，若 y 的最小值为 $f(m)$，求 $f(m)$ 的值域．

解析 (1) 由题意知 $mx^2-6mx+m+8\geqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，(i) 当 $m=0$ 时，$8\geqslant 0$ 恒成立；(ii) 当 $m\neq 0$ 时，$\Delta=36m^2-4m(m+8)=32m^2-32m\leqslant 0$，且 $m>0$，$\therefore 0<m\leqslant 1$．

综合(i)、(ii)得 $0\leqslant m\leqslant 1$．

(2) $y=\sqrt{m(x-3)^2+8-8m}$，$\therefore f(m)=\sqrt{8-8m}$ $(0\leqslant m\leqslant 1)$．

$\because$ 当 $0\leqslant m\leqslant 1$ 时，$0\leqslant 8-8m\leqslant 8$，$\therefore 0\leqslant f(m)\leqslant 2\sqrt{2}$．

$\therefore f(m)$ 的值域为 $[0,2\sqrt{2}]$．

点评 勿忘 $m=0$ 时，$mx^2-6mx+m+8\geqslant 0$ 不是二次不等式．

考点链接

函数值域问题是函数的重点内容之一，在高考中的应用问题、函数综合问题、解析几何中的变量范围问题等问题中，几乎年年有所反映．因此，要对函数值域问题引起高度重视．

例 7 (2001 全国)设计一幅宣传画，要求画面面积为 4 840 cm²，画面的宽与高的比为 λ $(\lambda<1)$，画面的上、下各留 8 cm 空白，左、右各留 5 cm 空白，怎样确定画面的高与宽的尺寸，才能使宣传画所用的纸张面积最小？

解析 设宣传画的宽为 x cm，高为 $\dfrac{4\,840}{x}$ cm，面积为 S cm²，则

$$S=(x+10)\left(\frac{4\,840}{x}+16\right)=5\,000+16x+\frac{48\,400}{x}\geqslant 5\,000+2\sqrt{16x\cdot\frac{48\,400}{x}}=6\,760(\text{cm}^2),$$

当且仅当 $16x=\dfrac{48\,400}{x}$，即 $x=55$ 时，S 取得最小值，此时 $\dfrac{4\,840}{x}=88$，满足 $\lambda<1$．

答：画面的宽为 55 cm，高为 88 cm 时，所用的纸张面积最小．

点评 利用不等式解决最值问题，要验证等号成立的条件，应用问题还要验证是否符合题设条件．

第8课时 函数的解析式

知识精要

1. 掌握求函数解析式的几种常用方法：构造结构法、变量代换法、待定系数法、解方程组法以及利用函数的奇偶性.

2. 重点与难点：函数性质的交汇应用.

方法引领

1. 迭代法

例1 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，则 $f\{f[f(x)]\}$ 的函数解析式为 （　　）

A. $\dfrac{1}{1-x}$　　B. $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

C. $-x$　　D. x

解析 通过迭代而得，选 D.

点评 函数解析式实质上就是一种输入、输出程序，这里的迭代法就是反复输入前一次的结果.

2. 变量代换法

例2 已知 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f(x+1)$ 的表达式为________.

解析 令 $x-\dfrac{1}{x}=t$，先求 $f(t)$，再得 $f(x+1)=(x+1)^2+2$.

点评 变量代换法是求函数解析式时常用的方法.

例3 已知 y 是 x 的函数，$x=2^t+2^{-t}$，$y=4^t+4^{-t}-4(2^t+2^{-t})$，其中 $t\in\mathbf{R}$，求函数 $y=f(x)$ 的解析式，并求出它的定义域和值域.

解析 $y=4^t+4^{-t}-4(2^t+2^{-t})=(2^t+2^{-t})^2-4(2^t+2^{-t})-2=x^2-4x-2$.

又 $\because x=2^t+2^{-t}\geqslant 2$，$\therefore y=(x-2)^2-6\geqslant -6$，

$\therefore$ 函数的定义域为 $[2,+\infty)$，值域为 $[-6,+\infty)$.

点评 这里实质上也是运用变量代换法，将 2^t+2^{-t} 代换成 x，要注意换元后"新元"的范围.

3. 待定系数法

例4 已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f[f(x)]=4x+1$，求 $f(x)$ 的解析式.

解析 设 $f(x)=ax+b$，则 $f[f(x)]=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b=4x+1$.

$\therefore \begin{cases}a^2=4,\\ab+b=1,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a=2,\\b=\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\b=-1.\end{cases}$

$\therefore f(x)=2x+\dfrac{1}{3}$ 或 $f(x)=-2x-1$.

点评 在已知函数模型的前提下，往往可使用待定系数法.

4. 函数方程法

例5 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$，求 $f(x)$ 的表达式.

解析 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$，①

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x}$，②

②×2－①得 $3f(x)=\dfrac{6}{x}-3x$，

$\therefore f(x)=\dfrac{2}{x}-x(x\neq 0)$.

点评 这里视 $f(x)$、$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 为两个"元"，创设"二元"函数方程求解.

例6 设函数 $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)\lg x+1$，则 $f(10)$ 的值为 （　　）

A. 1　　B. -1

C. 10　　D. $\dfrac{1}{10}$

解析 本题属于函数方程问题，可以用 $\dfrac{1}{x}$ 替换题中 x，得 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)\cdot\lg\dfrac{1}{x}+1$，由两个函数方程组成的方程组解出 $f(x)$. 亦可以将 $x=10$，$x=\dfrac{1}{10}$ 代入直接求解. 选 A.

点评 要灵活处理带有"个性"的问题.

考点链接

求函数解析式问题，是函数一章中的一个重要环节. 作为函数的主体，求解析式既可单独地在选择、填空题中出现，又可在函数综合题中成为一个重要步骤. 求函数解析式时，最容易忽略的是函数的定义域，因此在求得函数解析式后，要习惯性地查验函数的定义域.

例7 （2004 湖北理）已知 $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，