

普通高中课程标准实验教科书

新课程同步导学

数学

(一年级上册)

济宁市教学研究室 编

SHUXUE



山东教育出版社

普通高中课程标准实验教科书

新课程同步导学

数 学

(一年级上册)

济宁市教学研究室 编

山东教育出版 社

2004 年·济南

普通高中课程标准实验教科书

新课程同步导学

数 学

(一年级上册)

济宁市教学研究室 编

出 版 者:山东教育出版社

(济南市纬一路 321 号 邮编:250001)

电 话:(0531)2092663 传真:(0531)2092661

网 址:<http://www.sjs.com.cn>

发 行 者:山东教育出版社

印 刷:济宁市火炬书刊印务中心

版 次:2004 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

规 格:889mm × 1194mm 16 开本

印 张:10 印张

字 数:291 千字

书 号:ISBN 7-5328-4520-6

定 价:9.50 元

(如印装质量有问题,请与印刷厂联系调换)

目 录

数学①

第一章 集合与函数概念	(1)	2.1 指数函数	(27)
1.1 集合	(1)	2.1.1 指数与指数幂的运算	(27)
1.1.1 集合的含义与表示	(1)	2.1.2 指数函数及其性质	(29)
集合的含义与表示(一)	(1)	2.2 对数函数	(31)
集合的含义与表示(二)	(2)	2.2.1 对数与对数运算	(31)
1.1.2 集合间的基本关系	(4)	2.2.2 对数函数及其性质	(33)
1.1.3 集合的基本运算	(6)	2.3 幂函数	(36)
集合的基本运算(一)	(6)	总 结	(38)
集合的基本运算(二)	(8)	基本初等函数(I)测试题	(40)
1.2 函数及其表示	(10)	第三章 函数的应用	(42)
1.2.1 函数的概念	(10)	3.1 函数与方程	(42)
1.2.2 函数的表示法	(11)	3.1.1 方程的根与函数的零点	(42)
单元测试题	(14)	3.1.2 用二分法求方程的近似解	(43)
1.3 函数的基本性质	(15)	3.2 函数模型及其应用	(44)
1.3.1 单调性与最大(小)值(一)	(15)	3.2.1 几类不同增长的函数模型	(44)
单调性与最大(小)值(二)	(17)	3.2.2 函数模型的应用实例	(46)
1.3.2 奇偶性	(19)	函数模型的应用实例(一)	(46)
1.4(补) 二次函数的性质与图象	(20)	函数模型的应用实例(二)	(47)
总 结	(22)	总 结	(50)
集合与函数概念测试题	(24)	函数的应用测试题	(52)
第二章 基本初等函数(I)	(27)	期中测试题	(55)

数学②

第一章 空间几何体	(58)	1.2 空间几何体的三视图和直观图	(61)
1.1 空间几何体的结构	(58)	1.2.1 空间几何体的三视图	(61)
1.1.1 柱、锥、台、球的结构特征	(58)	1.2.2 空间几何体的直观图	(62)
1.1.2 简单组合体的结构特征	(60)	1.3 空间几何体的表面积与体积	(64)

1.3.1 柱体、锥体、台体的表面积与体积…	第三章 直线与方程 …… (97)
…………… (64)	3.1 直线的倾斜角与斜率 …… (97)
1.3.2 球的体积和表面积 …… (66)	3.1.1 倾斜角与斜率 …… (97)
总 结 …… (67)	3.1.2 两条直线平行与垂直的判定 ……
第二章 点、直线、平面之间的位置关系 …… (71)	…………… (98)
2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系 ……	3.2 直线的方程 …… (99)
…………… (71)	直线的方程(一) …… (99)
2.1.1 平面 …… (71)	直线的方程(二) …… (101)
2.1.2 空间中直线与直线之间的位置关系	3.3 直线的交点坐标与距离公式 …… (103)
…………… (73)	3.3.1 两条直线的交点坐标 …… (103)
空间中直线与直线之间的位置关系	3.3.2 两点间的距离 …… (105)
(一) …… (73)	3.3.3(4) 点到直线的距离、两条平行线间
空间中直线与直线之间的位置关系	的距离 …… (106)
(二) …… (75)	总 结 …… (108)
2.1.3(4) 空间中直线与平面、平面与平面	直线与方程测试题 …… (110)
之间的位置关系 …… (76)	第四章 圆与方程 …… (112)
2.2 直线、平面平行的判定及其性质 …… (78)	4.1 圆的方程 …… (112)
2.2.1 直线与平面平行的判定 …… (78)	4.1.1(2) 圆的标准方程、圆的一般方程 ……
2.2.2 平面与平面平行的判定 …… (80)	…………… (112)
2.2.3 直线与平面平行的性质 …… (82)	4.2 直线、圆的位置关系 …… (114)
2.2.4 平面与平面平行的性质 …… (83)	4.2.1(2) 直线与圆的位置关系、圆与圆的
2.3 直线、平面垂直的判定及其性质 …… (85)	位置关系 …… (114)
2.3.1 直线与平面垂直的判定 …… (85)	4.3 空间直角坐标系 …… (116)
2.3.2 平面与平面垂直的判定 …… (87)	4.3.1(2) 空间直角坐标系、空间两点间的
2.3.3 直线与平面垂直的性质 …… (88)	距离公式 …… (116)
2.3.4 平面与平面垂直的性质 …… (90)	圆与方程测试题 …… (117)
总 结 …… (93)	解析几何测试题 …… (118)
立体几何测试题 …… (95)	参考答案 …… (120)

数 学 ①

第一章 集合与函数概念

1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示

集合的含义与表示(一)

【自学导引】

学习目标:理解集合的含义及集合中元素的特性,掌握元素与集合间的关系,记住数学中一些常用的数集及记法.

1.把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫做_____,简称_____.

2.如果 a 是集合 A 的元素,就说_____,记作_____.

如果 a 不是集合 A 中的元素,就说_____,记作_____.

3.集合中元素的特征为_____.

4.只要构成两个集合的_____,就称这两个集合相等.

5.常见数集的表示符号:自然数集_____,正整数集_____,整数集_____,有理数集_____,实数集_____.

【例题选讲】

【例1】 考察下列每组对象能否构成一个集合:

- (1)美丽的小鸟;
- (2)不超过20的非负数;
- (3)充分接近零的正数;
- (4)直角坐标系中,第一象限内的点;
- (5)3, x , x^2 三个实数.

解:(1)“美丽的小鸟”无明确标准,对于某只小鸟是否是“美丽的”无法给出明确的判断,即元素不

具备确定性,因此(1)不能构成集合;类似地,(3)也不能构成集合.

(2)任给一个实数 x ,可以明确地判断它是否为“不超过20的非负数”,即“ $0 \leq x \leq 20$ ”与“ $x < 0$ 或 $x > 20$ ”,两者必居其一,且仅居其一,故(2)能构成集合.类似地,(4)也能构成集合.

(5)虽然三个实数已被指定,但这三个实数也不一定能构成一个集合,因为3, x , x^2 之间有可能相等,因而不一定满足元素的互异性.

如果添加条件
$$\begin{cases} x \neq 3, \\ x^2 \neq 3, \text{ 即 } x \neq \pm\sqrt{3} \text{ 且} \\ x^2 \neq x, \end{cases}$$

$x \neq 0$ 且 $x \neq 1$,那么三个实数3, x , x^2 就可以构成一个集合.

启示:集合的元素必须具备确定性、互异性;反过来,一组对象若不具备这二性,则这组对象也就不能构成集合.因此,在分析处理集合问题的过程中,要时刻注意集合元素的两个特征对集合元素的限制.

【例2】 已知集合 A 中含有三个元素 $a-2$, 12 , $2a^2+5a$, 又 $-3 \in A$, 求 a 的值.

解: $\because -3 \in A, \therefore a-2 = -3$ 或 $2a^2+5a = -3$,

$\therefore a = -1$ 或 $a = -\frac{3}{2}$, 但 $a = -1$ 时, $a-2 =$

-3 , $2a^2+5a = -3$ 与集合中元素的互异性矛盾,

$\therefore a = -\frac{3}{2}$.

启示:元素与集合的关系只有“属于($\in$)”和“不属于($\notin$)”两种.若已知一元素属于集合,那么此元素必是集合中已知元素之一,并且在集合中只能出现一次(互异性).

【课堂练习】

1. 下列各条件中,能构成集合的是().

- A. 世界著名的科学家
- B. 在数轴上与原点非常近的点
- C. 所有的等腰三角形
- D. 全班成绩好的同学

2. 已知集合 S 中的三个元素 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长,那么 $\triangle ABC$ 一定不是().

- A. 锐角三角形
- B. 直角三角形
- C. 钝角三角形
- D. 等腰三角形

3. 若 $a \in \mathbf{R}$,但 $a \notin \mathbf{Q}$,则 a 可以是().

- A. 3.14
- B. -5
- C. $\frac{3}{7}$
- D. $\sqrt{7}$

【训练题组】

一、选择题

1. 给出下面三个关系: $\sqrt{3} \in \mathbf{R}, 0.5 \notin \mathbf{Q}, 2 \in \mathbf{N}^+$, 其中正确的个数是().

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

2. 下列命题中,正确的个数是().

(1) 集合 $\mathbf{N}$ 中最小的正数是 1;

(2) $-a \notin \mathbf{N}$, 则 $a \in \mathbf{N}$;

(3) $x^2 - 6x + 9 = 0$ 的解集中含有 2 个元素,

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

3. 由 $2, -2, (2, -2), (-2, 2)$ 构成的集合 A 中元素的个数是().

- A. 2
- B. 4
- C. 5
- D. 6

4. 设集合 A 是由小于 $\sqrt{27}$ 的实数组成,且 $a = 2\sqrt{6}$,则下列结论错误的是().

- A. $a \in A$
- B. $-a \in A$
- C. $a^2 \in A$
- D. $a + 1 \notin A$

二、填空题

5. 方程 $(x+1)(x-\frac{2}{3})(x^2-1)=0$ 的解集中含有元素的个数是_____.

6. 用符号“ $\in$ ”或“ $\notin$ ”填空:

(1) 0 _____ $\mathbf{Q}$, 0 _____ $\mathbf{N}$, 0 _____ $\mathbf{N}^+$,
 0 _____ $\mathbf{Z}$, 0 _____ $\mathbf{R}$.

(2) -2 _____ $\mathbf{N}^+$, -2 _____ $\mathbf{Z}$,
 -2 _____ $\mathbf{R}$, -2 _____ $\mathbf{Q}$.

(3) $\sqrt{3}$ _____ $\mathbf{N}^+$, $\sqrt{3}$ _____ $\mathbf{R}$, $\sqrt{3}$ _____ $\mathbf{Q}$,

$\sqrt{3}$ _____ $\mathbf{Z}$.

7. 集合 A 含有三个元素 $2, 4, 6$, 若 $a \in A$, 则 $6-a \in A$, 那么 a 的值是_____.

三、解答题

8. 若集合 A 中含有两个元素 $k^2 - k$ 和 $2k$, 求实数 k 所满足的条件.

9. 已知集合 M 由 $1, x, x^2 + x$ 三个元素组成, 且 $2 \in M$, 求实数 x 的值.

10. 设集合 A 中的元素为实数, 且满足① $1 \notin A$;

② 若 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.

(1) 若 $2 \in A$, 试求集合 A 中的所有元素;

(2) 若 $a \in A$, 试求集合 A 中的所有元素;

(3) 集合 A 能否为单元素集? 若能, 求出该元素; 若不能, 请说明理由.

【课时点评】

1. 集合是一些元素即某些对象集在一起形成的, “对象”的含义具有“广泛性”, 它可以是数、式、点、图形、物等. 元素与集合之间有且只有“ $\in$ ”和“ $\notin$ ”两种关系.

2. 集合的元素具有确定性、互异性和无序性三大特征:

“确定性”是指对于一个给定的集合, 任何一个对象或者是集合中的一个元素, 或者不是它的元素, 两者必居其一.

“互异性”是指集合中的任何两个元素是互不相同的, 两个相同的对象在同一集合中时, 只能算作这个集合中的一个元素.

“无序性”是指集合中的每一个元素都是平等的, 无先后次序之分. 此特征在下一课时学习集合的表示法时涉及到.

集合的含义与表示(二)

【自学导引】

学习目标: 掌握集合的两种表示法, 并能正确表示一些简单的集合.

1. 把集合的元素_____, 并用大括号 $\{ \}$ 括起来表示集合的方法叫做列举法.

2. 用集合所含元素的_____来表示集合的方法称为描述法. 此法的具体形式是 $\{x | P(x)\}$, 其中 x 是元素的一般形式, $P(x)$ 是集合中元素 x 所具有

的_____.

【例题选讲】

【例1】用适当的方法表示下列集合:

(1) 方程 $(x+1)(x-\frac{2}{3})^2(x^2-2)(x^2+1)=0$

的有理根的集合 A ;

(2) 坐标平面内,不在第一、三象限的点的集合;

(3) 方程组 $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 3x-y=7 \end{cases}$ 的解集;

(4) 100 以内被 3 除余 1 的正整数;

(5) 到两坐标轴距离相等的点.

解: (1) 由 $(x+1)(x-\frac{2}{3})^2(x^2-2)(x^2+1)=0$,

得 $x=-1 \in \mathbf{Q}, x=\frac{2}{3} \in \mathbf{Q}, x=\pm\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

$\therefore A = \{-1, \frac{2}{3}\}$.

(2) 坐标平面内在第一、三象限的点的特点是纵横坐标同号,所以不在第一、三象限的点的集合可表示为 $\{(x,y) | xy \leq 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$.

(3) $\{(x,y) | \begin{cases} 2x-3y=0, \\ 3x-y=7 \end{cases}\} = \{(3,2)\}$;

(4) $\{x | x=3k+1, k \in \mathbf{N}, x < 100\}$;

(5) $\{(x,y) | |y|=|x|, x \in \mathbf{R}\}$.

启示:用列举法表示集合时,必须注意如下几点:(1)元素与元素之间必须用“,”隔开;(2)集合的元素必须是明确的;(3)不必考虑元素出现的先后顺序;(4)集合的元素不能重复;(5)集合的元素可以表示任何事物;(6)对含有较多元素的集合,如果构成该集合的元素具有明显的规律,可用列举法表示,但是必须把元素间的规律显示清楚后,才能用省略号表示,如 $\mathbf{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$.

使用描述法时,应注意六点:①写清楚集合中元素的代号;②说明该集合中元素的性质;③不能出现未被说明的字母;④多层描述时,应当准确使用“且”、“或”;⑤所有描述的内容都要写在大括号内;⑥用于描述的语句力求简明、确切.

【例2】已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | ax^2 - 3x + 2 = 0\}$,

(1) 若 A 是单元素集,求 a 的值及集合 A ;

(2) 求集合 $P = \{a \in \mathbf{R} | a \text{ 使得 } A \text{ 至少含有一个元素}\}$.

解:因为集合 A 是方程 $ax^2 - 3x + 2 = 0$ 的解集,则(1),(2)是求分别使方程有一实根或有两相等实

根、有实根的 a 的取值范围.

(1) 当 $a=0$ 时,由(1)可知, $A = \{\frac{2}{3}\}$,符合题意;当 $a \neq 0$ 时,要使方程有两个相等的实根,则

$\Delta = 9 - 8a = 0$, 即 $a = \frac{9}{8}$, 此时, $A = \{\frac{4}{3}\}$,

综上所述:当 $a=0$ 时, $A = \{\frac{2}{3}\}$;

当 $a = \frac{9}{8}$ 时, $A = \{\frac{4}{3}\}$.

(2) 由上知,当 $a=0$ 时, $A = \{\frac{2}{3}\}$ 含有一个元素,符合题意

当 $a \neq 0$ 时,要方程有实根,则

$\Delta = 9 - 8a \geq 0$, 即 $a \leq \frac{9}{8}$,

综上所述, $P = \{a \in \mathbf{R} | a \text{ 使得 } A \text{ 至少有一个元素} = \{a | a \leq \frac{9}{8}\}$.

启示:解决集合问题的关键在于把抽象问题具体化、形象化,也就是把用描述法表示的集合用列举法来表示,或用通俗的语言说明,即把集合语言转化为普通的数学语言.

【课堂练习】

1. 下列表示方法中正确的是().

A. $3 \in \{y | y = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}\}$

B. $0 \in \{(x,y) | x^2 + y^2 = 0, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$

C. $-3 \in \{x | x^2 - 9 = 0, x \in \mathbf{N}\}$

D. $2 \in \{x | x = \sqrt{n}, n \in \mathbf{N}\}$

2. 用描述法表示下列集合:

(1) 方程组 $\begin{cases} 2x-3y=14, \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ 的解集为_____

(2) y 轴上所有的点组成的集合为_____

(3) $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 请区分下列两组表示的集合有何不同.

(1) ① $\{1,2\}$; ② $\{2,1\}$; ③ $\{(1,2)\}$;

④ $\{(2,1)\}$.

(2) ① $\{y | y = x^2 - 2x + 3\}$;

② $\{x | y = x^2 - 2x + 3\}$;

③ $\{(x,y) | y = x^2 - 2x + 3\}$;

④ $\{y = x^2 - 2x + 3\}$.

【训练题组】

一、选择题

1. 下列命题中正确的是().

A. $\{0\}$ 中无元素

B. $\{x \in \mathbf{Z} \mid 6x^2 - x - 1 = 0\}$ 中无元素

C. $\{x \in \mathbf{Q} \mid \frac{6}{x} \in \mathbf{N}\}$ 中只有有限个元素

D. $M = \{m \in \mathbf{R} \mid m \leq \sqrt{10}\}$, $a = \sqrt{2} + \sqrt{10}$, 则 $a \in M$.

2. 集合 $M = \{(x, y) \mid xy \leq 0, x, y \in \mathbf{R}\}$ 的意义是().

A. 第二象限内的点集

B. 第四象限内的点集

C. 第二、四象限内的点集

D. 不在第一、三象限内的点集

3. 有以下三种说法: ① $M = \{(1, 2)\}$ 与 $N = \{(2, 1)\}$ 表示同一个集合; ② $M = \{1, 2\}$ 与 $N = \{2, 1\}$ 表示同一个集合; ③ $M = \{y \mid y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ 与 $N = \{t \mid t = (x+1)^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ 表示同一个集合. 其中正确的有().

A. 3 个

B. 2 个

C. 1 个

D. 0 个

4. 设集合 $A = \{x \mid x = (-1)^n, n \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{(x, y) \mid 3x + 2y = 16, x \in \mathbf{N}^*, y \in \mathbf{N}^*\}$, $D = \{x \in \mathbf{Q} \mid 1 < x < 2\}$, $E = \{x \mid x \text{ 是直角三角形}\}$, 其中有限集的个数是().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

二、填空题

5. 已知集合 $A = \{0, 1, -1, 2, -2, 3\}$, $B = \{y \mid y = x^2 - 1, x \in A\}$, 则 $B =$ _____.

6. 用 $\in$ 或 $\notin$ 填空:

(1) 若 $A = \{x \mid x^2 = x\}$, 则 -1 _____ A ;

(2) 若 $B = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$, 则 3 _____ B ;

(3) 若 $C = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$, 则 8 _____ C ;

(4) 若 $D = \{x \in \mathbf{Z} \mid -2 < x < 3\}$, 则 1.5 _____ D .

7. 下面有 5 组集合:

(1) $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{3, 2, 1\}$;

(2) $\{0\}$ 与 $\{1, -1\}$;

(3) $\{y \mid y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}$ 与 $\{u \mid u = t^2 - 1, t \in \mathbf{R}\}$;

(4) $\{x \mid x = (-1)^n, n \in \mathbf{N}^*\}$ 与 $\{x \mid x = (-1)^{n+1}, n \in \mathbf{N}\}$;

4

(5) $\{(x, y) \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$ 与 $\{y \mid y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$,

其中表示同一集合的组的序号是_____.

三、解答题

8. 用列举法表示集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{9}{9-x} \in \mathbf{N}\}$ 和

$B = \{\frac{9}{9-x} \in \mathbf{N} \mid x \in \mathbf{N}\}$.

9. 设集合 $\{x \mid x^2 + ax + b = 0\} = \{2\}$, 求实数 a , b 的值.

10. 已知 $A = \{(x, y) \mid y = 2x - 1\}$, $B = \{(x, y) \mid y = x + 3\}$, $a \in A, a \in B$, 求 a .

【课时点评】

列举法是从集合外延的角度给出集合, 它已将集合所包含的元素罗列出来, 所以集合中元素的意义十分明显. 而描述法是从集合内涵的角度给出集合, 它给出了集合中的代表元素及其所具有的共同性质. 代表元素是决定组成集合的元素的标志, 代表元素的性质不同, 即使限定条件一样, 所表示的集合也不同. 同时也要注意, 虽然代表元素所用的字母不同, 或特征条件的形式不一样, 但它们也可能表示同一个集合.

1.1.2 集合间的基本关系

【自学导引】

学习目标: 理解子集、真子集、空集的概念, 会利用包含关系判断集合的相等, 掌握属于与包含关系的区别.

1. 如果集合 A 中的_____元素都是集合 B

中的元素,就说这两个集合有_____关系,称集合 A 为集合 B 的子集,记作_____,读作_____.

2.若_____且_____,则集合 A 与集合 B 相等,记作_____.

3.若集合 $A \subseteq B$,但存在元素 x _____ B 且 x _____ A ,称集合 A 是集合 B 的真子集,记作_____.

4._____集合叫空集,记为_____.空集是任何集合的_____.

5.(1) A _____ A ; (2)若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$,则 A _____ C .

【例题选讲】

【例1】 已知集合 $A = \{a, b\}$, 集合 $B = \{x | x \in A\}$, 集合 $C = \{x | x \subseteq A\}$, 指出集合 B 和 C 的关系.

解:由 $A = \{a, b\}$, 知 $B = \{x | x \in A\} = \{a, b\}$,
 $C = \{x | x \subseteq A\} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

故集合 B 作为集合 C 的一个元素出现,因而 B 和 C 的关系是 $B \in C$.

启示:(1)元素与集合的关系:用“ $\in$ ”和“ $\notin$ ”连接.元素 a 与集合 A 的关系 $a \in A$ 或 $a \notin A$ 二者仅取其一.

(2)集合与集合的关系:用 $\subseteq, \supseteq, \subsetneq, \supsetneq, =$ 来连接.如果在已知 $A \subseteq B$ 的条件下,还可断定 $A \neq B$, 则要把两集合的关系写为 $A \subsetneq B$.

【例2】 设集合 $A = \{1, a, b\}$, $B = \{a, a^2, ab\}$, 且 $A = B$, 求 $a^{2004} + b^{2003}$.

解法一: 由 $A = B$, 有

$$\begin{cases} a^2 = 1, & \text{或} & a^2 = b, \\ ab = b & \text{或} & ab = 1, \end{cases}$$

解方程组,得 $\begin{cases} a = -1, \\ b = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 1, \\ b = 1 \end{cases}$ 或 $a = 1, b$ 为任意实数.

由集合的互异性,得 $a \neq 1$,
 $\therefore a = -1, b = 0$, 故 $a^{2004} + b^{2003} = 1$.

解法二: 由 $A = B$, 可得

$$\begin{cases} 1 \cdot a \cdot b = a \cdot a^2 \cdot ab, \\ 1 + a + b = a + a^2 + ab, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} ab(a^3 - 1) = 0, & \text{①} \\ (a - 1)(a + b + 1) = 0, & \text{②} \end{cases}$$

因为集合中的元素互异,所以 $a \neq 0, a \neq 1$.

解方程组,得 $a = -1, b = 0$, 故 $a^{2004} + b^{2003} = 1$.

启示:在解决与集合相等有关问题时,要注意集合的元素是否满足三性:确定性、互异性、无序性.

【课堂练习】

1.下列四个命题中,正确的是()

A.若 $A = \{2, 5\}, B = \{(x, y) | \sqrt{x-2} + (y-5)^2 = 0\}$, 则 $A = B$

B.若 $A = \{x | x^2 - x + 1 = 0\}$, 则 $\{0\} \subseteq A$

C.若 $A = \{2, 3\}, B = \{x | x \in A\}$, 则 $A \subsetneq B$

D.若 $A = \{2, 3\}, B = \{x | x \subseteq A\}$, 则 $A \in B$

2.已知 $M = \{x | x > 1\}, N = \{x | x > a\}$, 且

$M \subsetneq N$, 则().

A. $a \leq 1$

B. $a < 1$

C. $a \geq 1$

D. $a > 1$

3.已知集合 $A = \{x, y\}, B = \{2, 2y\}$, 若 $A = B$, 则 $x + y =$ _____.

【训练题组】

一、选择题

1.设 $A = \{x | x \geq 2\}, a = \sqrt{5}$, 则下列结论中正确的是().

A. $\{a\} \subsetneq A$

B. $a \subsetneq A$

C. $\{a\} \in A$

D. $a \notin A$

2.集合 $\{2, 5, 8\}$ 的非空真子集共有().

A. 5 个

B. 6 个

C. 7 个

D. 8 个

3.已知 $A = \{(x, y) | x > 0 \text{ 且 } y > 0\}, B = \{(x, y) | x + y > 0 \text{ 且 } xy > 0\}$, 则下列关系正确的是().

A. $A \subsetneq B$

B. $A \supsetneq B$

C. $A = B$

D. 以上都不对

4.设 $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3\}$, 下列关系中正确的个数有().

① $\{0\} \in A$; ② $-2 \notin C$; ③ $\{0\} \subsetneq C$; ④ $A \supsetneq \emptyset$; ⑤ $B \supsetneq A$; ⑥ $B \subsetneq \{x \in C | 0 < x < 4\}$; ⑦ $0 \in \emptyset$; ⑧ $\emptyset \in A$; ⑨ $\emptyset \subsetneq \{0\}$ 且 $\emptyset \subsetneq C$; ⑩ $\{a, b\} \neq \{b, a\}$.

A. 3 个

B. 4 个

C. 6 个

D. 9 个

二、填空题

5.用适当的符号表示以下各组对象之间的关系:

(1) $0 \underline{\hspace{1cm}} \{0\}$; (2) $0 \underline{\hspace{1cm}} \emptyset$; (3) $\emptyset \underline{\hspace{1cm}} \{0\}$; (4) $\{0, 1\} \underline{\hspace{1cm}} \{(0, 1)\}$.

6. 若 $M = \{x | x > 1\}$, $N = \{x | x \geq a\}$, 且 $N \subseteq M$, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设集合 $A = \{1, 2\}$, 集合 $B = \{x | x \subseteq A\}$, 则集合 A 与集合 B 的关系为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

8. 设集合 $A = \{1, 3, a\}$, $B = \{1, a^2 - a + 1\}$, $A \supseteq B$, 求 a 的值.

9. 已知集合 $A = \{a, b, c\}$, 求

(1) 集合 A 的子集的个数;

(2) 集合 A 的真子集的个数;

(3) 集合 A 的非空真子集的个数.

10. 设集合 $A = \{x | x^2 + 4x = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0, a \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值.

【课时点评】

如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 则称集合 A 包含于集合 B , 或集合 B 包含集合 A , 记作 $A \subseteq B$ 或 $(B \supseteq A)$.

反之, 若已知 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$), 那么可以知道 A 中每一个元素都是 B 中的元素, 无一例外, 在应用时须注意. 另外, 空集是任何集合的子集; 空集是任何非空集合的真子集, 空集的这些“特殊意义”常出现在相关问题之中, 解题时也必须高度注意.

1.1.3 集合的基本运算

集合的基本运算(一)

【自学导引】

学习目标: 理解并集与交集的概念, 掌握并集与交集的区别及联系, 并能熟练地求两个简单集合的并集、交集.

1. 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的 $\underline{\hspace{2cm}}$, 记作 $\underline{\hspace{2cm}}$, 即 $A \cup B = \{x | \underline{\hspace{2cm}}\}$.

2. 由属于集合 A $\underline{\hspace{2cm}}$ 属于集合 B 的所有元素组成的集合, 称 A 与 B 的交集, 记作 $\underline{\hspace{2cm}}$, 即 $A \cap B = \{x | \underline{\hspace{2cm}}\}$.

3. $A \cup B = B$ $\underline{\hspace{1cm}}$ A , $A \cap B = B$ $\underline{\hspace{1cm}}$ A , $A \cup A = \underline{\hspace{1cm}}$, $A \cap A = \underline{\hspace{1cm}}$, $A \cup \emptyset = \underline{\hspace{1cm}}$, $A \cap \emptyset = \underline{\hspace{1cm}}$.

4. 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cup B = \underline{\hspace{1cm}}$, $A \cap B = \underline{\hspace{1cm}}$.

【例题选讲】

【例1】 已知集合 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$, $B = \{a-5, 1-a, 9\}$, 分别求适合下列条件的 a 值.

(1) $9 \in A \cap B$;

(2) $\{9\} = A \cap B$.

解: $9 \in A \cap B$ 与 $\{9\} = A \cap B$ 意义不同, $9 \in A \cap B$ 说明 9 是 A 与 B 的一个公共元素, 但 A 与 B 中允许有其他公共元素.

$\{9\} = A \cap B$, 说明 A 与 B 的公共元素有且只有一个 9.

(1) $\because 9 \in A \cap B, \therefore 9 \in A$ 且 $9 \in B$.

$\therefore 2a-1=9$ 或 $a^2=9, \therefore a=5$ 或 $a=\pm 3$.

检验知: $a=5$ 或 $a=-3$ 符合题意.

(2) $\because \{9\} = A \cap B, \therefore 9 \in A \cap B$,

$\therefore a=5$ 或 $a=-3$.

检验知: $a=-3$ 符合题意.

(1) 中检验的是集合 A 、 B 中的元素是否是互异的, $a=3$ 时, B 中元素 $a-5$ 与 $1-a$ 相同, 所以 $a=3$ 应舍去; (2) 中进一步检验 A 与 B 中有没有不是 9 的公共元素, $a=5$ 时, $A = \{-4, 9, 25\}$, $B = \{0, -4, 9\}$, 这时 $A \cap B = \{-4, 9\} \neq \{9\}$, 所以 $a=5$ 应舍去.

启示: 集合 A 与 B 的交集是由 A 与 B 的所有公共元素所组成的集合, 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

因此, 在求 $A \cap B$ 时, 只要搞清两集合的公共元

素是什么或公共元素具有怎样的性质即可.反之,若已知 $a \in A \cap B$, 那么就可以断定 a 是集合 A, B 的公共元素;若 $A \cap B = \emptyset$, 说明集合 A 与 B 没有公共元素.

[例2] 求满足 $A \cup B = \{a, b\}$ 的集合 A, B .

解:本题需对 A 的元素个数进行分类讨论.

(1) $A = \emptyset$, 则 $B = \{a, b\}$.

(2) $A = \{a\}$, 则 $B = \{b\}$ 或 $B = \{a, b\}$;

$A = \{b\}$, 则 $B = \{a\}$ 或 $B = \{a, b\}$.

(3) $A = \{a, b\}$, 则 $B = \{a\}$ 或 $B = \{b\}$ 或 $B = \{a, b\}$ 或 $B = \emptyset$.

启示:集合 A 与集合 B 的并集是由 A 与 B 的所有元素所组成的集合,即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 因此,在求 $A \cup B$ 时,只要把 A 和 B 两集合中的元素并在一起即可.但要注意在两集合的并集中,原两个集合的公共元素只能出现一次,不准重复.若已知 $x \in A \cup B$, 那么它包含三种情形.

① $x \in A$ 且 $x \notin B$; ② $x \in B$ 且 $x \notin A$; ③ $x \in A$ 且 $x \in B$, 这在解决与并集有关问题时应引起注意.

【课堂练习】

1. 已知 $M = \{0, -1, -2\}$, $N = \{0, -3, -4\}$, 则 $(M \cap N) \cup N =$ _____.

2. 已知集合 $A = \{x | x < 3\}$, $B = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$, 那么 $A \cup B =$ ().

A. $\{x - 1 \leq x < 3\}$ B. $\{x | x \leq 4\}$

C. $\{x | x \geq -1\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq -4\}$

3. 已知集合 $A \cap B = \{a, b\}$, $A \cup B = \{a, b, c\}$, 则符合条件的不同集合 A, B 有 ().

A. 2 对 B. 3 对 C. 4 对 D. 5 对

【训练题组】

一、选择题

1. 设 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$, $B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$, $C = \{4, 7, 9\}$, 则 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ 等于 ().

A. $\{1, 4\}$ B. $\{1, 7\}$

C. $\{4, 7\}$ D. $\{1, 4, 7\}$

2. 已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 4\}$, 那么集合 $M \cap N$ 为 ().

A. $x = 3, y = -1$ B. $(3, -1)$

C. $\{3, -1\}$ D. $\{(3, -1)\}$

3. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B \subsetneq A$, $1 \in A \cap B$, $4 \notin A \cap B$, 则满足上述条件的集合 B 的个数是 ().

A. 7 B. 3 C. 16 D. 4

4. $A = \{x | -5 < x < 5\}$, $B = \{x | -7 < x < a\}$, $C = \{x | b < x < 2\}$, $A \cap B = C$, 则 a, b 的值为 ().

A. 5, -7

B. 5, -5

C. 2, -7

D. 2, -5

二、填空题

5. $\{3, 4, m^2 - 3m - 1\} \cap \{2m, -3\} = \{-3\}$, 则 $m =$ _____.

6. 已知 $A = \{x | x < -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$, $B = \{x | x \leq 2 \text{ 或 } x > 4\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

7. $\{(2, 3)\} \subseteq A \cap B$, $A = \{(x, y) | ax - y^2 + b = 0\}$, $B = \{(x, y) | x^2 - ay - b = 0\}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

三、解答题

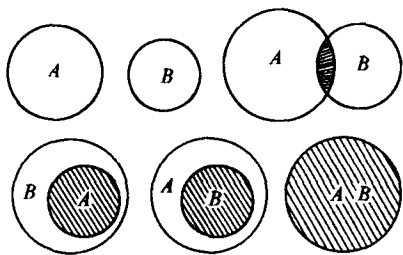
8. 设集合 $A = \{|a + 1|, 3, 5\}$, 集合 $B = \{2a + 1, a^2 + 2a, a^2 + 2a - 1\}$, 当 $A \cap B = \{2, 3\}$ 时, 求 $A \cup B$.

9. 已知 $A \cap \{-1, 0, 1\} = \{0, 1\}$, 且 $A \cup \{-2, 0, 2\} = \{-2, 0, 1, 2\}$, 求满足上述条件的集合 A .

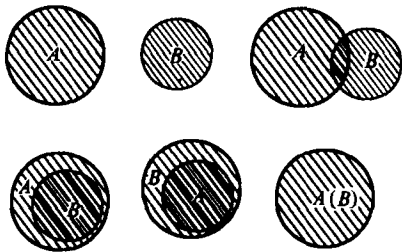
10. 已知集合 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, 求实数 a 的值以及集合 A .

【课时点评】

维恩图可以帮助我们加深对交集、并集的理解, 对于 $A \cap B$ 可能存在下图所示的几种情况:(阴影部分表示 $A \cap B$)



对于 $A \cup B$ 可能有如下图所示的几种情况:(阴影部分表示 $A \cup B$)



集合的基本运算(二)

【自学导引】

学习目标:了解全集的含义,理解补集的概念,掌握补集的运算;会用集合的一些简单运算性质解题.

1. 如果一个集合含有所研究问题中所涉及的所有元素,那么就称这个集合为_____,记作_____.

2. 对于一个集合 A ,由全集 U 中_____集合 A 的_____元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,记作_____.即 $\complement_U A = \{x | \text{_____}\}$.

3. 补集的运算性质

- (1) $\complement_U \emptyset = \text{_____}$; (2) $\complement_U U = \text{_____}$;
 (3) $A \cup \complement_U A = \text{_____}$; (4) $A \cap \complement_U A = \text{_____}$;
 (5) $\complement_U (\complement_U A) = \text{_____}$. (其中 U 为全集)

4 交、并集的运算性质

交集、并集除前面遇到的性质外,还有以下运算性质:

$$A \cap U = \text{_____}; A \cup U = \text{_____}; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); A \cap B \text{ _____}$$

$$A; A \cup B \text{ _____} A$$

若 $A \cap B = A$,则 $A \text{ _____} B$;若 $A \cup B = B$,则

$A \text{ _____} B$;

$$\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \text{ _____ } (\complement_U B); \complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \text{ _____ } (\complement_U B). \text{ (其中 } U \text{ 为全集)}$$

【例题选讲】

【例1】 设集合 $A = \{|2a-1|, 2\}$, $B = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, 且 $\complement_B A = \{5\}$, 求实数 a 的值.

解:由符号 $\complement_B A$ 知 $A \subseteq B$, 由 $\complement_B A = \{5\}$ 知 $5 \in B$ 且 $5 \notin A$.

$\therefore a^2 + 2a - 3 = 5$, 即 $a = 2$ 或 $a = -4$.

当 $a = 2$ 时, $|2a-1| = 3$. 这时 $A = \{3, 2\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, 所以 $\complement_B A = \{5\}$, 适合题意, 所以 $a = 2$.

当 $a = -4$ 时, $|2a-1| = 9$, 这时 $A = \{9, 2\}$, $B = \{2, 3, 5\}$, $A \not\subseteq B$, 所以 $\complement_B A$ 无意义, $a = -4$ 舍去.

综上所述可知: $a = 2$.

启示:在由 $\complement_B A = \{5\}$ 求得 $a = 2$ 或 $a = -4$ 之后,验证其是否符合隐含条件 $A \subseteq B$ 是必要的,否则就会把 $a = -4$ 误认为是本题的答案了,集合是一种数学语言,如果不能从这种语言中破译出它的全部意义,那么就会造成各种各样的错误.

【例2】 设 $A = \{x | x^2 + 4x = 0\}$,

$$B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}.$$

(1) 若 $A \cap B = B$, 求 a 的值;

(2) 若 $A \cup B = B$, 求 a 的值.

解:首先化简集合 A , 得 $A = \{-4, 0\}$.

(1) 由于 $A \cap B = B$, 则 $B \subseteq A$, 可知集合 B 或为空集 $\emptyset$, 或只含有根 0 或 -4 .

① 若 $B = \emptyset$, 由 $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 1) < 0$, 得 $a < -1$.

② 若 $0 \in B$, 代入 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$, 得 $a^2 - 1 = 0$, 即 $a = 1$, 或 $a = -1$.

当 $a = 1$ 时, $B = \{x | x^2 + 4x = 0\} = \{0, -4\} = A$, 合题意;

当 $a = -1$ 时, $B = \{x | x^2 = 0\} = \{0\} \subsetneq A$, 也合题意;

③ 若 $-4 \in B$, 代入 $x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$, 得 $a^2 - 8a + 7 = 0$, 即 $a = 7$ 或 $a = 1$.

当 $a = 1$ 时, ②中已讨论, 合题意;

当 $a = 7$ 时, $B = \{x | x^2 + 16x + 48 = 0\} = \{-12, -4\}$, 不合题意.

由①、②、③得 $a = 1$ 或 $a \leq -1$.

(2) 因为 $A \cup B = B$, 所以 $A \subseteq B$, 又 $A = \{-4,$

0}, 而 B 至多只有两个根, 因此应有 $A = B$.

由(1)知, $a = 1$.

启示: 要善于利用集合的运算性质解题, 它能使复杂问题简单化.

【课堂练习】

1. 四个命题: ① $A \cap B = A$, ② $A \cup B = B$, ③ $A \cap \complement_U B = \emptyset$, ④ $A \cup B = U$ 中, 与 $A \subseteq B$ 等价的有().

- A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

2. 已知集合 A 是全集 U 的任一子集, 则必有().

- A. $\emptyset \subsetneq \complement_U A$ B. $\complement_U A \subsetneq U$
C. $\complement_U (\complement_U A) = A$ D. $\emptyset = \complement_U A$

3. 已知某校高一年级有 10 个班, 集合 $A = \{\text{某校高一(1)的学生}\}$, $B = \{\text{某校高一(1)班的男生}\}$, $D = \{\text{某校高一年级(1)~(10)班}\}$.

- (1) 若 A 为全集, 求 $\complement_A B$.
(2) 若 D 为全集, 能否求出 $\complement_D B$? 为什么?

【训练题组】

一、选择题

1. 已知 $S = \{a, b\}$, $A \subseteq S$, 则 A 与 $\complement_S A$ 的所有序组对共有().

- A. 1 组 B. 2 组
C. 3 组 D. 4 组

2. 已知全集 $U \neq \emptyset$ 以及集合 M, N, P , 且 $M = \complement_U N$, $N = \complement_U P$, 则().

- A. $M = \complement_U P$ B. $M = P$
C. $P \subsetneq M$ D. $M \subsetneq P$

3. 下列说法中正确的是().

- A. 若 $A \cap B = B$, 则 $A \subseteq B$
B. 若 $A \cup B = B$, 则 $A \subsetneq B$
C. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 A, B 中至少是一个是空集
D. 若 $A \cup B = \emptyset$, 则 A, B 都是空集

4. 已知 $\complement_{\mathbb{Z}} A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 5\}$, $\complement_{\mathbb{Z}} B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 2\}$, 则有().

- A. $A \subseteq B$ B. $A \supseteq B$

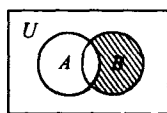
C. $A = B$

D. 以上都不对

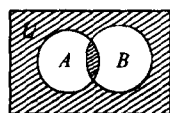
二、填空题

5. 已知 I 为全集, 集合 $M, N \subsetneq I$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 则 $\complement_I M$ 与 $\complement_I N$ 的关系为_____.

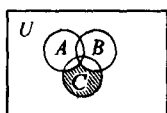
6. 写出图中阴影部分表示的集合



(1) _____



(2) _____



(3) _____

7. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{x \mid x^2 - mx + n = 0, x \in U\}$, 若 $\complement_U A = \{2, 3\}$, 则 $m =$ _____, $n =$ _____.

三、解答题

8. 已知集合 $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $\complement_U A = \{-1, -3, 1, 3, 5\}$, $\complement_U B = \{-1, 0, 2\}$, 求集合 B .

9. 已知全集 $U = \mathbb{R}$, $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid x - a > 0\}$, 当 a 为何值时, (1) $A \cap B \neq \emptyset$; (2) $B \cup \complement_U A = \complement_U A$.

10. 已知集合 $A = \{x \mid ax + 1 = 0\}$, 集合 $B = \{x \mid x^2 + x - 2 = 0\}$, 且 $A \cap B = A$, 求 a 的值.

【课时点评】

补集符号 $\complement_S A$ 有三层含义:

(1) A 是 S 的一个子集,

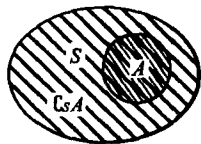
即 $A \subseteq S$;

(2) $\complement_S A$ 表示一个集合,

且 $\complement_S A \subseteq S$;

(3) $\complement_S A$ 是由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 即 $\complement_S A = \{x \mid x \in S, \text{ 且 } x \notin A\}$.

按照补集的定义, $\complement_S A$ 与 A 没有公共元素, S 中的元素分布在 $\complement_S A$ 与 A 这两个集合中.



1.2 函数及其表示

1.2.1 函数的概念

【自学导引】

学习目标:理解函数的概念,函数符号的含义;能根据函数的表达式求出该函数的定义域,值域;掌握区间的表示方法;会判断所给函数是否相等.

1. 设 A, B 是_____的数集,如果按照某个确定的对应关系 f ,使对于集合 A 中的_____一个数 x ,在集合 B 中都有_____确定的数 $f(x)$ 和它对应.那么就称_____为从集合 A 到集合 B 的一个函数.记作_____.其中, x 叫做_____, x 的取值范围 A 叫做函数的_____.与 x 的值相对应的 y 值叫做_____,_____叫做函数的值域.

2. 如果两个函数的_____和_____完全一致,就称这两个函数相等.

3. 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$.

(1) 满足 $a \leq x \leq b$ 的全体实数 x 的集合,叫做_____区间,记作_____.

(2) 满足 $a < x < b$ 的全体实数 x 的集合,叫做_____区间,记作_____.

(3) 满足 $a \leq x < b$ 或 $a < x \leq b$ 的全体实数 x 的集合,都叫做_____区间,记作_____或_____.

(4) 满足 $x \geq a, x > a, x \leq a, x < a$ 的全体实数 x 的集合,分别记作_____;_____;_____;_____.其中,在以上形式中, a 与 b 叫做区间的_____.

(5) 实数集 $\mathbf{R}$ 用区间可表示为_____.

【例题选讲】

【例1】 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否表示同一函数,为什么?

(1) $f(x) = x^0$ 与 $g(x) = 1$;

(2) $f(x) = x$ 与 $g(x) = \frac{x^2}{x}$;

(3) $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2-1}$;

(4) $f(x) = x^0$ 与 $g(x) = \frac{x}{x}$.

解:(1)、(2)中两函数的定义域不同,(3)中两函数的定义域分别为 $\{x|x \geq 1\}$ 与 $\{x|x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$,对应关系也不相同,所以(1)、(2)、(3)都是不同

函数.(4)中两函数的定义域和对应法则都相同,是同一函数.

启示:值域可由定义域和对应法则惟一确定,所以两个函数在定义域、对应法则都相同时就是同一个函数.

【例2】 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$,

(1) 求 $f(0), f(1), f(-2), f(a)$;

(2) 求 $f(x+1)$.

解:(1) $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 + 3 = 3$,

同理可知 $f(1) = 2$,

$f(-2) = 11, f(a) = a^2 - 2a + 3$,

(2) $f(x+1) = (x+1)^2 - 2(x+1) + 3 = x^2 + 2$.

启示:熟练掌握函数的定义是解决此类问题的关键.

【课堂练习】

1. 下列函数中哪个与函数 $y = x$ 是同一个函数?

(a) $y = (\sqrt{x})^2$; (b) $y = \sqrt[3]{x^3}$; (c) $y = \sqrt{x^2}$.

2. 求函数 $y = \sqrt{x}$ 的定义域及值域.

3. 已知函数 $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, 求 $f(-\sqrt{2}), f(0), f(3), f(a), f(a+1)$.

【训练题组】

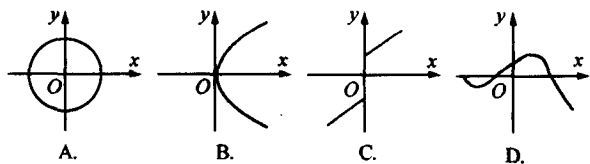
一、选择题

1. 下列四种说法中不正确的是().

- A. 函数值域中每一个数都有定义域中的自变量值与其对应
- B. 函数的定义域和值域一定是不包括数 0 的数集
- C. 定义域和对应法则确定后,函数的值域也就确定了
- D. 若函数的定义域只含有一个元素,则值域

也只含有一个元素

2. 下列各图中, 可表示函数 $y = f(x)$ 的图象的只可能是().



3. 下列四组中, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一个函数的是().

A. $f(x) = 1, g(x) = x^0$

B. $f(x) = x^0, g(x) = \frac{x^2}{x}$

C. $f(x) = x^2, g(x) = (\sqrt{x})^4$

D. $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt[3]{x^9}$

4. 设 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, 则 $f(\frac{1}{x})$ 是().

A. $f(x)$ B. $-f(x)$

C. $\frac{1}{f(x)}$ D. $\frac{1}{f(-x)}$

二、填空题

5. 函数 $y = \sqrt{1-x} + \frac{1}{x+2}$ 的定义域为_____.

6. 已知函数 $f(x) = 3x - 1$ 的值域为 $[-1, 5]$, 则定义域为_____.

7. 将长为 a 的铁丝折成矩形, 则面积 y 与一边长 x 的函数关系式为_____.

三、解答题

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1+x}{1-x} (x \neq 1)$, 求 $f(0), f(\frac{1}{2}), f(a)$.

9. 已知 $f(x-1) = x^2$, 求 $f(x)$.

10. 筑一个容积为 8000m^3 , 深为 6m 的长方体蓄水池, 池壁每平方米的造价为 a 元, 池底每平方米的造价为 $2a$ 元, 把总造价 y 元表示为底的一边长 $x\text{m}$ 的函数, 并求出函数的定义域.

【课时点评】

1. 定义域, 值域和对应法则是函数的三要素, 也是判断函数是否为同一个函数的依据.

2. 牢记区间的符号, 正确使用区间表示数集.

3. 熟练求出函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的函数值.

1.2.2 函数的表示法

【自学导引】

学习目标: 掌握函数的三种表示方法; 熟练掌握函数的图象法表示、解析法表示; 掌握映射的概念.

1. 列表法 _____.

2. 图象法 _____.

3. 解析法 _____.

【例题选讲】

[例 1] 作出下列函数的图象:

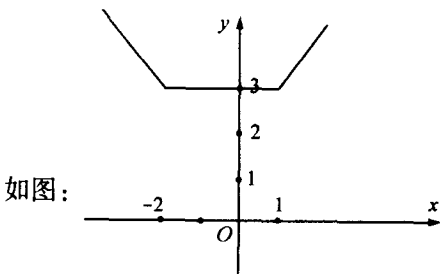
(1) $y = |x - 1| + |x + 2|$;

(2) $y = |x^2 - 4x + 3|$;

(3) $y = \frac{x+1}{x}$.

解: (1) $y = |x - 1| + |x + 2|$

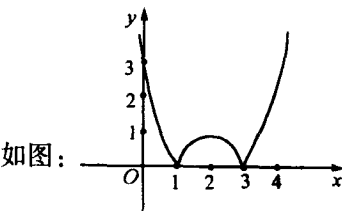
$$= \begin{cases} -2x - 1 & (x \leq -2), \\ 3 & (-2 < x \leq 1), \\ 2x + 1 & (x > 1). \end{cases}$$



如图:

(2) $y = |x^2 - 4x + 3|$

$$= \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 3), \\ -x^2 + 4x - 3 & (1 < x < 3). \end{cases}$$

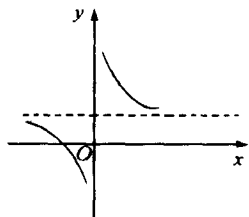


如图:

(3) $y = \frac{1}{x} + 1$. (如图)

将 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向上平移 1 个单位, 即得函数

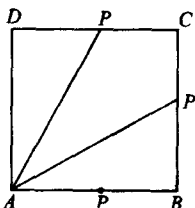
$y = \frac{1}{x} + 1$ 的图象.



启示: 本题首先将函数的关系式进行变形, 第(1), (2)利用一次函数图象、二次函数图象作出所需的图象, 而第(3)题, 则通过图象的变换来得到所需图象.

[例 2] 动点 P 从边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A 出发顺次经过 B, C, D 再回到 A , 设 x 表示 P 点的行程, y 表示 PA 的长, 求 y 关于 x 的函数式.

解: 如图, 当 P 点在 AB 边上运动时, $PA = x$, 当 P 点在 BC 边上运动时, $PA = \sqrt{1 + (x-1)^2}$; 当 P 点在 CD 边上运动时, 由 $Rt\triangle PDA$ 求出 $PA = \sqrt{1 + (3-x)^2}$; 当 P 点在 DA 上运动时, $PA = 4 - x$. 所求函数式是



$$y = \begin{cases} x (0 \leq x \leq 1), \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2} (1 < x \leq 2), \\ \sqrt{x^2 - 6x + 10} (2 < x \leq 3), \\ 4 - x (3 < x \leq 4). \end{cases}$$

启示: 解决实际问题是在设定或选定自变量后去寻求等量关系, 求得函数表达式, 注意函数定义域由问题中变量的实际意义确定.

【课堂练习】

1. 作出函数 $y = |x-1| + 2|x-2|$ 的图象.

2. 下列从集合 A 到集合 B 的对应中是映射的是:

A. $A = B = \mathbf{N}^+, f: x \rightarrow y = |x-3|$

B. $A = \mathbf{R}, B = \{0, 1\},$

$$f: x \rightarrow y = \begin{cases} 1 (x \geq 0), \\ 0 (x < 0) \end{cases}$$

C. $A = B = \mathbf{R}, f: x \rightarrow y = \pm\sqrt{x}$

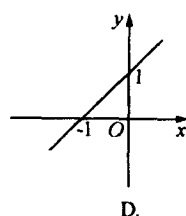
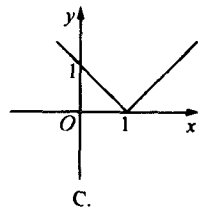
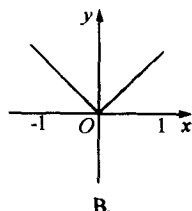
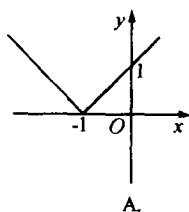
D. $A = \mathbf{Z}, B = \mathbf{Q}, f: x \rightarrow y = \frac{1}{x}$

3. 某汽车以 52 千米/时的速度从 A 地到 260 千米远处的 B 地, 在 B 地停留 $1\frac{1}{2}$ 小时后, 再以 65 千米/时的速度返回 A 地, 试将汽车离开 A 地后行走的路程 S 表示为时间 t 的函数.

【训练题组】

一、选择题

1. 函数 $f(x) = |x+1|$ 的图象为().



2. 函数 $y = x + \frac{|x|}{x}$ 的图象是().

