

双重 丛书

# 计算方法

重点内容重点题

主编 杨泮池

编著 杨泮池 乔学军 林芳 王兰芳



西安交通大学出版社

双重丛书

# 计算方法

## 重点内容重点题

主编 杨泮池  
编著 杨泮池 乔学军  
林 芳 王兰芳

西安交通大学出版社  
· 西安 ·

## 内 容 提 要

本书是学习“计算方法”课程的辅导书,突出本课程的重点内容和重点习题是本书的特点。本书的宗旨是,用较短的篇幅总结全面的内容,用较少的时间掌握核心的知识。

本书主要由:重点内容提要、重点例题分析和精选考研试题解析,三部分组成。在各章重点内容部分,系统地归纳了本章所涉及的基本概念、基本理论和基本方法;在重点例题分析部分,选择了能巩固本课程内容的重点例题;在精选考研试题解析部分,挑选了历年硕士研究生入学考试的各种类型的试题。

本书适合学习“计算方法”课程的本、专科生使用。

## 图书在版编目(CIP)数据

计算方法重点内容重点题/杨泮池主编. —西安:西安交通大学出版社,2005. 11

(双重丛书)

ISBN 7-5605-2111-8

I. 计... II. 杨... III. 计算方法—高等学校—自学参考资料 IV. 0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 097631 号

书 名	计算方法重点内容重点题
主 编	杨泮池
出版发行	西安交通大学出版社
地 址	西安市兴庆南路 25 号(邮编:710049)
电 话	(029)82668357,82667874(发行部) (029)82668315,82669096(总编办)
印 刷	西安百花印刷厂
字 数	285 千字
开 本	880 mm×1 230 mm 1/32
印 张	9.875
版 次	2005 年 11 月第 1 版 2005 年 11 月第 1 次印刷
印 数	0001~4000
书 号	ISBN 7-5605-2111-8/O·229
定 价	14.00 元

版权所有,翻版必究!

# 前 言

当今,在科学技术领域应用计算机计算已经成为与理论、实验并列的第三种重要研究手段,从而使研究借助计算机计算的数学方法——“计算方法”(或“数值计算”)发展成一个独立的学科。近年来在高等理工院校普遍开设了这类课程,成为对理工科大学生素质培养的基本内容之一,有的院校已将其作为考研专业课的科目。

“计算方法”课程的突出特点是计算复杂、方法多样,许多学生在解题方面存在诸多困难。据此,作者根据多年讲授这门课程的体会编写了这本学习辅导书。

全书共8章,每章都由5部分构成。其中:“重点内容提要”以简明的方式综述了本章的基本概念、基本理论和重要方法,以及它们之间的联系;“重点例题解析”是将典型的题目加以剖析,既给出各种解法,又在解题前给出分析以启发读者思路,解题后还给出必要的注释,以引导读者思考,举一反三。本书还搜集了部分院校的考研试题分列于各章,都有详尽的分析与解答,这部分内容无疑对有志于考研的同学大有裨益。

本书附录一提供了中等水平的模拟试题,可作为读者对自身的考核之用;附录二提供的几个程序可作为上机练习时的参考。

书中错讹之处恳望同行、专家和广大读者指正。

作 者

2005年7月于西安

# 目 录

## 前言

### 第 1 章 误差的基本理论

1.1 基本要求 .....	(1)
1.2 重点内容提要 .....	(1)
1.2.1 计算方法的内容和任务 .....	(1)
1.2.2 误差及误差的影响 .....	(1)
1.2.3 算法的数值稳定性 .....	(4)
1.2.4 数值计算中应遵循的几个原则 .....	(4)
1.3 重点例题解析 .....	(5)
1.4 精选考研试题解析 .....	(12)
1.5 自测题 .....	(17)
答案与提示 .....	(19)

### 第 2 章 非线性方程(组)的数值解法

2.1 基本要求 .....	(25)
2.2 重点内容提要 .....	(25)
2.2.1 一元非线性方程的简单解法 .....	(25)
2.2.2 牛顿(Newton)迭代法及其变形 .....	(27)
2.2.3 迭代收敛速度 .....	(28)
2.2.4 非线性方程组的数值解法 .....	(30)
2.3 重点例题解析 .....	(31)
2.4 精选考研试题解析 .....	(44)
2.5 自测题 .....	(51)
答案与提示 .....	(53)

### 第 3 章 线性方程组的数值解法

3.1 基本要求 .....	(62)
----------------	------

3.2	重点内容提要	(62)
3.2.1	范数及方程组的性态和条件数	(62)
3.2.2	线性方程组的直接解法	(64)
3.2.3	解线性方程组的迭代法	(69)
3.2.4	迭代法的收敛性分析与误差估计	(71)
3.3	重点例题解析	(72)
3.4	精选考研试题解析	(87)
3.5	自测题	(93)
	答案与提示	(96)
<b>第4章 求矩阵特征值与特征向量的数值方法</b>		
4.1	基本要求	(102)
4.2	重点内容提要	(102)
4.2.1	圆盘定理(Gerschgorin 定理)	(102)
4.2.2	幂法	(102)
4.2.3	幂法加速	(104)
4.2.4	反幂法	(104)
4.2.5	雅可比方法	(105)
4.2.6	实的非奇异矩阵的 QR 算法	(106)
4.2.7	对称矩阵的豪斯荷尔德法	(106)
4.3	重点例题解析	(107)
4.4	精选考研试题解析	(122)
4.5	自测题	(126)
	答案与提示	(128)
<b>第5章 函数插值</b>		
5.1	基本要求	(136)
5.2	重点内容提要	(136)
5.2.1	插值问题与插值多项式	(136)
5.2.2	拉格朗日插值	(137)
5.2.3	牛顿插值	(137)
5.2.4	等距结点的牛顿插值	(139)

5.2.5	埃尔米特插值 .....	(140)
5.2.6	分段低次插值 .....	(141)
5.2.7	三次样条插值 .....	(142)
5.3	重点例题解析 .....	(144)
5.4	精选考研试题解析 .....	(159)
5.5	自测题 .....	(166)
	答案与提示 .....	(168)
<b>第6章 函数逼近与曲线拟合</b>		
6.1	基本要求 .....	(177)
6.2	重点内容提要 .....	(177)
6.2.1	内积与正交多项式 .....	(177)
6.2.2	函数逼近 .....	(179)
6.2.3	超定方程组的最小二乘解 .....	(180)
6.3	重点例题解析 .....	(180)
6.4	精选考研试题解析 .....	(192)
6.5	自测题 .....	(200)
	答案与提示 .....	(201)
<b>第7章 数值积分与数值微分</b>		
7.1	基本要求 .....	(210)
7.2	重点内容提要 .....	(210)
7.2.1	数值求积公式 .....	(210)
7.2.2	衡量求积公式精确度的标准:求积公式的代数精确度 .....	(210)
7.2.3	等距插值型求积公式:牛顿-柯特斯求积公式 .....	(211)
7.2.4	龙贝格求积法 .....	(213)
7.2.5	高斯求积公式 .....	(214)
7.2.6	广义积分的数值求积法 .....	(216)
7.2.7	重积分的求积公式 .....	(217)
7.2.8	数值微分 .....	(217)
7.3	重点例题解析 .....	(218)

7.4	精选考研试题解析	(234)
7.5	自测题	(241)
	答案与提示	(243)
<b>第8章 常微分方程数值解法</b>		
8.1	基本要求	(250)
8.2	重点内容提要	(250)
8.2.1	最简单的一步法	(250)
8.2.2	龙格-库塔法	(252)
8.2.3	线性多步法	(253)
8.2.4	预估-校正格式	(254)
8.2.5	方程组与高阶方程	(254)
8.2.6	局部截断误差与整体截断误差	(256)
8.2.7	微分方程数值解法的收敛性与稳定性	(256)
8.3	重点例题解析	(257)
8.4	精选考研试题解析	(269)
8.5	自测题	(277)
	答案与提示	(280)
<b>附录一 模拟试题</b>		
	第1套试题	(286)
	第2套试题	(287)
	第1套模拟试题答案	(289)
	第2套模拟试题答案	(292)
<b>附录二</b>		
		(296)



# 第 1 章 误差的基本理论

## 1.1 基本要求

1. 了解计算方法课程的内容、方法和意义。
2. 了解算法的稳定性。
3. 理解绝对误差、相对误差、有效数字等概念。
4. 熟练掌握误差传播的计算。
5. 了解在数值计算中必须注意的几项原则。

## 1.2 重点内容提要

### 1.2.1 计算方法的内容和任务

计算方法最重要的内容是构造算法,这是将数学模型通过离散化的手段化为计算机可以接受(加减乘除)的方式,并在计算机上得以实施,以解决工程和科研中的计算问题.其次是分析算法的稳定性、收敛性,提高计算的速度,并且减小在计算机中的存储量,这就是在计算时间和空间上的优化.最后是提高计算精度、减小误差.以上三大任务就是计算方法的主要内容.

### 1.2.2 误差及误差的影响

#### 1. 绝对误差与绝对误差限

近似值  $x^*$  对于它的精确值  $x$  的差称为绝对误差,记为  $e^*$  或  $e(x^*)$ ,  
即

$$e(x^*) = x^* - x$$

绝对误差也常记作  $x$  的微分  $dx = e(x^*) = x^* - x$ .

注意,绝对误差不是误差的绝对值,它可正可负,当  $e(x^*) > 0$  时称  $x^*$  为强近似值,否则称为弱近似值.

$x^*$  的绝对误差限  $\epsilon^*$  或  $\epsilon(x^*)$  是  $e(x^*)$  的上界, 即

$$|e^*| = |x^* - x| \leq \epsilon^*$$

它等价于  $x = x^* \pm \epsilon^*$ .

## 2. 相对误差与相对误差限

相对误差  $e_r^* = \frac{e^*}{x^*}$

$x^*$  的相对误差也常记作  $\ln x = e_r^* = \frac{x^* - x}{x^*}$

$x^*$  的相对误差限  $\epsilon_r^*$  指  $e_r^*$  的上界, 它们满足

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \epsilon_r^*$$

## 3. 近似数的计算

(1) 和、差、积、商的绝对误差公式为

$$e(x^* \pm y^*) \approx e(x^*) \pm e(y^*)$$

$$e(x^* y^*) \approx y^* e(x^*) + x^* e(y^*)$$

$$e\left(\frac{x^*}{y^*}\right) \approx \frac{1}{y^*} e(x^*) - \frac{x^*}{(y^*)^2} e(y^*)$$

其以微分形式可表示为

$$d(x + y) = dx + dy, \quad d(xy) = xdy + ydx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

(2) 和、差、积、商的相对误差公式为

$$e_r(x^* \pm y^*) \approx \frac{x^*}{x^* \pm y^*} e_r(x^*) \pm \frac{y^*}{x^* \pm y^*} e_r(y^*)$$

$$e_r(x^* y^*) \approx e_r(x^*) + e_r(y^*)$$

$$e_r(x^* / y^*) \approx e_r(x^*) - e_r(y^*)$$

特别地

$$e_r((x^*)^n) = n e_r(x^*), \quad e_r(\sqrt[n]{x^*}) = \frac{1}{n} e_r(x^*)$$

即  $x^*$  的  $n$  次幂  $(x^*)^n$  的相对误差相当于  $x^*$  相对误差的  $n$  倍, 而  $\sqrt[n]{x^*}$  的相对误差仅是  $x^*$  相对误差的  $\frac{1}{n}$ .

(3) 和、差、积、商的绝对误差限与相对误差限

$$\begin{aligned}\epsilon(x^* \pm y^*) &\leq \epsilon(x^*) + \epsilon(y^*), \\ \epsilon(x^* y^*) &\leq |y^*| \epsilon(x^*) + |x^*| \epsilon(y^*) \\ \epsilon\left(\frac{x^*}{y^*}\right) &\leq \frac{|y^*| \epsilon(x^*) + |x^*| \epsilon(y^*)}{(y^*)^2}\end{aligned}$$

只需将上述各式的  $\epsilon$  改为  $\epsilon_r$  就得到相应的关于相对误差限的计算公式. 特别地, 对和的相对误差限还有

$$\epsilon_r(x^* + y^*) \leq \max\{\epsilon_r(x^*), \epsilon_r(y^*)\}$$

(4) 函数的绝对误差(限)与相对误差(限)

设  $y = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\begin{aligned}e(\mathbf{x}^*) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} e(x_i^*) \\ e_r(\mathbf{x}^*) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} e_r(x_i^*) \\ \epsilon(\mathbf{x}^*) &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \right| \epsilon(x_i^*) \\ \epsilon_r(\mathbf{x}^*) &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \right| \frac{1}{|f(\mathbf{x}^*)|} \epsilon_r(x_i^*)\end{aligned}$$

#### 4. 有效数字

若近似数  $x^*$  的误差限是  $x^*$  某一位上数字的半个单位, 就说  $x^*$  准确到该位, 由该位到  $x^*$  的(自左向右看)第 1 个非零数字若有  $n$  位, 就称  $x^*$  有  $n$  位有效数字. 此即

若  $x^*$  以规格化的浮点数表示为

$$x^* = \pm 0. a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m, \quad a_1 \neq 0$$

当  $|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$  时,  $x^*$  有  $n$  位有效数字  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

相对误差与有效数字的关系由定理 1.1 给出.

**定理 1.1** 设近似数  $x^*$  有  $n$  位有效数字, 即  $x^* = 0. a_1 \cdots a_n \times 10^m$  ( $a_1 \neq 0$ ), 则  $x^*$  的相对误差

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$$

反之,若

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)}$$

则  $x^*$  至少有  $n$  位有效数字.

### 1.2.3 算法的数值稳定性

一个算法如果原始数据有扰动(即误差),而计算过程舍入误差不增长或增长可以控制,则称此算法是数值稳定的,否则,称此算法是数值不稳定的.

定义 1.1(递推算法的稳定性) 若算法

$$\begin{cases} x_n = F(x_{n-1}), & n = 1, 2, \dots \\ x_0 \text{ 给定} \end{cases}$$

是精确算法,而算法

$$\begin{cases} x_n^* = F(x_{n-1}^*), & n = 1, 2, \dots \\ x_0^* = x_0 + e_0 \end{cases}$$

是近似算法,其中  $x$  是精确值,  $x^*$  是近似值.  $e_0 = x_0^* - x$  是原始误差. 如果存在不依赖  $n$  的常数  $c > 0$ , 使

$$|e_n| \leq c |e_0|, \quad n = 1, 2, \dots$$

则称该递推算法是数值稳定的,否则是数值不稳定的.

### 1.2.4 数值计算中应遵循的几个原则

1. 尽量避免相近二数相减,因相近二数相减将扩大相对误差并减少有效数字.

2. 尽量避免用绝对值小的数作为除数,因绝对值小的数作为除数会扩大绝对误差.

3. 尽量避免大数“吃掉”小数. 避免的方法是尽量使小数在一起计算,最后再与大数计算.

4. 选用数值稳定的算法.

5. 简化计算步骤,尽量减少运算次数. 例如应用秦九韶嵌套算法于多项式求值计算.

### 1.3 重点例题解析

**例 1.1** 设 3 个近似数  $a = 3.65, b = 9.81, c = 1.21$  均有 3 位有效数字, 试计算  $ac + b$ , 并估计它的相对误差.

**分析** 这是一个很简单的计算, 关键是结果取几位有效数字, 这应由  $ac + b$  的绝对误差限确定.

**解** 首先, 由  $a, b, c$  均有 3 位有效数字可知绝对误差

$$da = db = dc = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

则  $ac + b$  的绝对误差

$$\begin{aligned} d(ac + b) &= adc + cda + db = (a + c + 1)da \\ &= (3.65 + 1.21 + 1) \times \frac{1}{2} \times 10^{-2} \\ &= 0.293 \times 10^{-1} < \frac{1}{2} \times 10^{-1} \end{aligned}$$

所以  $ac + b$  可精确到小数后 1 位, 于是

$$ac + b = 14.2$$

它的相对误差限

$$\begin{aligned} \epsilon_r(ac + b) &= d \ln(ac + b) = \frac{d(ac + b)}{ac + b} \\ &\approx \frac{0.293 \times 10^{-1}}{14.2} \approx 0.21\% \end{aligned}$$

**注** 亦可用公式  $d \ln(ac + b) \leq \max\{d \ln ac, d \ln c\}$  估计相对误差限.

因为  $d \ln a = 0.0014, d \ln b = 0.0005, d \ln c = 0.0041$ , 所以

$$d \ln ac = d \ln a + d \ln c = 0.0055$$

$$d \ln(ac + b) \leq \max\{0.0055, 0.0005\} = 0.55\%$$

**例 1.2** 设  $x > 0$ , 若  $x$  的相对误差为  $\delta$

(1) 求  $f(x) = \ln x$  的绝对误差;

(2) 求  $f(x) = \sqrt{x}$  的相对误差.

**解** (1)  $x$  的相对误差为  $d \ln x$ , 它正是  $\ln x$  的绝对误差, 所以  $f(x) = \ln x$  的绝对误差

$$d\ln x = \delta$$

(2)  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  的相对误差

$$d\ln f(x) = d\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} d\ln x = \frac{\delta}{n}$$

注 由本例可见,应用误差的微分表达式求解函数误差是十分便捷的.

例 1.3 计算球的体积,为使相对误差限为 1%,问度量半径为  $R$  时允许的相对误差限是多少?

分析 球的体积公式为  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ,本例是以球半径  $R$  的相对误差限  $d\ln R$  确定球体积  $V$  的相对误差限  $d\ln V$ .

解 根据球体积公式  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ,有  $V$  的相对误差

$$d\ln V = 3d\ln R$$

由题设  $d\ln V \leq 1\%$ ,则

$$d\ln R \leq \frac{1}{3}\% \approx 0.33\%$$

故在度量半径为  $R$  的相对误差不超过 0.33% 时,球体积的相对误差限为 1%.

例 1.4 已知

$$\begin{aligned} (\sqrt{2}-1)^6 &= (3-2\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} = \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} = \frac{1}{99+70\sqrt{2}} \end{aligned}$$

试判定这 6 个表达式中用哪一个计算的相对误差最小.

分析 由于在计算机中  $\sqrt{2}$  只能取近似数计算,则这 6 个表达式不再相等.由避免相近二数相减以减小相对误差的原则知,后 3 个表达式的相对误差小于前 3 个表达式.

解 令  $x = \sqrt{2}$ ,则 6 个表达式的函数式分别为

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-1)^6, & f_2(x) &= (3-2x)^3 \\ f_3(x) &= 99-70x, & f_4(x) &= \frac{1}{(x+1)^6} \end{aligned}$$

$$f_5(x) = \frac{1}{(3+2x)^3}, \quad f_6(x) = \frac{1}{99+70x}$$

这些函数在  $x = \sqrt{2}$  时均相等. 当  $x = x^* = 1.4$  时, 有

$$d \ln f_1(x^*) = \frac{6(x^* - 1)^5}{(x^* - 1)^6} dx^* = 15 dx^*$$

$$d \ln f_2(x^*) = \frac{-6(3-2x^*)^2}{(3-2x^*)^3} dx^* = -30 dx^*$$

$$d \ln f_3(x^*) = \frac{-70}{99-70x^*} dx^* = -70 dx^*$$

$$d \ln f_4(x^*) = \frac{-6}{x^* + 1} dx^* = -2.5 dx^*$$

$$d \ln f_5(x^*) = \frac{-6}{3+2x^*} dx^* = -1.0 dx^*$$

$$d \ln f_6(x^*) = \frac{-70}{99+70x^*} dx^* = -0.36 dx^*$$

由计算知, 第 6 个表达式的相对误差最小.

**注** 通过类似的计算可知第 6 个表达式的绝对误差也最小, 故第 6 个表达式是绝对误差和相对误差都最小的计算式.

**例 1.5** 设近似数  $x^* = 0.a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m$  ( $a_1 \neq 0$ ), 试证:

(1) 若  $x^*$  具有  $n$  位有效数字, 则  $x^*$  的相对误差  $e_r(x^*)$  满足

$$|e_r(x^*)| = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$$

(2) 若  $x^*$  的相对误差满足

$$|e_r(x^*)| = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)}$$

则  $x^*$  有  $n$  位有效数字.

**分析** 题设  $x^*$  有  $n$  位有效数字, 表明  $|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$ , 再考虑到  $x^*$  的相对误差定义, 立证.

**证** (1) 已知  $x^*$  有  $n$  位有效数字, 则

$$|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

于是

$$\begin{aligned} |e_r(x^*)| &= \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n}}{0. a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m} \\ &\leq \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n}}{0. a_1 \times 10^m} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)} \end{aligned}$$

(2)  $x^* = 0. a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m = a_1. a_2 \cdots a_n \times 10^{m-1}$ , 则

$$|x^*| \leq (a_1 + 1) \times 10^{m-1}$$

由题设

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)}$$

则

$$\begin{aligned} |x^* - x| &= |x^*| \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \\ &\leq (a_1 + 1) \times 10^{m-1} \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)} \\ &= \frac{1}{2} \times 10^{m-n} \end{aligned}$$

根据有效数字的定义知  $x^*$  有  $n$  位有效数字。

**例 1.6** (1) 已知近似数  $x^*$  有 2 位有效数字, 试求其相对误差限。

(2) 已知近似数  $x^*$  的相对误差限为 0.3%, 问  $x^*$  至少有几位有效数字?

**分析** 可直接利用例 1.5 的结论求解。

**解** (1)  $x^*$  有 2 位有效数字, 即  $n = 2$ , 可设

$$x^* = 0. a_1 a_2 \times 10^m, a_1 \geq 1$$

则  $x^*$  的相对误差

$$\begin{aligned} \frac{|x^* - x|}{|x^*|} &\leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-1} \\ &\leq \frac{1}{2} \times 10^{-1} = 5\% \end{aligned}$$

所以, 有 2 位有效数字的近似数的相对误差限为 5%。

**注** 一般地, 有  $n$  位有效数字的近似数的相对误差限为  $\frac{1}{2} \times 10^{1-n}$ 。



(2) 分析 将相对误差限放大为  $\frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$ , 则可由例 1.5(2) 确定  $x^*$  有  $n$  位有效数字.

设  $x^*$  有  $n$  位有效数字, 即相对误差

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leq \epsilon_r(x^*) < \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$$

因  $\epsilon_r(x^*) = 0.3\%$ , 所以

$$\begin{aligned} 0.3\% &= 3 \times 10^{-3} < \frac{1}{2 \times 10} \times 10^{-1} \\ &= \frac{1}{2 \times (9+1)} \times 10^{-1} < \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-1} \end{aligned}$$

这是由于  $1 \leq a_1 \leq 9$ .

由最后的不等式知  $-(n-1) = -1$ , 所以  $n = 2$ , 则  $x^*$  至少有 2 位有效数字.

**例 1.7** 设  $x = \sqrt{70}$ , 它的近似数  $x^*$  至少取几位有效数字方能保证其相对误差小于 0.1%?

**分析** 本例可按例 1.6(2) 的方法求解, 但利用该方法估计的有效数字偏于保守, 可在给出  $x = \sqrt{70}$  时, 结合例 1.6(1) 解之.

**解** 因为  $8 \leq \sqrt{70} \leq 9$ , 则

$$\sqrt{70} = 8.a_2a_3\cdots = 0.8a_2a_3\cdots \times 10^1$$

设  $x^*$  有  $n$  位有效数字, 则

$$\epsilon_r(x^*) \leq \frac{1}{2 \times 8} \times 10^{1-n}$$

要求  $\epsilon_r(x^*) \leq 0.1\%$ , 只要

$$\frac{1}{2 \times 8} \times 10^{1-n} \leq 0.1\%$$

解出  $n \geq 2.8$ , 即取  $n = 3$ .

故  $\sqrt{70}$  的近似数至少取 3 位有效数字方能保证其相对误差小于 0.1%.

**注**  $x = \sqrt{70}$  取 3 位有效数字的近似数是  $x^* = 8.37$ .

**例 1.8** 试求当  $x = 0.001$  时函数  $y = f(x) = \frac{1+x-e^x}{x^2}$  的近似值