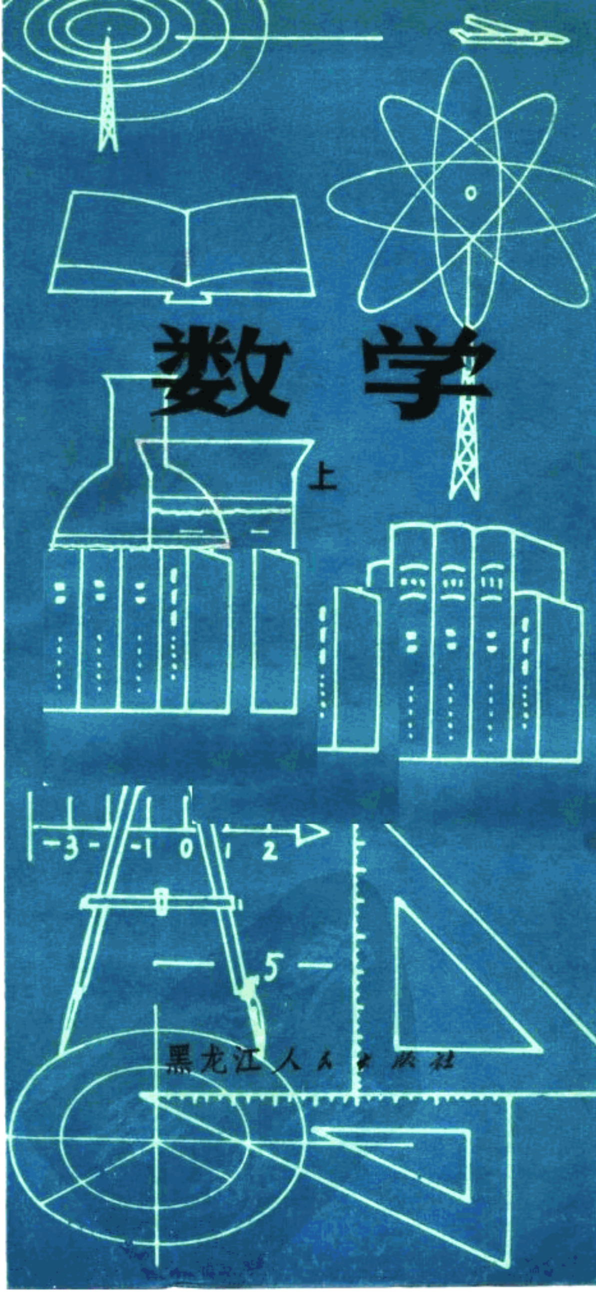
初中升学参考书

# 数学

上



黑龙江人民出版社

# 说　　明

本书主要供初中学生考高中复习、参考之用。

本书共分十八章，主要特点是：1．着重基础知识和基本技能训练；2．从本届初三学生过去使用几种版本课本和他们的知识质量实际出发，注意补充全国统编课本的必要内容；3．选用了较为典型的例题182个，有的题，指出分析思考方法，有的题给出了多种解法，注意总结解题规律；4．习题共601个，分为$A$、$B$两类，$A$类为基本题，$B$类为较灵活和稍有难度的题，并附有习题答案，便于自学。

参加编写的有王万祥、赵风石、孙铁、傅于天等同志。

望批评指正。

哈尔滨市教师进修学院教学研究室

一九八〇年二月

# 目　　录

# 第一章 实 数

## 一、实数的概念

### （一）自然数

1．自然数的概念：自然数就是指1，2，3，……这些数所组成的整体，它有第一个数1，但没有最后一个数，因而自然数的个数是无限的。以后，我们常把自然数这个整体称为自然数集合。

在自然数集合内，加、乘法运算永远可行（即加、乘运算的结果仍为自然数。）但是，减法运算不能完全施行（小数减大数或相等的两数相减，结果就不是自然数了。）

2．整除：对于两个自然数$a$、$b$，如果存在一个自然数$c$，使$b\times c=a$，这时有$a\div b=c$，我们说$a$能被$b$整除，或者说，$b$整除$a$，$a$叫做$b$和$c$的倍数，反过来，$b$和$c$都叫做$a$的因数（约数）。

3．和与差的整除性：

（1）如果两个数都能被同一个数整除，那么它们的和与差也能被这个数整除。

（2）如果两个数中有一数能被某数整除，另一个数不能被某数整除，那么它们的和与差都不能被这个数整除。

（3）如果两个数都不能被同一个数整除，那么它们的和与差能否被这个数整除，就不一定了。一个自然数不是偶数就是奇数。两个连续的自然数中，必为一奇一偶或一偶一奇。

4．质数与合数：除1以外，只能被1和它本数整除的自然数叫做质数（或素数），质数的个数是无限的。不但能被1和本身整除，还能被其他自然数整除，这种自然数叫做合数。1既不是质数，也不是合数。

5．自然数的质因数分解：一个自然数的因数是质数时，叫做这个数的质因数。把一个自然数分解成若干个质因数的连乘积，叫做自然数的质因数分解。

自然数的质因数，如2、3、5等可根据数的整除性的特征来确定，其他的质因数只能根据试除来确定。一个自然数的质因数分解，一般用简除法（短除法）来完成。

6．几个数的公约数和最大公约数：一个数同时是几个数的约数时，这个数叫这几个数的公约数。几个数的公约数的个数是有限的，其中最大的一个叫这几个数的最大公约数。

7．几个数的公倍数和最小公倍数：一个数同时是几个数的倍数时，这个数就叫这几个数的公倍数。几个数的公倍数是无限的，其中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数。

8．互质数：如果两个自然数的最大公约数是1，这两个数就叫互质数。因为互质数除1以外再没其他公约数，所以它们的最小公倍数就是这两个数的积。

## （二）整数

1．整数的概念：正整数（自然数）、零、负整数统称为整数。在整数集合中，加、减、乘法运算永远可行，但除法运算不一定能施行（商可能不是整数）。

2．数“0”：数0是个特殊的数，它是具有非常确定的内容的。0与其他数在一起可比较大小和运算。

3．偶数与奇数：一切能被2整除的整数叫做偶数（一般用$aK$表示，$K$为自然数），不能被2整除的整数叫奇数（一般表示为$2K-1$，$K$为自然数）。

## （三）有理数：

1．有理数的概念：整数和分数（正分数、负分数）统称为有理数．$P$、$q$是整数，且$q\neq 0$，任何一个有理数都可表示为$\frac{P}{q}$。

2．在有理数集合内，加、减、乘、除(除数不得为0)四种运算永远可行。

3．有理数的运算法则：

| 运算＼法则＼原数 | 同号 | | 异号 | |
|---|---|---|---|---|
| | 符号 | 绝对值 | 符号 | 绝对值 |
| 加法 | 保持原号 | 相加 | 同绝对值较大者 | 相减 |
| 减法 | 减去一个数等于加上它的相反数 | | | |
| 乘法 | + | 相乘 | － | 相乘 |
| 除法 | + | 相除 | － | 相除 |

说明：

（1）任何数加零或减零还等于原数。

（2）零不可作除数。

（3）零乘以或除以任何数（不为零）都得零．任何数乘以或除以1还得原数。

## （四）无理数

1．无理数的概念：无限不循环的小数叫做无理数。

2．任何一个无理数，都可以用任意精确度的有理数来近似地表示。在实际运算中，如果遇到无理数，一般可以将它截成一定精确度的近似数后再进行近似计算。

（五）实数

1．实数的概念：有理数和无理数统称为实数。任何一个实数都可用有限的小数和无限小数表示。上面所说的数，可以归结为如下的实数的系统表：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
      - 可化为
        - 有限小数
        - 无限循环小数
  - 无理数（即无限不循环小数）
    - 正无理数
    - 负无理数

2．数轴：规定了原点、正方向和长度单位的直线叫做数轴。实数集合和数轴上点的集合是一一对应的。亦即：任意一个实数都有数轴上确定的一个点与它对应；反过来，数轴上的任意一个点，也都有确定的一个实数与它对应。（想一想，有理数集合和数轴上点的集合是否一一对应？）

3．实数的绝对值：正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。因此实数$a$的绝对值是：

$$|a| = \begin{cases} a & （当a>0时） \\ 0 & （当a=0时） \\ -a & （当a<0时） \end{cases}$$

由实数$a$的绝对值可知，不论$a$为什么实数，它的绝对值都不负，即$|a|\geqslant 0$。$|a|$的几何意义，是数$a$在数轴上的对应点到原点的距离。

4．算术根：在实数范围内，一个正数的正的$n$次方根叫做算术根．记做$\sqrt[n]{a}$．（$n$为大于1的自然数，$a\geqslant 0$．）当$n=2$时，$\sqrt{a}$表示$a$的算术平方根（$a>0$）．根据算术平方根的定义，可得$\sqrt{a^2}=|a|$．零的算术根是零。

5．实数大小的比较：

（1）按实数在数轴上所对应的点的排列顺序来比较大小，在数轴上的点越往右，它表示的数就越大；也就是任何正数都大于0，任何负数都小于0，任何正数都大于任何负数．正实数中，绝对值大的数就大；负实数中，绝对值大的数却小。

（2）用求差法比较两个实数的大小，即假使$a-b>0$，则$a>b$；假使$a-b=0$，则$a=b$；假使$a-b<0$则$a<b$。

6．实数的运算法则和运算律。

（1）实数的运算法则（略）。

（2）实数的运算律：

①交换律：$a+b=b+a$（加法交换律）

$a\cdot b=b\cdot a$（乘法交换律）

②结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$（加法结合律）

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$（乘法结合律）

③乘法对于加法的分配律：

$$a \cdot (b+c) = ab + ac$$

运算时，如果运算的式子里没有括号，就要先算乘方、开方，再算乘、除，最后算加、减；如果有括号，就先算括号里的数。去括号时，如果括号前为正号，括号内数的符号不变；如果括号前为负号则把括号内数的符号都改变和原来相反的符号。

## 二、例　　题

例1．三个连续整数的平方和是50，求这三个整数。

解：设这三个连续整数是$K-1$，$K$，$K+1$（$K$为整数）则由题意得：$(K-1)^2+K^2+(K+1)^2=50$

整理得：　$K^2=16$，

$K=\pm 4$。

∴这三个整数是3、4、5或－5、－4、－3。

注：（1）二整数连续，就是这两个整数相邻且相差为$|1|$；

（2）注意整数的概念是包括正整数、零、负整数的。

例2．有一个三位数，它的十位数字比个位数字大2，百位数字比个位数字小2，又这个三位数等于三个数字之和的17倍。求这个三位数。

解：设这个三位数的个位数字是$x$，则十位数字是$x+2$，百位数字是$x-2$，

由题意得：$100(x-2)+10(x+2)+x$

$$=17[(x-2)+(x+2)+x]$$

整理得：$60x=180$

$$x=3.$$

∴ 这个三位数是153。

注：（1）解这一类问题时，应把多位数同各个数位上的数字两者区分清楚；

（2）任一个十进整数都可表示为：

$a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\times10+a_0$。

例3 计算 $\dfrac{3\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}\times0.5\times\frac{3}{17}-0.125+\frac{17}{3}}{1.25+5\frac{2}{3}}$

解：原式 $=\dfrac{\left(\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)\times\frac{3}{17}}{\frac{4}{5}\times\frac{3}{17}}$

$$=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}{\frac{5}{4}}$$

$$=\frac{6-1}{10}=\frac{1}{2}.$$

注：（1）有理数运算的问题中，如果既有分数，又有小数，常将小数化为分数，较为方便。最好能熟记下列换算：$0.5=\frac{1}{2}$，$0.25=\frac{1}{4}$，$0.125=\frac{1}{8}$，$0.75=\frac{3}{4}$；

（2）几个有理数相加减，如果它们有公因数，则把公因数提出来，可减少运算的手续；

（3）如果分子分母都是分数，则同乘以一个适当整数，也可简化运算。

例4 计算：$-2^2+(-2)^2-(-1)^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$

$$+\frac{1}{6}-|-1|$$

解：原式$=-4+4-1-1=-2$。

注：要注意符号的运算和运算的顺序。

例5 解方程：$|x-4|=5$

解：当$x-4>0$，即$x>4$时，$|x-4|=x-4$

原方程可化为：$x-4=5$

$\therefore\quad x=9$。

当$x-4<0$，即$x<4$时，$|x-4|=-(x-4)$

原方根可化为：$-(x-4)=5$

$\therefore\quad x=-1$

当$x-4=0$，即$x=4$时，$|x-4|=0$；这与原方程矛盾，无解。

∴原方程的解为：$x=9$或$x=-1$。

注：（1）为了去掉绝对值的符号，必须依照绝对值的定义，对绝对值符号内的数进行讨论；

（2）如解："求使$|x-3|+|x-8|=5$成立的实数$x$"时，就要去掉几个绝对值的符号，这时常采用在数轴上分段讨论的办法，讨论时不要漏掉转折点代表的数。

**例6** 设$a=\sqrt{5}$，$b$是$a$的小数部分。

求： $a-\dfrac{1}{b}$的值。

解：∵ $a=\sqrt{5}$ 是一个无限不循环的小数（无理数），可是$\sqrt{5}$的整数部分是2，∴ 它的小部分$b=\sqrt{5}-2$，因此，

$$\text{原式}=\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}-(\sqrt{5}+2)=-2,$$

$$\therefore\ a-\frac{1}{b}=-2.$$

注：（1）注意无理数、无理数的整数部分，无理数的小数部分三者的关系：如这种不尽的平方根数和无理数为正，则这个无理数等于它的整数部分加小数部分。

（2）注意分母的有理化。

例7 证明$\sqrt{2}$不是有理数。

证明：用反证法。

假定$\sqrt{2}$是有理数，那么$\sqrt{2}$就可以表示成$\dfrac{P}{q}$，其中$P$，$q$都是自然数，且$P$、$q$互质（即$P$与$q$的最大公约数是1）。由此，可以推得：$\left(\dfrac{P}{q}\right)^2=2$，即$\dfrac{P^2}{q^2}=2$ $\therefore P^2=2q^2$

即$P^2$是偶数，从而$P$也是偶数。这样$P$、$q$除1以外就还有公约数2了。这与$P$、$q$互质相矛盾。因此，$\sqrt{2}$不是有理数。

注：反证法是一种间接证法。它根据，对一事物的判断

要么是对的；要么是不对的，二者必有且只有一种是成立的。用反证法证明问题时，首先设出和求证的结论相反的假定，然后从这个假定出发导出不合理的结果。因此，和求证的结论相反的假定是不正确的，从而断定原来的结论是正确的。

## 练　习　*A*

1．能被2、3、4、5、9、11整除的数各有什么特征？以下各数能被上述哪些数整除？

57312；459140；4537665。

2．将48、693、120分解质因数。

3．将五位数3427△里的△的位置上应填上哪些数字，就能使这个数分别成为：

（1）2的倍数；（2）3的倍数；

（3）5的倍数；（4）11的倍数。

4．有没有最小的自然数？有没有绝对值最小的实数？如果有，把它写出来？

5．如果$|m|<3$，求整数$m$的值；并把结果表示在数轴上。

6．写出绝对值不大于1的所有整数。再写出绝对值不小于3而又不大于5的所有整数。

7．当$a$是什么数时，下列各式成立：

（1）$|a|=|-a|$；（2）$|a|=-a$；

（3）$|a|=a$；（4）$a=-a$。

（5）$-a$是负数。

8．求下列各式中的$x$：

（1）$|x|=\frac{2}{3}$；（2）$|x|=0$；

（3）$|x|=\sqrt{10}$；（4）$|x|=\pi$；

（5）$|x-1|=5$；

9．写出下列各数的相反数；相反数的倒数：

$3$、$\frac{1}{2}$、$-5$、$-\frac{3}{4}$.

10．证明：$\sqrt{3}$是无理数。

11．计算：

（1）$-2^2+(-2)^3-(-3)^2-(-3)^3+(-4839)\times 0$；

（2）$4\times(-3)+18\times(-2)^3-18\div 3+(-60)\div(-5)-(-2)\times 3+4(-6)^2$；

（3）$1\frac{2}{3}+\left(-1\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{4}{3}\right)-\left(-0.4\right)+2\frac{1}{2}$；

（4）$1\frac{1}{2}\times\left[3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-1\right]-\frac{1}{3}\left[\left(-2\right)^2-\left(-4.5+3\right)\right]^2$；

(5) $\frac{2}{5}+2\frac{4}{9}+\left[\left(7\frac{5}{12}-5\frac{3}{4}\right)\right.$

$\left.+22\frac{1}{2}+10\times\frac{5}{18}\right]-\frac{4}{5}$;

(6) $(-1)^5\times\left\{\left[4\frac{2}{3}+(-4)+\left(-1\frac{1}{4}\right)\right.\right.$

$\left.\left.\times(-0.4)\right]+\left(-\frac{1}{3}\right)-2\right\}$;

(7) $|-5|-|-7^2|+\left|\frac{1}{3}\right|$

$-|5+(-6)|-\sqrt{(-3)^2}$;

(8) $-(-2.5+75-22.5+15)\times\left(-\frac{1}{5}\right)$

$+(-428)\times12\times0-(-5)\times(-8)$

$+(-10)$;

(9) $-tg45°-|-\cos60°-1|+\sqrt{(-1)^2}$

$-3\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$;

(10) $\dfrac{\left(9\frac{1}{4}-7\frac{2}{5}\right)\times2\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}}{\left(3\frac{1}{8}+4\frac{3}{20}-1\frac{5}{48}-5\frac{2}{5}\right)+3\frac{1}{12}}$.

## 练 习 B

1. 计算：

（1） $\sqrt{(x-1)^2}$；（2）$|2x-3|$；

（3） $|1-a|+|2a-1|$；（4）$\frac{|x|}{x}$。

2. 在实数集合内，下列各式中的x是什么数值时，才有意义？

（1） $\sqrt{1-a}+\sqrt{3a-1}$；

（2） $\sqrt{2a+1}+\sqrt[3]{1-2a}$。

3. 求用32、36、48去除时，都余15的最小正整数。

4. （1）在自然数集合内，解方程：

① $x-4=5$；② $3x+4=5$。

（2）在有理数集合内，解方程：

① $5x+4=0$；② $x^2-2=0$。

（3）在实数集合内，解方程：

① $x^2+x-1=0$；② $x^2-x+1=0$。

5. 用几何方法在数轴上作出表示$\sqrt{3}$的点，并用代数方法证明$\sqrt{3}$不是有理数。

6. 已知$|a|=2$，$|b|=5$，求$a+b$的值。

7. 若$x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，