双重丛书

计算方法

重点内容重点题

主编 杨泮池

编著 杨泮池 乔学军 林 芳 王兰芳

西安交通大学出版社

双重丛书

计算方法
重点内容重点题

主编 杨泮池

编著 杨泮池 乔学军

林 芳 王兰芳

西安交通大学出版社

·西安·

内容提要

本书是学习“计算方法”课程的辅导书，突出本课程的重点内容和重点习题是本书的特点。本书的宗旨是，用较短的篇幅总结全面的内容，用较少的时间掌握核心的知识。

本书主要由：重点内容提要、重点例题分析和精选考研试题解析，三部分组成。在各章重点内容部分，系统地归纳了本章所涉及的基本概念、基本理论和基本方法；在重点例题分析部分，选择了能巩固本课程内容的重点例题；在精选考研试题解析部分，挑选了历年硕士研究生入学考试的各种类型的试题。

本书适合学习“计算方法”课程的本、专科生使用。

图书在版编目(CIP)数据

计算方法重点内容重点题/杨泮池主编. —西安：西安交通大学出版社，2005.11

(双重丛书)

ISBN 7-5605-2111-8

Ⅰ.计... Ⅱ.杨... Ⅲ.计算方法—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 097631 号

书　　名	计算方法重点内容重点题
主　　编	杨泮池
出版发行	西安交通大学出版社
地　　址	西安市兴庆南路 25 号(邮编：710049)
电　　话	(029)82668357，82667874(发行部)
	(029)82668315，82669096(总编办)
印　　刷	西安百花印刷厂
字　　数	285 千字
开　　本	880 mm×1 230 mm　1/32
印　　张	9.875
版　　次	2005 年 11 月第 1 版　2005 年 11 月第 1 次印刷
印　　数	0001～4000
书　　号	ISBN 7-5605-2111-8/O・229
定　　价	14.00 元

前　　言

当今，在科学技术领域应用计算机计算已经成为与理论、实验并列的第三种重要研究手段，从而使研究借助计算机计算的数学方法——“计算方法”(或“数值计算”)发展成一个独立的学科。近年来在高等理工科院校普遍开设了这类课程，成为对理工科大学生素质培养的基本内容之一，有的院校已将其作为考研专业课的科目。

“计算方法”课程的突出特点是计算复杂、方法多样，许多学生在解题方面存在诸多困难。据此，作者根据多年讲授这门课程的体会编写了这本学习辅导书。

全书共8章，每章都由5部分构成。其中：“重点内容提要”以简明的方式综述了本章的基本概念、基本理论和重要方法，以及它们之间的联系；“重点例题解析”是将典型的题目加以剖析，既给出各种解法，又在解题前给出分析以启发读者思路，解题后还给出必要的注释，以引导读者思考，举一反三。本书还搜集了部分院校的考研试题分列于各章，都有详尽的分析与解答，这部分内容无疑对有志于考研的同学大有裨益。

本书附录一提供了中等水平的模拟试题，可作为读者对自身的考核之用；附录二提供的几个程序可作为上机练习时的参考。

书中错讹之处恳望同行、专家和广大读者指正。

作　者

2005年7月于西安

目　录

第1章 误差的基本理论

1.1 基本要求

1. 了解计算方法课程的内容、方法和意义.
2. **了解算法的稳定性.**
3. **理解绝对误差、相对误差、有效数字等概念.**
4. **熟练掌握误差传播的计算.**
5. 了解在数值计算中必须注意的几项原则.

1.2 重点内容提要

1.2.1 计算方法的内容和任务

计算方法最重要的内容是构造算法，这是将数学模型通过离散化的手段化为计算机可以接受(加减乘除)的方式，并在计算机上得以实施，以解决工程和科研中的计算问题. 其次是分析算法的稳定性、收敛性，提高计算的速度，并且减小在计算机中的存储量，这就是在计算时间和空间上的优化. 最后是提高计算精度、减小误差. 以上三大任务就是计算方法的主要内容.

1.2.2 误差及误差的影响

1. 绝对误差与绝对误差限

近似值 x^* 对于它的精确值 x 的差称为**绝对误差**，记为 e^* 或 $e(x^*)$，即

$$e(x^*)=x^*-x$$

绝对误差也常记作 x 的微分 $\mathrm{d}x=e(x^*)=x^*-x$.

注意，绝对误差不是误差的绝对值，它可正可负，当 $e(x^*)>0$ 时称 x^* 为强近似值，否则称为弱近似值.

x^* 的**绝对误差限** ε^* 或 $\varepsilon(x^*)$ 是 $e(x^*)$ 的上界，即

$$|e^*| = |x^* - x| \leqslant \varepsilon^*$$

它等价于 $x = x^* \pm \varepsilon^*$.

2. 相对误差与相对误差限

相对误差 $e_r^* = \dfrac{e^*}{x^*}$

x^* 的相对误差也常记作 $\mathrm{d}\ln x = e_r^* = \dfrac{x^* - x}{x^*}$

x^* 的**相对误差限** ε_r^* 指 e_r^* 的上界，它们满足

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leqslant \varepsilon_r^*$$

3. 近似数的计算

(1) 和、差、积、商的绝对误差公式为

$$e(x^* \pm y^*) \approx e(x^*) \pm e(y^*)$$

$$e(x^* y^*) \approx y^* e(x^*) + x^* e(y^*)$$

$$e\left(\frac{x^*}{y^*}\right) \approx \frac{1}{y^*} e(x^*) - \frac{x^*}{(y^*)^2} e(y^*)$$

其以微分形式可表示为

$$\mathrm{d}(x+y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}(xy) = x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2}$$

(2) 和、差、积、商的相对误差公式为

$$e_r(x^* \pm y^*) \approx \frac{x^*}{x^* \pm y^*} e_r(x^*) \pm \frac{y^*}{x^* \pm y^*} e_r(y^*)$$

$$e_r(x^* y^*) \approx e_r(x^*) + e_r(y^*)$$

$$e_r(x^*/y^*) \approx e_r(x^*) - e_r(y^*)$$

特别地

$$e_r((x^*)^n) = n e_r(x^*), \quad e_r(\sqrt[n]{x^*}) = \frac{1}{n} e_r(x^*)$$

即 x^* 的 n 次幂 $(x^*)^n$ 的相对误差相当于 x^* 相对误差的 n 倍，而 $\sqrt[n]{x^*}$ 的相对误差仅是 x^* 相对误差的 $\dfrac{1}{n}$.

(3) 和、差、积、商的绝对误差限与相对误差限

$$\varepsilon(x^* \pm y^*) \leqslant \varepsilon(x^*) + \varepsilon(y^*),$$

$$\varepsilon(x^* y^*) \leqslant |y^*| \varepsilon(x^*) + |x^*| \varepsilon(y^*)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x^*}{y^*}\right) \leqslant \frac{|y^*| \varepsilon(x^*) + |x^*| \varepsilon(y^*)}{(y^*)^2}$$

只需将上述各式的 ε 改为 ε_r 就得到相应的关于相对误差限的计算公式.特别地,对和的相对误差限还有

$$\varepsilon_r(x^* + y^*) \leqslant \max\{\varepsilon_r(x^*), \varepsilon_r(y^*)\}$$

(4) 函数的绝对误差(限)与相对误差(限)

设 $y = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$e(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i} e(x_i^*)$$

$$e_r(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} e_r(x_i^*)$$

$$\varepsilon(\boldsymbol{x}^*) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}\right| \varepsilon(x_i^*)$$

$$\varepsilon_r(\boldsymbol{x}^*) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}\right| \frac{1}{|f(\boldsymbol{x}^*)|} \varepsilon_r(x_i^*)$$

4. 有效数字

若近似数 x^* 的误差限是 x^* 某一位上数字的半个单位,就说 x^* 准确到该位,由该位到 x^* 的(自左向右看)第 1 个非零数字若有 n 位,就称 x^* 有 n 位**有效数字**.此即

若 x^* 以规格化的浮点数表示为

$$x^* = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_n \times 10^m, \quad a_1 \neq 0$$

当 $|x^* - x| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$ 时,x^* 有 n 位有效数字 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

相对误差与有效数字的关系由定理 1.1 给出.

定理 1.1　设近似数 x^* 有 n 位有效数字,即 $x^* = 0.a_1 \cdots a_n \times 10^m$ $(a_1 \neq 0)$,则 x^* 的相对误差

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$$

反之，若

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leqslant \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$$

则 x^* 至少有 n 位有效数字.

1.2.3　算法的数值稳定性

一个算法如果原始数据有扰动(即误差)，而计算过程舍入误差不增长或增长可以控制，则称此算法是**数值稳定**的，否则，称此算法是数值不稳定的.

定义 1.1(递推算法的稳定性)　若算法

$$\begin{cases} x_n = F(x_{n-1}), & n = 1,2,\cdots \\ x_0 \text{ 给定} \end{cases}$$

是精确算法，而算法

$$\begin{cases} x_n^* = F(x_{n-1}^*), & n = 1,2,\cdots \\ x_0^* = x_0 + e_0 \end{cases}$$

是近似算法，其中 x 是精确值，x^* 是近似值. $e_0 = x_0^* - x$ 是原始误差. 如果存在不依赖 n 的常数 $c > 0$，使

$$|e_n| \leqslant c|e_0|, \quad n = 1,2,\cdots$$

则称该递推算法是**数值稳定**的，否则是数值不稳定的.

1.2.4　数值计算中应遵循的几个原则

1. 尽量避免相近二数相减，因相近二数相减将扩大相对误差并减少有效数字.

2. 尽量避免用绝对值小的数作为除数，因绝对值小的数作为除数会扩大绝对误差.

3. 尽量避免大数“吃掉”小数. 避免的方法是尽量使小数在一起计算，最后再与大数计算.

4. 选用数值稳定的算法.

5. 简化计算步骤，尽量减少运算次数. 例如应用秦九韶嵌套算法于多项式求值计算.

1.3　重点例题解析

例 1.1　设 3 个近似数 $a = 3.65, b = 9.81, c = 1.21$ 均有 3 位有效数字，试计算 $ac + b$，并估计它的相对误差.

分析　这是一个很简单的计算，关键是结果取几位有效数字，这应由 $ac + b$ 的绝对误差限确定.

解　首先，由 a、b、c 均有 3 位有效数字可知绝对误差

$$\mathrm{d}a = \mathrm{d}b = \mathrm{d}c = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

则 $ac + b$ 的绝对误差

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(ac + b) &= a\mathrm{d}c + c\mathrm{d}a + \mathrm{d}b = (a + c + 1)\mathrm{d}a \\ &= (3.65 + 1.21 + 1) \times \frac{1}{2} \times 10^{-2} \\ &= 0.293 \times 10^{-1} < \frac{1}{2} \times 10^{-1} \end{aligned}$$

所以 $ac + b$ 可精确到小数后 1 位，于是

$$ac + b = 14.2$$

它的相对误差限

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(ac + b) &= \mathrm{dln}(ac + b) = \frac{\mathrm{d}(ac + b)}{ac + b} \\ &\approx \frac{0.293 \times 10^{-1}}{14.2} \approx 0.21\% \end{aligned}$$

注　亦可用公式 $\mathrm{dln}(ac + b) \leqslant \max\{\mathrm{dln}ac, \mathrm{dln}c\}$ 估计相对误差限. 因为 $\mathrm{dln}a = 0.001\,4, \mathrm{dln}b = 0.000\,5, \mathrm{dln}c = 0.004\,1$，所以

$$\mathrm{dln}ac = \mathrm{dln}a + \mathrm{dln}c = 0.005\,5$$

$$\mathrm{dln}(ac + b) \leqslant \max\{0.005\,5, 0.000\,5\} = 0.55\%$$

例 1.2　设 $x > 0$，若 x 的相对误差为 δ

(1) 求 $f(x) = \ln x$ 的绝对误差；

(2) 求 $f(x) = \sqrt[n]{x}$ 的相对误差.

解　(1) x 的相对误差为 $\mathrm{dln}x$，它正是 $\ln x$ 的绝对误差，所以 $f(x) = \ln x$ 的绝对误差

$$\mathrm{d}\ln x = \delta$$

(2) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ 的相对误差

$$\mathrm{d}\ln f(x) = \mathrm{d}\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\mathrm{d}\ln x = \frac{\delta}{n}$$

注 由本例可见，应用误差的微分表达式求解函数误差是十分便捷的.

例 1.3 计算球的体积，为使相对误差限为 1%，问度量半径为 R 时允许的相对误差限是多少？

分析 球的体积公式为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$，本例是以球半径 R 的相对误差限 $\mathrm{d}\ln R$ 确定球体积 V 的相对误差限 $\mathrm{d}\ln V$.

解 根据球体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$，有 V 的相对误差

$$\mathrm{d}\ln V = 3\mathrm{d}\ln R$$

由题设 $\mathrm{d}\ln V \leqslant 1\%$，则

$$\mathrm{d}\ln R \leqslant \frac{1}{3}\% \approx 0.33\%$$

故在度量半径为 R 的相对误差不超过 0.33% 时，球体积的相对误差限为 1%.

例 1.4 已知

$$(\sqrt{2}-1)^6 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2}$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} = \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3} = \frac{1}{99+70\sqrt{2}}$$

试判定这 6 个表达式中用哪一个计算的相对误差最小.

分析 由于在计算机中 $\sqrt{2}$ 只能取近似数计算，则这 6 个表达式不再相等. 由避免相近二数相减以减小相对误差的原则知，后 3 个表达式的相对误差小于前 3 个表达式.

解 令 $x = \sqrt{2}$，则 6 个表达式的函数式分别为

$$f_1(x) = (x-1)^6, \qquad f_2(x) = (3-2x)^3$$

$$f_3(x) = 99-70x, \qquad f_4(x) = \frac{1}{(x+1)^6}$$

$$f_5(x)=\frac{1}{(3+2x)^3},\qquad f_6(x)=\frac{1}{99+70x}$$

这些函数在 $x=\sqrt{2}$ 时均相等. 当 $x=x^*=1.4$ 时,有

$$\mathrm{d}\ln f_1(x^*)=\frac{6(x^*-1)^5}{(x^*-1)^6}\mathrm{d}x^*=15\mathrm{d}x^*$$

$$\mathrm{d}\ln f_2(x^*)=\frac{-6(3-2x^*)^2}{(3-2x^*)^3}\mathrm{d}x^*=-30\mathrm{d}x^*$$

$$\mathrm{d}\ln f_3(x^*)=\frac{-70}{99-70x^*}\mathrm{d}x^*=-70\mathrm{d}x^*$$

$$\mathrm{d}\ln f_4(x^*)=\frac{-6}{x^*+1}\mathrm{d}x^*=-2.5\mathrm{d}x^*$$

$$\mathrm{d}\ln f_5(x^*)=\frac{-6}{3+2x^*}\mathrm{d}x^*=-1.0\mathrm{d}x^*$$

$$\mathrm{d}\ln f_6(x^*)=\frac{-70}{99+70x^*}\mathrm{d}x^*=-0.36\mathrm{d}x^*$$

由计算知,第 6 个表达式的相对误差最小.

注 通过类似的计算可知第 6 个表达式的绝对误差也最小,故第 6 个表达式是绝对误差和相对误差都最小的计算式.

例 1.5 设近似数 $x^*=0.a_1a_2\cdots a_n\times 10^m(a_1\neq 0)$,试证:

(1) 若 x^* 具有 n 位有效数字,则 x^* 的相对误差 $e_r(x^*)$ 满足

$$|e_r(x^*)|=\frac{|x^*-x|}{|x^*|}\leqslant\frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}$$

(2) 若 x^* 的相对误差满足

$$|e_r(x^*)|=\frac{|x^*-x|}{|x^*|}\leqslant\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$$

则 x^* 有 n 位有效数字.

分析 题设 x^* 有 n 位有效数字,表明 $|x^*-x|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{m-n}$,再考虑到 x^* 的相对误差定义,立证.

证 (1) 已知 x^* 有 n 位有效数字,则

$$|x^*-x|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{m-n}$$

于是

$$|e_r(x^*)| = \frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n}}{0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m}$$

$$\leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n}}{0.a_1 \times 10^m} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}$$

(2) $x^* = 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m = a_1.a_2\cdots a_n \times 10^{m-1}$,则

$$|x^*| \leqslant (a_1 + 1) \times 10^{m-1}$$

由题设

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leqslant \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)}$$

则

$$|x^* - x| = |x^*| \frac{|x^* - x|}{|x^*|}$$

$$\leqslant (a_1 + 1) \times 10^{m-1} \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

根据有效数字的定义知 x^* 有 n 位有效数字.

例 1.6 (1) 已知近似数 x^* 有 2 位有效数字,试求其相对误差限.

(2) 已知近似数 x^* 的相对误差限为0.3%,问 x^* 至少有几位有效数字?

分析 可直接利用例 1.5 的结论求解.

解 (1) x^* 有 2 位有效数字,即 $n = 2$,可设

$$x^* = 0.a_1a_2 \times 10^m,\ a_1 \geqslant 1$$

则 x^* 的相对误差

$$\frac{|x^* - x|}{|x^*|} \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-1}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-1} = 5\%$$

所以,有 2 位有效数字的近似数的相对误差限为 5%.

注 一般地,有 n 位有效数字的近似数的相对误差限为$\frac{1}{2} \times 10^{1-n}$.

(2) **分析**　将相对误差限放大为 $\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$，则可由例 1.5(2) 确定 x^* 有 n 位有效数字.

设 x^* 有 n 位有效数字，即相对误差

$$\frac{|x^*-x|}{|x^*|}\leqslant \varepsilon_r(x^*)<\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$$

因 $\varepsilon_r(x^*)=0.3\%$，所以

$$0.3\%=3\times 10^{-3}<\frac{1}{2\times 10}\times 10^{-1}$$

$$=\frac{1}{2\times(9+1)}\times 10^{-1}<\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-1}$$

这是由于 $1\leqslant a_1\leqslant 9$.

由最后的不等式知 $-(n-1)=-1$，所以 $n=2$，则 x^* 至少有 2 位有效数字.

例 1.7　设 $x=\sqrt{70}$，它的近似数 x^* 至少取几位有效数字方能保证其相对误差小于 0.1%？

分析　本例可按例 1.6(2) 的方法求解，但利用该方法估计的有效数字偏于保守，可在给出 $x=\sqrt{70}$ 时，结合例 1.6(1) 解之.

解　因为 $8\leqslant\sqrt{70}\leqslant 9$，则

$$\sqrt{70}=8.a_2a_3\cdots=0.8a_2a_3\cdots\times 10^1$$

设 x^* 有 n 位有效数字，则

$$\varepsilon_r(x^*)\leqslant\frac{1}{2\times 8}\times 10^{1-n}$$

要求 $\varepsilon_r(x^*)\leqslant 0.1\%$，只要

$$\frac{1}{2\times 8}\times 10^{1-n}\leqslant 0.1\%$$

解出 $n\geqslant 2.8$，即取 $n=3$.

故 $\sqrt{70}$ 的近似数至少取 3 位有效数字方能保证其相对误差小于 0.1%.

注　$x=\sqrt{70}$ 取 3 位有效数字的近似数是 $x^*=8.37$.

例 1.8　试求当 $x=0.001$ 时函数 $y=f(x)=\frac{1+x-e^x}{x^2}$ 的近似值