21 世纪高等职业学校 2 年制 /3 年制教材（工科）

下 册

应用高等数学

YINGYONG GAODENG SHUXUE

姜云义 孙维夫 主编

东南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学(下册)/姜云义,孙维夫 主编. —南京:东南大学出版社,2005.12
ISBN 7－5641－0053－2

Ⅰ.应... Ⅱ.①姜... ②孙... Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 070405 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)
出版人:宋增民
江苏省新华书店经销 溧阳市晨明印刷有限公司印刷
开本:700mm×1000mm 1/16 印张:31 字数:620 千字
2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—4500 册 定价(上、下册):46.00 元

(凡因印装质量问题,可直接向发行部调换。电话:025－83795801)

目 录

第 8 章　向量与空间解析几何

在自然科学和工程技术中，我们常会遇到一种既有大小又有方向的量即向量，还经常遇到空间几何图形. 解析几何是用代数的方法来研究和解决几何图形的一门数学学科. 本章我们将介绍向量的概念、运算及空间解析几何的有关内容.

8.1　空间直角坐标系

先简要介绍一下二阶行列式与三阶行列式的定义与解法，详细情况将在第 12 章讲解.

称记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为**二阶行列式**，它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

其中 $a_{ij}, b_i (i=1,2; j=1,2)$ 称为二阶行列式的**元素**，下标 i 表示元素所在的行，j 表示元素所在的列. 按 4 个元素构成的正方形，横排称为**行**，纵排称为**列**.

如 $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 3\times(-4)-5\times(-2)=-2$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a^2 & a-1 \end{vmatrix} = (a+1)(a-1)-1\cdot a^2 = -1$$

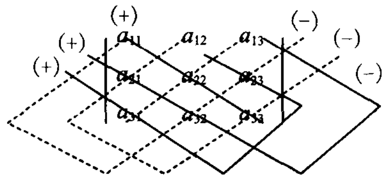
同理，称记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为**三阶行列式**，它表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

其中 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素. 例如,a_{32} 是第三行第二列的元素.

三阶行列式含有三行、三列共 9 个元素,它表示六项(每项为三个元素的乘积)的代数和,即三阶行列式的展开式,可以用下面的对角线展开法则求出:



其中主对角线(从左上到右下)及平行于主对角线的线(即实线)连接的三个元素的乘积前冠以“+”号,副对角线(从左下到右上)及其平行于副对角线的线(即虚线)连接的三个元素的乘积前均冠以“-”号.

$$
\text{如}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 6+2\cdot 5\cdot(-1)+3\cdot 4\cdot 0-3\cdot 0\cdot(-1)-2\cdot 4\cdot 6-1\cdot 5\cdot 0
$$

$$
=0-10+0-0-48+0
$$

$$
=-58
$$

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (x+x^2+x^3)-(x^2+1+x^4)=x+x^3-x^4-1
$$

1. 空间点的直角坐标

平面上确定一个点需要两个条件,如(x,y),而空间上确定一个点则需要三个条件. 为此,我们建立空间直角坐标系.

在空间取定一点 O,过 O 作三条互相垂直的直线 Ox,Oy,Oz,并按右手系规定 Ox,Oy,Oz 的正向,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴正向. 再规定单位长度,我们建立的空间直角坐标系如图 8-1 所示.

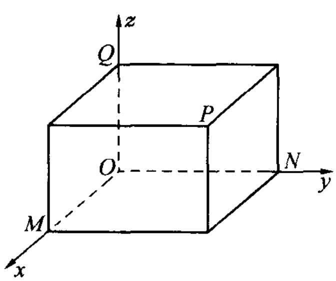


图 8-1

点 O 称为原点,三条直线分别称为 x 轴、y 轴、z 轴. 由两条坐标轴决定的平面称为坐标平面,有 xOy 平面、yOz 平面、zOx 平面. 这三个平面把整个空间分为八个部分,每一部分称为一个卦限,含有 x 轴、y 轴、z 轴正半轴的那个卦限叫做第 1 卦限,然后在 xOy 平面上方按逆时针方向确定第 2~第 4 卦限,在 xOy 平面下方,第 1 卦限下的为第 5

卦限,再按逆时针方向确定第 6～第 8 卦限.

在空间直角坐标系中,可以定义空间点的坐标.

设 P 为空间一点,过 P 点作垂直于三个坐标轴的平面,分别与 x 轴、y 轴、z 轴交于 M,N,Q 三点,设 $OM=x,ON=y,OQ=z$,则 P 点惟一地确定了一个三元有序数组 (x,y,z);反之,任给一个有序数组 (x,y,z),则在 x,y,z,三轴上分别取点 M,N,Q,使 $OM=x,ON=y,OQ=z$,然后过 M,N,Q 分别作 x,y,z,轴的垂面,这三个平面相交于惟一点 P,称 P 点为由 (x,y,z) 惟一确定的空间点,于是空间点 P 与一个三元有序数组 (x,y,z) 建立了一一对应关系,(x,y,z) 称为点 P 的空间直角坐标,简称坐标,记为 $P(x,y,z)$.

特别地,原点坐标为 $O(0,0,0)$;x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$,y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$,z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$.

2.　空间两点间的距离公式

由图 8 - 1 易知,点 P 到原点的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

仿此,我们可以求得空间两点间的距离公式.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点,过 P_1,P_2 各作三轴的垂面,这些垂面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体(如图 8 - 2 所示).三条棱长分别为 $|x_2-x_1|,|y_2-y_1|,|z_2-z_1|$.

由勾股定理得

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 1　试判定以 $P_1(4,3,1),P_2(7,1,2),P_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形的几何特性.

解　$|P_1P_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$

$|P_2P_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$

$|P_3P_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6.$

显然

$$|P_2P_3|=|P_3P_1|\neq|P_1P_2|,$$

故 $\triangle P_1P_2P_3$ 为等腰三角形.

3.　中点公式

与平面解析几何一样,空间解析几何也有中点公式.如图 8 - 2,设 P_1P_2 的中点为 $P(x,y,z)$ 则

$$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2},\\ z=\dfrac{z_1+z_2}{2}.\end{cases}$$

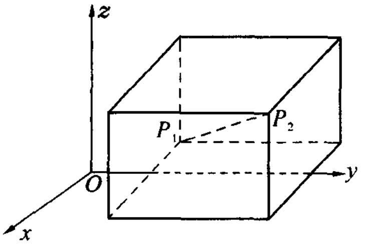


图 8 - 2

例 2 求 $P_1(3,2,1)$ 与 $P_2(1,-2,7)$ 的中点.

解 由公式(8-3)知

$$\begin{cases} x = \dfrac{3+1}{2} = 2, \\ y = \dfrac{2-2}{2} = 0, \\ z = \dfrac{1+7}{2} = 4. \end{cases}$$

故中点为(2,0,4).

习题 8-1

1. 在空间直角坐标系中作出下列各点并指出所在的卦限：
   $A(4,2,9)$，$B(5,9,-4)$，$C(6,-1,-5)$.
2. 写出点 $P(1,2,3)$关于下列对称的点的坐标：
   (1) 与原点对称；
   (2) 与三个坐标平面分别对称；
   (3) 与三个坐标轴分别对称.
3. 求点 $P(3,-4,5)$到原点及各坐标轴间的距离，到坐标平面的距离.
4. 已知 $A(2,3,4)$ 和 $B(6,2,z)$，$|AB|=5$，又 $|AC|=10$，C 在 AB 延长线上. 求 z 值和点 C 的坐标.
5. 求 z 轴上与 $A(-4,2,5)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

8.2 向量的概念

8.2.1 向量的概念及其表示法

通常我们遇到的量有两种：一种是数量，也称标量，这种量仅有大小，如时间、距离等就是标量；另一种量是向量，它不仅有大小而且有方向，如力、位移等都是向量. 因此，我们有如下定义.

定义 既有大小又有方向的量称为向量.

向量的代数表示法有两种：一种用黑体字母如 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{a}$ 等表示；另一种用向量的始点 A 与终点 B 来表示，写成 $\overrightarrow{AB}$，几何上 $\boldsymbol{a}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 是一条有向线段(见图 8-3).

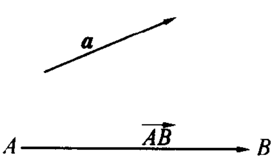


图 8-3

向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度称为向量的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$，模为 1 的向量称

为单位向量，记为 a_0. 模为 0 的向量称为零向量记为 $\mathbf{0}$，规定零向量的方向是任意的.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，应注意到它们始点不一定重合.

与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等但方向相反的向量叫 $\boldsymbol{a}$ 的反向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

8.2.2　向量在坐标轴上的投影

在物理等实际问题中，往往需要把向量分解为几个不同方向的分量以便于解题和分析，因此，我们有必要讨论向量在直角坐标轴上的投影.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$ 将其平移使始点在原点 O，则 $\boldsymbol{a}$ 完全由其终点 P 来确定；反过来任一空间点 P，连结 OP，则可惟一确定一个向量 $\overrightarrow{OP}$，简记为 $\boldsymbol{a}$. 因此，空间的点与始点在原点的向量有一一对应的关系.

在空间任建一个直角坐标，并在 x 轴，y 轴，z 轴上各取单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，称为基本单位向量或坐标向量，任取一个向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$（如图 8－4 所示）.

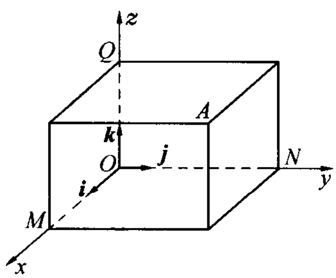


图 8－4

我们定义：$\boldsymbol{a}$ 为其三轴上投影的矢量之和，即

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ},$$

或

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{1}$$

显然

$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

(1)式也可简记为

$$\boldsymbol{a}=(x,y,z).$$

其中 $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 分别称为 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的分量；(x,y,z) 称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，显然零向量 $\mathbf{0}=\{0,0,0\}$. (x,y,z) 称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标形式.

利用向量的分量与坐标形式，可以定义向量的加减法及数乘向量.

8.2.3　向量的线性运算

1.　向量的加减法

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}=\{x_2,y_2,z_2\}$，定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=\{x_1\pm x_2\}\boldsymbol{i}+\{y_1\pm y_2\}\boldsymbol{j}+\{z_1\pm z_2\}\boldsymbol{k}\\&=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}.\end{aligned} \tag{2}$$

2.　数乘向量

设 λ 为实数，$\boldsymbol{a}$ 为一个非零向量，定义

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x\boldsymbol{i}+\lambda y\boldsymbol{j}+\lambda z\boldsymbol{k}=\{\lambda x,\lambda y,\lambda z\} \tag{3}$$

为数 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的数乘向量.

显然，由(3)式可知：$(a)\lambda\boldsymbol{a}$ 向量仍为一个向量. 当 $\lambda>0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$. $(b)\lambda\boldsymbol{a}$ 向量的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

利用向量的分量式或坐标式易证下列运算法则:

(1) 加法交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 加法结合律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a};\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

(4) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(5) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(6) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加减法及数乘向量运算通称为向量的线性运算. 其运算结果仍为向量. 也称为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合.

运用投影法可得: 始点为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, 终点为 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的空间向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2}&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.\end{aligned}$$

由公式(2)知上式可改写为

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}.$$

由两点间距离公式知, $\overrightarrow{P_1P_2}$的模为

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

8.2.4　向量的表示法

用向量的坐标表示向量的方向是我们要讨论的另一个问题, 首先, 我们定义方向角: 非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$ 分别与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角, 规定 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$. 那么, 当方向角 α,β,γ 确定后, 向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向也就随之确定了(见图 8-5).

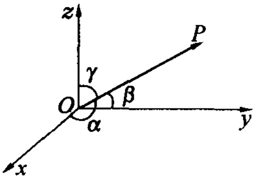


图 8-5

由于用坐标计算方向角较复杂, 所以用方向角的余弦表示方向. 我们把向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角的余弦 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 由三角函数的定义可知:

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\[2ex]\cos\beta=\dfrac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\[2ex]\cos\gamma=\dfrac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\end{cases}$$

显然

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

例 1　设 $P_1(1,-1,2)$,$P_2(4,1,3)$,求$\overrightarrow{P_1P_2}$,$|\overrightarrow{P_1P_2}|$和$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向余弦.

解
$$\overrightarrow{P_1P_2}=\{4-1,1+1,3-2\}=\{3,2,1\},$$
故
$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14},$$
从而
$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}},\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

例 2　已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

解
$$\begin{aligned}2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}&=2(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})-3(\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\\&=-\boldsymbol{i}-19\boldsymbol{j}+18\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

习题 8-2

1. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-1)$,$\boldsymbol{b}=(2,2,3)$,$\boldsymbol{c}=(4,-1,-3)$,求下列向量:
   (1) $2\boldsymbol{a}$;　(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$;　(3) $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$;　(4) $\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{b}$.
2. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴夹角分别为 $\alpha=\frac{\pi}{3}$,$\beta=\frac{2\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{a}$ 与 z 轴的夹角 γ.
3. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,求 $|\boldsymbol{a}|$ 及 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.
4. 设点 $P_1(0,-1,2)$、点 $P_2(-1,1,0)$,求$\overrightarrow{P_1P_2}$及其方向余弦.
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$,始点为$(1,-1,5)$,求向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点坐标.
6. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的始点为$(2,0,-1)$,$|\boldsymbol{a}|=3$,方向余弦中 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$,$\cos\beta=\frac{1}{2}$,求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式及其终点.

8.3　向量的数量积与向量积

向量与向量的乘积有两种,分别为数量积和向量积,称为向量的非线性运算.它们都是从具体的问题中抽象出来的.

8.3.1　向量的数量积

由物理学的做功问题可知,一个物体在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线位移为 $\boldsymbol{s}$,若 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 θ,则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功应为
$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$
现把以上运算归结为数学模型.

定义 1　对于任意两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,其夹角为 $\theta(0\leqslant\theta<\pi)$,数 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta. \tag{1}$$

其中,向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角可记作$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$或$(\boldsymbol{b}\hat{,}\boldsymbol{a})$,即$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\theta$.

若记 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向的投影为 $\boldsymbol{a}_b$,则(1)式也可写成

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}_b||\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}_a|.$$

由定义可将功的公式变为

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

作为特例, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$.

通常,把 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 写作 $\boldsymbol{a}^2$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2.$$

定理 两个向量 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

证 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ,先证必要性:

若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\theta=\frac{\pi}{2}$,那么

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

再证充分性:若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$,则

(1) 若 $\cos\theta=0$,则 $\theta=\frac{\pi}{2}$,从而 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

(2) 若 $\cos\theta\neq0$,则 $|\boldsymbol{a}|=0$ 或 $|\boldsymbol{b}|=0$,即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 至少有一个为零向量.故可认为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

由定理可知,单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 之间的数量积为

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0;$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

容易证明数量积有以下运算律:

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律:$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

下面我们推导向量的数量积的坐标表示式:

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$,那么

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}),$$

化简得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$.

把上式及模的公式代入(1)式,得到

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\cos\theta,$$

所以

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}}. \tag{2}$$

这就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦公式.

由上式可得非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件为

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

例 1 若 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{2},-1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,0,1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-1)+\sqrt{2}\times 0+(-1)\times 1=-2,$$

而 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1+2+1}=2$；$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$，

再由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故 $\theta=\frac{3}{4}\pi$（也可用(2)式直接求解).

例 2 试证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

证 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

例 3 设有一力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求力 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 方向上的分力 $\boldsymbol{F}_a$.

解 由数量积定义可知，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{F}_a|,$$

所以
$$|\boldsymbol{F}_a|=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{F}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1-2+2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

再求 $\boldsymbol{a}$ 方向的单位向量 $\boldsymbol{a}_0$：

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),$$

所以
$$\boldsymbol{F}_a=|\boldsymbol{F}_a|\,\boldsymbol{a}_0=\frac{1}{3}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}).$$

8.3.2 向量的向量积

我们讨论力矩问题：力 F 作用在支点 O 的物体于 P 点（如图8-6)，产生的力矩是一个向量，其方向按右手法则（四指弯曲为转动方向，即由 $\overrightarrow{OP}$ 到 F 的方向，则大拇指的方向即为力矩方向).

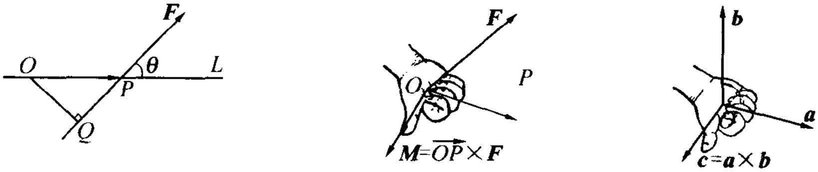


图 8-6

力矩 $\boldsymbol{M}$ 的模为 $|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$.

由此引出向量积的概念.

定义 2 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则满足下列条件的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

(1) 模:$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$;

(2) 方向:垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,并按右手法则确定方向.

有了向量积,力矩可简便地由一个表达式给出,即 $\vec{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

例 4 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}$,求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 如图 8-7,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都在 xOy 平面上,四指由 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$,则右手拇指只能向下且垂直于 xOy 平面,故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向为 $-\boldsymbol{k}$;而 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{b}|=2,\theta=\frac{\pi}{4}$,故

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}\times2\times\sin\frac{\pi}{4}=2,$$

从而
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{k},$$

即
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\times2\boldsymbol{i}=-2\boldsymbol{k}.$$

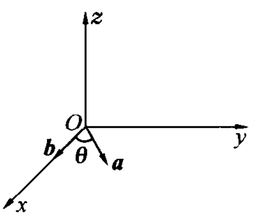


图 8-7

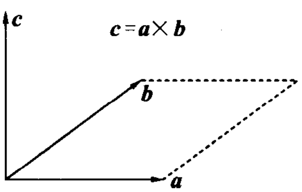


图 8-8

两向量的向量积的几何意义为:$\vec{a}\times\vec{b}$ 的模 $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 是以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积;$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向按右手螺旋法则确定(如图 8-8 所示).

由定义可知,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,例如:

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

再由定义可知,$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$,

而
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

可以证明向量积满足下列运算律:

(1) 反交换律:$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律:$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,

$$(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

(3) 数乘结合律:$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

下面,我们来推导向量积的坐标公式.

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1b_1(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_1b_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_1b_3(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\
&\quad +a_2b_1(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_2b_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_2b_3(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\
&\quad +a_3b_1(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_3b_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_3b_3(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\
&= (a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

这就是向量积的坐标计算公式，而此公式恰好可以写成行列式的形式：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\
&= (a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

由上式易知 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件为

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3} \text{ 或 } \boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}.$$

下面用向量积的坐标计算公式解例 4.

$$(\vec{i}+\vec{j})\times 2\boldsymbol{i}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-2\boldsymbol{k}.$$

如果利用向量积的运算律还可简化运算：

$$(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\times 2\boldsymbol{i}=2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-2\boldsymbol{k}.$$

例 5 求以 $A(1,2,3),B(3,4,5),C(2,4,7)$ 为顶点的$\triangle ABC$ 的面积.

解 设 $\overrightarrow{AB}=\{2,2,2\},\overrightarrow{AC}=\{1,2,4\}$，所以

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\{4,-6,2\},$$

从而 $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

例 6 从原点开始沿 x 轴和 y 轴正向的角平分线上放有一长是 4 m 的轴棒，末端 P 点受力 $\boldsymbol{F}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ (kg)作用，求力矩的投影表达式和模

解 $$\overrightarrow{OP}=4\left(\cos\frac{\pi}{4}\boldsymbol{i}+\sin\frac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right)=2\sqrt{2}\boldsymbol{i}+2\sqrt{2}\boldsymbol{j}$$

$$
\begin{aligned}
M=\overrightarrow{OP}\times F &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}\\
&= -2\sqrt{2}\boldsymbol{i}+2\sqrt{2}\boldsymbol{j}+10\sqrt{2}\boldsymbol{k},
\end{aligned}
$$

所以 $$|M| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{6}(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}).$$

例 7 证明三点 $P_1(3,4,6)$，$P_2(-1,-2,-4)$ 和 $P_3(1,1,1)$ 共线.

证 因为 $\overrightarrow{P_2P_1} = (4,6,10)$，$\overrightarrow{P_3P_1} = (2,3,5)$，显然

$$\overrightarrow{P_2P_1} = 2\,\overrightarrow{P_3P_1},$$

故 $\overrightarrow{P_2P_1} \,/\!/\, \overrightarrow{P_3P_1}$，而 P_1 为公共点，从而 P_1，P_2，P_3 三点共线.

例 8 已知力 $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ 作用于点 $A(3,1,-1)$ 处，求此力关于杠杆上另一点 $B(1,-2,3)$ 的力矩.

解 因为 $$\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},$$

所以从支点 B 到作用点 A 的向量 $$\overrightarrow{BA} = (3-1)\boldsymbol{i} + [1-(-2)]\boldsymbol{j} + (-1-3)\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}.$$

所以，力 $\boldsymbol{F}$ 关于点 B 的力矩

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \overrightarrow{BA} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 5\boldsymbol{i} - 14\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{k}.$$

习题 8 - 3

1. 计算下列各题，其中 $|\boldsymbol{a}| = 3$，$|\boldsymbol{b}| = 4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2}{3}\pi$：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$； (2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$； (3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$； (4) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

2. 设 $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$，试计算：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.
3. 设 $\boldsymbol{a} = (2,5,1)$，$\boldsymbol{b} = (3,-2,4)$，判断是否 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$？
4. 设三角形三顶点 $A(1,-1,2)$，$B(3,3,1)$ 和 $C(3,1,3)$，求 $\triangle ABC$ 的面积 S.
5. 求与 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ 和 y 轴都垂直的长度为 3 的向量.
6. 证明三点 $P_1(5,3,-2)$，$P_2(4,1,-1)$ 和 $P_3(2,-3,1)$ 共线.

8.4 空间平面与直线

8.4.1 坐标平面、平行于坐标平面的平面方程

首先讨论 xOy 平面上任取一点，则其坐标为 $(x,y,0)$. 其特点为无论 x，y 为何值，z 值都为 0，因此，xOy 平面的方程为

$$z = 0.$$

同理，zOx 平面的方程为

$$y = 0.$$

yOz 平面的方程为

$$x = 0.$$

而平行于 yOz，zOx，xOy 平面的方程分别为

$$x = a, y = b, z = c$$

其中，a，b，c 常数.

8.4.2　平面的点法式、一般式和截距式方程

对于一般平面方程的建立，讨论起来就不如以上那么简单直观. 从立体几何中，确定一个平面的条件有很多，但在解析几何中，我们的思想是利用向量的知识把平面经过一个定点且与定向量垂直作为基本条件这样许多其他条件都可转化为此.

1.　平面的点法式方程

平面是空间中最简单的一种曲面，我们知道，经过一点且与定向量垂直的平面是惟一确定的. 与一个平面垂直的向量称为该平面的法向量，每一个平面的法向量有无穷多个.

设平面 π 经过一定点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 且法向量为 $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$，

我们来推导 π 的方程，为此，如图 8 - 9 所示，在平面 π 上任取一点 $P(x, y, z)$，则

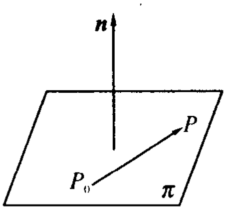


图 8 - 9

$P(x, y, z)$ 在平面 π 上的充要条件是

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \boldsymbol{n},$$

则有

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

而

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k},$$

所以有

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

此方程称为平面 π 的点法式方程.

例 1　已知一平面经过点(1，−1，0)且法向量为{2，1，3}，求此平面方程.

解　由已知条件代入点法式方程即可得此平面方程为

$$2(x - 1) + (y + 1) + 3(z - 0) = 0.$$

即

$$2x + y + 3z - 1 = 0.$$

例 2　已知平面经过 $P_1(0, 1, -1)$，$P_2(1, 0, 3)$ 和 $P_3(-1, 2, 0)$，求此平面