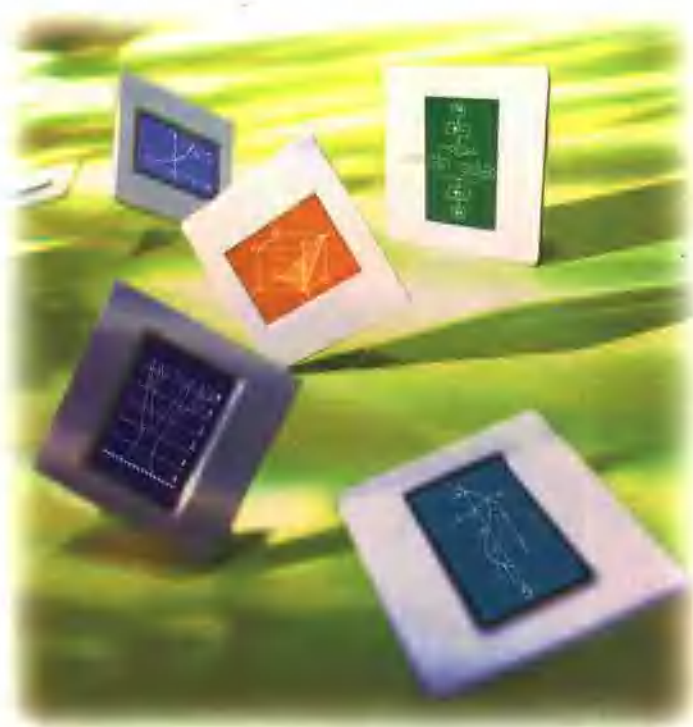


配普通高中课程标准实验教科书 • 数学

高中数学 新课程 教学案例选编



凤凰出版传媒集团



江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

配普通高中课程标准实验教科书 • 数学

高中数学 新课程 教学案例选编

主编 罗强



凤凰出版传媒集团



江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

.....
图书在版编目(CIP)数据

高中新课程数学教学案例选编/罗强等编著. —南京:
江苏教育出版社, 2006. 8

ISBN 7-5343-7727-7

I. 高... II. 罗... III. 数学课—教案(教育)—
高中 IV. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 105676 号
.....

书 名 高中新课程数学教学案例选编
责任编辑 杨新华
出版发行 凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社(南京市马家街 31 号 210009)
网 址 <http://www.1088.com.cn>
集团网址 凤凰出版传媒网 <http://www.ppm.cn>
经 销 江苏省新华发行集团有限公司
照 排 南京展望文化发展有限公司
印 刷 江苏淮阴新华印刷厂
厂 址 淮安市淮海北路 44 号(邮编 223001)
电 话 0517-3941427
开 本 787×1092 毫米 1/16
印 张 10
字 数 213 000
版 次 2006 年 8 月第 1 版
2006 年 8 月第 1 次印刷
印 数 1-4 075 册
书 号 ISBN 7-5343-7727-7/G·7412
定 价 20.00 元
批发电话 025-83260760, 83260768
邮购电话 025-85400774, 8008289797
短信咨询 10602585420909
E-mail jsep@vip.163.com
盗版举报 025-83204538

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换
提供盗版线索者给予重奖

序

2005年9月开始,江苏省步入高中课程改革实验。与原有高中数学课程相比,新课程在许多方面发生了大的变化。首先是课程内容变化较大,增加了许多新的内容。如必修与选修系列1、2中,就有用二分法求方程近似解、算法初步、概率、统计案例、框图等。第二是教学方式与学习方式发生了变化,需要教师转变教学观念。如以学生为主体,促进学生主动探究、经历数学的发生发展过程,发展数学思维能力,等等。第三是数学课程目标发生了变化。除了传统的知识技能之外,新课程目标在能力发展、情感发展等方面提出了较高的要求,等等。

如何转变观念,适应新课程的教学要求?我们知道,教学的中心与主阵地课堂。课堂既是课改各种理念的实现场所,又是教师和学生行为变化的场所。因此,课堂教学是十分重要的。

然而,新课程的教学实验刚刚开始,没有成功的经验可以借鉴。只有大胆地进行探索,才能获得与新课改理念相符的课堂教学方案,进一步加以总结提升,为后面的实验奠定基础。这种探索尽管本身带有风险,可能有许多不完善的地方,也可能会出现失误,但这是改革过程中必须要经历的阶段。假如没有第一次吃螃蟹的勇敢者,也许我们至今还享受不到那绝伦的美味。

苏州市教研室组织本市高中数学教师,对一年来的实验探索进行总结与反思,编写出《高中新课程数学教学案例选编》(以下简称《案例》)一书。《案例》集中反映了一批中青年教师一年来的研究成果。它不是一般的教学设计,而是在分析比较基础上精心设计的案例,多数案例都是所在学校公开课、研讨课的资料,每个案例都是一个群体智慧与汗水的结晶。

这些案例具有以下特点:(1)综合性,通过对传统教材、课改实验的两种版本教材进行详细的分析比较,扬各家之长,避各家之短。不盲从教材,以批判的眼光分析各套教材,对于课堂教学和教材发展都是有益的。(2)探索性,通过自己的思考,大胆进行探索,力图做出一些创新。而且,当你认真研读这些案例时,确实会发现许多创新之处。(3)典型性,不求每课都编写教学设计,但对教师教学感到困难的各种类型课题都有足够的研究,所选案例都是极为典型的。本书虽然只有二十多个案例,但基本上能代表整个必修系列、选修系列1、选修系列2的教学状况。相信每一位教师,能从这些案例中得到启发,加强探索,进一步做好课改的实验工作。

毋庸置疑,第一次进行教材实验,对新教材的编写意图尚难以全面把握,加上对旧教材的难以马上割舍的依恋等因素,《案例》中有些评价,可能会有失偏颇。但我觉得:能提出不同意见或建议,这本身就是一种勇气与胆识,这说明他们在深入思考了。

关于苏教版高中数学新教材的编写意图,已经在各种刊物和会议宣传了,这里仅作几点补充性说明:(1)教材是以模块为整体,采取整体贯通的做法进行编写,在进行教学时,必须站在整体的角度进行,仅从“点”上考察,与其他教材相比是说不清楚的。若从“整体”看教材,便可以得“全豹”。(2)数学教材应更加关注数学的本质的揭示,离开了数学,一切情境都没有价值。当然,这里的数学不仅仅指数学知识。教材中选择的问题情境只是一种示范、一种启发,教学时应根据具体情况加以重新选择。(3)每章的章头图、章首语、本章回顾是相当重要的,可惜目前的设计与教学对此关注太少。(4)有位数学家说:教材必须给教师留有空间,留给教师说的话,一定不能写出来。作为教师必须深刻领会这种处理的意图。过去的教材写得太“满”了,现在教材中关于学生活动、方法小结、回顾反思等内容,把设计与处理空间留给教师了。教师必须要动脑筋思考,怎样处理、利用好这些空间。否则,简单地将所有内容全罗列进教材,教师是“轻松”了,但他们创造的空间与机会就少得多。

教学是艺术,艺术要探索,艺术要创造。

愿以这本《案例》为起点,抓住课改机遇,开始我们的探索,开始我们的创造。

李善良

06年7月

前 言

2004年9月,广东、山东、宁夏、海南4个省(区)率先开始进行高中新课程的实验,2005年9月,江苏省加入高中新课程实验的行列,2006年9月,又有辽宁、天津、安徽、浙江、福建5个省市开始实验高中新课程。

2004年9月,在苏州市教育局教研室的规划与组织下,江苏省教育科学规划重点课题“东部发达地区高中数学新课程的实践与探索”如期启动。课题研究的目的,是为了主动应对新课程改革,以课题研究为抓手,对《普通高中数学课程标准(实验)》(以下简称为《课程标准》)进入学习与研究,针对新课标、新教材的特点,从课程实施、教学组织、学习指导、评估检测等各方面,及早进行师资与实践等方面的准备。

在此期间,以行动研究为主的教学实验,在课题组成员所在的11所学校内正常开展,课题组成员精心选择了新教材(以苏教版普通高中课程标准实验教科书为主)中的一些新内容,进行了教学尝试与对比研究。2005年2月,由苏州市太仓高级中学偶卫国老师执教的《二分法求方程的近似解》一课,出现在江苏省高中数学教学改革研讨会的会场,引起了不小的轰动,这也是江苏省一线的数学教师第一次亲历数学新课程。

2005年秋,江苏省如期全面进入高中新课程,“东部发达地区高中数学新课程的实践与探索”课题也按原计划进入了第一期实验,这意味着课题组成员可以以自己的每一节课、每一个知识点、每一个学生……作为研究对象,也意味着在上好每一节课时,教师要带着思考、带着问题,用自身的教学行为进行课程改革的实践与探索。

在实践新课程的过程中,我们直面挑战,教师作为课程改革的参与者,既要从宏观的角度深入思考数学教学中诸如基础观、数学能力、数学技能、教学方式等一些核心问题,同时也需要从具体实施这个角度对原有内容和新增内容的教学要求、教学方式等做相应的思考。同时,在高考配套改革不明朗的情况下,在应试压力不断加剧的氛围中,我们也深感困惑,新课程教学的度究竟应该如何把握?这样的挑战与困惑促使我们积极思考,努力探索,于是,就有了今天的这本案例集。

案例集中的每一个案例基本上由6个部分组成:目标定位、多向对比、案

例聚焦、教学示例、资源点击、案例反思。其中,“案例聚焦”是针对所选的教学内容提出的焦点问题,是在教学中所面临的各种困难与矛盾的焦点,这些焦点问题实际上就是我们的研究意图;“教学示例”则较为灵活,可能以教学过程的整体设计方式呈现,也可能是师生互动的片断实录,在某些片断或设计后面会有些说明,或者从某个角度来阐述了教学的关键,或者说明了教学设计的设想,或者提供了教学后的反思……“案例反思”则是对于案例的一些理性思考,作者试图通过反思,来回答“案例聚焦”中提出的问题,或者提出一些新的问题,以激发读者更进一步的思考。

我们深知,这些思考和探索还很粗浅,我们希望,这本案例集既是一个共享收获的载体,也能够引发更深入的思考和探索。对于案例中的观点与见解,我们欢迎专家与同行的点评与指教,我们期待着与您交流。我们只有一个心愿——以新课程为契机,转变数学“教”与“学”的方式,最终促进教师与学生的共同发展!

编者于苏州

2006年6月28日

目 录

Contents

- 1 交集、并集 / 1
- 2 幂函数 / 6
- 3 用二分法求方程的近似解 / 11
- 4 函数模型及其应用 / 19
- 5 直线与平面平行 / 28
- 6 平面几何与立体几何的类比 / 34
- 7 直线的斜率(一) / 40
- 8 直线的斜率(二) / 47
- 9 直线与圆的位置关系 / 53
- 10 循环结构 / 58
- 11 线性回归方程 / 66
- 12 几何概型 / 73
- 13 平面向量基本定理 / 79
- 14 平面向量的数量积 / 85
- 15 向量的应用 / 91
- 16 两角和与差的正弦 / 99
- 17 等差数列的前 n 项和 / 106
- 18 等比数列的应用 / 111
- 19 基本不等式的证明 / 116
- 20 平均变化率 / 121
- 21 椭圆的标准方程 / 127
- 22 直线的方向向量与平面的法向量 / 132
- 专家视角
- 1 方程近似解、二分法及其他 / 136
- 2 从刹车距离谈起 / 144
- 3 我对算法的理解 / 147



交集、并集

苏州市第三中学 夏正华



目标定位

根据《课程标准》的要求,本节课的目标定位如下:

1. 理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.
2. 能使用 Venn 图表达集合的关系及运算,体会直观图对理解抽象概念的作用.



多向对比

1. 与原大纲相比,《课程标准》在“交集、并集”的教学中,明确提出集合的交、并、补是集合间的运算,明确了集合是一种数学语言,这为以后发展学生运用数学语言进行表达和交流的能力奠定了基础.

	普通高中数学课程标准	原数学教学大纲
课 题	交集、并集	交集、并集
体系地位	必修 1	必修第一册(上)
教学目标	理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集. 能使用 Venn 图表达集合的关系及运算,体会直观图示对理解抽象概念的作用	理解交集、并集的概念

2. 老教材中,这一节是作为必修内容学习,但是教学大纲中未明确提出 Venn 图的教学要求,没有把交、并、补作为集合的运算进行教学;《课程标准》中明确提出运用 Venn 图来帮助理解抽象的概念,这对学生学习是有益的.至于点集的交集、并集,可以以初中学习过的函数图象为背景加以补充.



案例聚焦

1. 如何让学生感受到用集合表示数学内容时的简洁性、准确性

集合作为一种数学语言,如何使学生感受到用集合表达数学内容时所体现出的简洁性、准确性? 学生在数学语言的学习过程中,是否对用集合语言描述数学和现实生活中

的问题充满兴趣?

2. 如何让学生正确区分“且”与“或”的含义

对于 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$, 如何理解“且”的含义?

$A \cap B$ 是两个集合 A, B 运算的结果, 它包含有集合 A, B “所有”的公共元素, 而不是“部分”公共元素. 还有, 并不是任何两个集合都有公共元素, 当集合 A 与 B 没有公共元素时, 不能说 A 与 B 没有交集, 而是 $A \cap B = \emptyset$.

对于 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$, 其中“或”的含义与日常用语中的“或”的意义不尽相同, 用它连接的并列成分之间不是相互排斥的. “ $x \in A, \text{或 } x \in B$ ”包括下列三种情况: ① $x \in A$, 但 $x \notin B$; ② $x \in B$, 但 $x \notin A$; ③ $x \in A$, 且 $x \in B$.



教学示例

1. 问题情境, 学生活动

师: 同学们, 今天我们先进行一项调查: (1) 请中考数学成绩高于 100 分的举手; (2) 请中考外语成绩在 100 分以上的同学举手.

师: 请刚才举两次手的同学再次举手(可准备些小物品奖励), 大家能否表达出刚才获得奖励的同学具备的条件是什么?

生: 我班中考数学、外语成绩都高于 100 分的同学.

师: 若用集合 A 表示数学成绩高于 100 分的同学, 集合 B 表示外语成绩高于 100 分的同学, 集合 C 表示数学和外语成绩都高于 100 分的同学, 你能用 Venn 图表示集合 A, B, C 吗?

图 1-1 中阴影部分表示集合 C , 即中考数学、外语分数都高于 100 分的同学.



图 1-1

2. 建构数学

师: 通过刚才的讨论, 想一想, 当集合 A 和集合 B 用 Venn 图表示时, 其公共部分表示的集合中的元素与集合 A 和集合 B 中的元素有何关系?

生: 它的元素是集合 A 和集合 B 的公共元素.

师: 对, 我们把所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的交集, 用符号表示为 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”.

用符号语言表述为 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{且 } x \in B\}$,

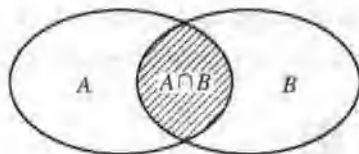


图 1-2

用图形(语言)表述为图 1-2.

对于交集定义的说明:

- (1) $A \cap B$ 表示一个集合;
- (2) “且”的含义是“同时”, “所有”的含义是“ A 与 B 中的公共元素一个不能少”;
- (3) 当集合 A 和 B 没有公共元素时, 表示 $A \cap B = \emptyset$.

师： $A \cap B$ 与 A 有何关系？ $A \cap B$ 与 B 有何关系？如何表示它们之间的关系？

生： $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$.

师：好，请写出集合 $\{-1, 0, 1\}$ 与 $\{0, 1, 2, 3\}$ 的交集.

生： $\{0, 1\}$.

师：我们回到刚开始的调查，请大家表述刚才所有举过手的同学具备的条件是什么？

生：中考数学成绩高于100分或外语成绩高于100分.

师：若用集合 A 、 B 、 C 分别表示数学成绩高于100分的同学，外语成绩高于100分的同学，数学成绩高于100分或外语成绩高于100分的同学，则其Venn图又该如何体现？

生：

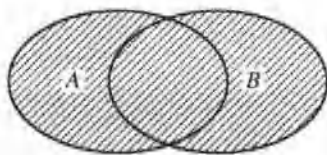


图 1-3

图 1-3 中阴影部分表示集合 C ，即中考数学成绩高于100分的同学或外语成绩高于100分的同学.

师：这也是由两个集合经过运算产生的另一个新的集合，它给我们把集合 A 与集合 B 合并在一起的感觉，称为集合 A 、 B 的并集.

请大家从元素与集合的关系，仿照交集概念的叙述方法，试叙述并集的概念.

生：我们把所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素构成的集合称为集合 A 与 B 的并集，用符号表示为 $A \cup B$ ，读作 A 并 B .

师：用符号语言表述为 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{或 } x \in B\}$.

用图形(语言)表述为图 1-4.

师：要说明的是“或”的含义是集合 A 中的所有元素要取，集合 B 中所有元素也要取，但是注意公共元素只取一次.

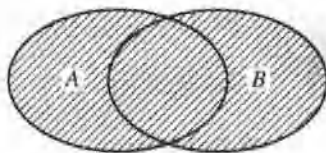


图 1-4

师： $A \cup B$ 与 A 有何关系？ $A \cup B$ 与 B 有何关系？如何表示它们的关系？

生： $A \cup B \supseteq A, A \cup B \supseteq B$.

师：写出集合 $\{-1, 0, 1\}$ 与 $\{0, 1, 2, 3\}$ 的并集.

生： $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

师：好！注意公共元素0和1只能取一次！

3. 数学应用

例 1 《苏教版普通高中课程标准实验教科书·数学(必修1)》P12例2)

学校举办了排球比赛，某班45名同学有12名同学参赛，后来又举办了田径比赛，这个班有20名同学参赛，已知两项都参赛的有6名同学，两项比赛中这个班有多少名同学没有参加比赛？

分析 设集合 $A = \{x \mid x \text{ 为参加排球比赛的同学}\}$, $B = \{x \mid x \text{ 为参加田径比赛的同学}\}$, 则 $A \cap B = \{x \mid x \text{ 为参加两项比赛的同学}\}$.

作出 Venn 图, 可知没有参加比赛的同学有 $45 - (12 + 20 - 6) = 19$ (名).

教学提示 引导学生将实际问题表示为集合语言是关键.

课后反思 集合是一种语言, 除用文字描述外, 还有符号表示与图形表示 (Venn 图), 在分析各集合之间的交集、并集的关系及其含义时, 一般用 Venn 图分析较为方便.

例 2 设集合 $A = \{x \mid x > 0\}$, $B = \{x \mid x \leq 1\}$, 求 $A \cap B$ 和 $A \cup B$.

分析 集合 A, B 均为 (实) 数集, 可用数轴直观表示, 其公共部分即为两个集合的交集, 将数轴上两部分并到一起即为两个集合的并集.

课后反思 要求多个集合的交集、并集, 可先求其中两个集合的交集、并集, 再逐步计算与其余集合的交与并.

例 3 设集合 $A = \{(x, y) \mid y = -4x + 6\}$, $B = \{(x, y) \mid y = 5x - 3\}$, 求 $A \cap B$.

解答 略

课后反思 求集合的交集、并集先要识别集合的类型: 点集还是数集? 然后选择不同的应对方法, 如: 作 Venn 图、画数轴或利用函数图象.

4. 拓展(区间的概念)

为了叙述方便, 在以后的学习中, 我们常常会用到区间的概念……(下略).

5. 课堂小结

今天我们研究了集合之间的运算: 交集、并集, 这是从我们现实生活的情境中产生的数学概念, 可以用三种语言形式: 文字、符号、图象来表示.



资源点击

1. 课后作业建议

- (1) 课本 P13 练习, 以及习题 1.3 题 1 作为课内练习.
- (2) 习题 1.3 第 2~第 10 题可选择适量的习题作为作业布置 (一般以 30 分钟能完成为宜).

2. 拓展资源

集合的元素个数

在研究集合时, 会遇到有关集合中元素个数问题. 我们把有限集合 A 的元素个数记作 $\text{card}(A)$, 例如, $A = \{a, b, c\}$, 则 $\text{card}(A) = 3$.

看一个例子: “学校小卖部进了两次货, 第一次进的货是圆珠笔、钢笔、橡皮、笔记本、方便面、汽水共 6 种, 第二次进的货是圆珠笔、铅笔、火腿肠、方便面共 4 种, 两次一共进了几种货?”

回答: 两次一共进了 $10 (= 6 + 4)$ 种.

这显然是不对的, 让我们试着从集合的角度考虑这个问题.

用集合 A 表示第一次进货的品种, 用集合 B 表示第二次进货的品种, 就有

$A = \{\text{圆珠笔, 钢笔, 橡皮, 笔记本, 方便面, 汽水}\},$

$B = \{\text{圆珠笔, 铅笔, 火腿肠, 方便面}\}.$

这里 $\text{card}(A) = 6, \text{card}(B) = 4$, “两次一共进了几种货?” 指的是求 $\text{card}(A \cup B)$. 这个例子中, 两次进的货里有相同的品种, 相同的品种数实际就是 $\text{card}(A \cap B)$.

$\text{card}(A), \text{card}(B), \text{card}(A \cup B), \text{card}(A \cap B)$ 之间有什么关系呢? 可以算出

$$\text{card}(A \cup B) = 8, \text{card}(A \cap B) = 2.$$

一般地, 对任意两个有限集合 A, B , 有 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.



案例反思

1. 教学的重点在体现集合语言作为数学的基本语言的地位

将集合作为一种语言来组织教与学, 可以使學生感受到用集合表示数学内容时的简洁性、准确性, 帮助学生学会用集合语言描述数学对象, 发展学生运用数学语言进行表达和交流的能力. 如情境中设计的问题及例 1 均能较好说明集合语言的简洁性、准确性.

学生在学完本章后, 应正确理解以及恰当运用集合语言, 包括:

- (1) 正确使用有关的术语和符号;
- (2) 使用集合语言表述数学问题;
- (3) 运用集合的观点研究、处理数学问题;
- (4) 针对不同的具体问题时, 恰当地选择自然语言、图形语言、集合语言进行描述.

数学科学之所以被广泛应用, 一个重要的原因是数学能运用数学语言将客观事物的数量关系和数学结构表示出来, 符号化、形式化是数学的一个显著特点, 学习数学的任务之一, 就是学习用形式化语言去表述、解释、解决各种问题.

2. Venn 图、数轴等是集合的一种重要的表示方法——图示法

本案例由始至终借助 Venn 图和数轴来引入数学概念, 进行集合运算, 这对学生正确区分“且”与“或”的含义, 认识集合语言的简洁性、准确性是有益的.



幂函数

张家港市暨阳高级中学 瞿高海



目标定位

根据《课程标准》的要求,幂函数的教学目标定位如下:

(一) 知识与技能

通过实例,了解幂函数的概念;结合函数 $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象,了解它们的变化情况.

(二) 过程与方法

1. 通过观察几个简单的幂函数的图象,培养学生抽象概括能力和识图能力;
2. 使学生进一步体会数形结合的思想.

(三) 情感态度与价值观

通过生活中的实例引出幂函数的概念,使学生体会到生活中处处有数学,激发学生的学习兴趣.

利用 Excel、几何画板等工具软件,了解幂函数与指数函数、对数函数、多项式函数的本质差别,使学生充分认识现代技术在人们认识世界过程中的作用.



多向对比

1. 与原大纲相比

幂函数是原人教版教材*(代数·上册)的一个知识点,对它的考查要求经历了一个从难到易的过程. 2002 年 4 月版的新大纲中,删去了幂函数,同时,在人教版全日制普通高级中学教科书(试验修订本·必修)中也没有出现幂函数的概念.

	普通高中数学课程标准	原数学教学大纲
课 题	幂函数	幂函数
体系地位	必修(必修 1)	代数(上册)

* 如果是人教社老教材,称为原人教版,再早的就不必再比较了;符合 2002 新大纲的称为人教版实验教材.

续表

	普通高中数学课程标准	原数学教学大纲
教学目标	通过实例,了解幂函数的概念;结合函数 $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$, $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象,了解它们的变化情况	掌握幂函数的概念及其图象和性质. 在考查掌握函数性质和运用性质解决问题时,所涉及的幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 中的 α 限于在集合 $\{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$ 中取值

2. 不同的版本的处理差异

这里仅选择人教 A 版、人教 B 版与苏教版加以对比.

	苏教版	人教 A 版	人教 B 版
课 时	2	2	2
分 类	有(明确)	有(明确)	有(明确)
例题说明	有一道例题(写出函数的定义域和奇偶性)	有一道例题(证明幂函数的单调性)	有两道例题,例 1 是利用幂函数单调性比较两个数的大小,例 2 是讨论函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的性质
方法提炼小结	没有做明显的方法小结	在例 1 后有证明函数单调性的方法:作差和作比	例 1 和例 2 有方法,但没有提炼
练习、习题	练习两题,习题分 2 个层次:感受·理解(4 题),思考·运用(1 题)	无练习,习题 2.3 有 3 题	习题 3-3A 4 题,习题 3-3B 4 题
阅读拓展	无	无	幂函数与凸函数

苏教版教材从一个生活实例出发引出幂函数的概念,从“数”上研究特殊函数 $y=x^3$, $y=x^{\frac{1}{2}}$, $y=x^{-2}$ 的定义域、奇偶性,从“形”上研究特殊函数 $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^{\frac{1}{2}}$, 并找出这三个函数共同的特性;人教 A 版教材从 5 个实例出发引出幂函数概念,画出函数 $y=x^{\alpha}$, $\alpha=1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ 的图象,观察并归纳函数的性质(定义域、值域、单调性、奇偶性、定点);人教 B 版教材由函数 $y=x$, $y=x^2$, $y=\frac{1}{x}$ 引出幂函数的概念,通过举例画出函数 $y=x$, $y=x^{\frac{1}{2}}$, $y=x^2$, $y=x^{-1}$, $y=x^3$ 的图象,归纳出它们的共同性质并进行简单的应用.

各套教材均严格按课标要求处理此部分内容,所有的教学目标、内容体系均未超出课标的要求. 苏教版从数与形两方面研究幂函数的图象与性质,体现了函数全章研究方

法的统一,有利于学生自主建构研究函数的方法.



案例聚焦

1. 如何用实例自然地引出幂函数的概念

教材选择了商品的价格和需求关系这样一个生活实例,根据表格给出的数据得到价格 x 与需求量 y 之间近似地满足关系 $y = 114.876 4x^{-0.381 519 2}$, 指出这个关系式与 $y = x^{-0.381 519 2}$ 是相关联的,但它又不是指数函数,引出幂函数的概念.

这里有两个问题值得思考:一是价格 x 与需求量 y 的关系式是怎样得到的?二是有没有其他实例更贴切于幂函数的函数模型.

2. 用什么办法指导学生归纳出幂函数的共同特征

面对多个不同幂函数图象,怎样发现它们的共同特征?如何体现“数据”的处理分析和归纳的能力?当 $y = x^\alpha$ 中的 α 不断变化时,它的图象是怎样变化的?这些通过变化得到的一系列图象又有怎样的共同特性?

可以分 $\alpha < 1$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha > 1$ 三种不同情形来发现.

3. 现代教育技术怎样使用最有效

我们可以通过 Excel 进行数据拟合,得到价格 x 与需求量 y 的函数关系式(在拟合过程中,可分别尝试用指数、二次多项式、乘幂),也可通过用“几何画板”动态地显示出函数 $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象,以及 $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha > 1$ 三种不同情形下的幂函数的图象,从而发现这些函数图象有什么共同特性.现代教育技术的使用,有助于课堂教学效益的提高,但不能在使用现代教育技术的时候,忽视教师和学生主体作用.



教学示例

1. 问题情境

(Flash 动画显示太阳系九大行星绕太阳运动)

表一中给出了九大行星离太阳的距离和它们运行的周期,试建立这两组数据之间的关系.

表 一

	水 星	金 星	地 球	火 星	木 星	土 星	天王星	海王星	冥王星
距离 $d/10^6$ km	57.9	108.2	149.6	227.9	778.3	1 427	2 870	4 497	5 907
周期 T/d	88	225	365	687	4 329	10 753	30 660	60 150	90 670

2. 学生活动

在 Excel 工作表中输入上述数据,作出散点图后观察散点趋势,尝试用指数、对数、乘幂和二次多项式拟合,但发现指数、对数、二次多项式不能较好地进行拟合,再进行观察

发现,运行周期 T 与 d 满足关系 $T = 10^{-0.669\,14} d^{1.499\,733} \approx 0.199\,9 d^{1.499\,7} \approx 0.2 d^{\frac{3}{2}}$.

师:这就是开普勒第三定律的数学表达式,它揭示了“公转时间的平方与平均距离的立方成正比”这一天体运动定律(开普勒发现这个规律花了18年时间).

3. 建构数学

通过观察、对比,发现 $y = d^{\frac{3}{2}}$, 这是一个区别于指数、对数、二次多项式的函数,我们把这样的函数定义为幂函数.

定义 一般地,我们把形如 $y = x^{\alpha}$ 的函数称为幂函数,其中 x 是自变量, α 是常数.

思考 判断下列函数中哪些是幂函数:

$$y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^0 (x \neq 0), y = 2x^2, y = (x-1)^2, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

合作探究 幂函数与指数函数有什么区别与联系?(组织学生回顾指数函数的概念,明确二者的区别,得出如下结论)

结论 幂函数和指数函数都是我们高中数学中研究的两类重要的基本初等函数,从它们的解析式来看有如下区别:

对幂函数来说,底数是自变量,指数是常数;

对指数函数来说,指数是自变量,底数是常数.

4. 数学应用

我们已经对幂函数的概念有了比较深刻的认识,根据我们前面学习指数函数、对数函数的学习经历,我们下面应该研究它们的图象和性质.

例1 写出下列函数的定义域,并指出它们的奇偶性:

$$(1) y = x^3; \quad (2) y = x^{\frac{1}{3}}; \quad (3) y = x^{-2}.$$

教学说明 从“数”上的研究得到它们的定义域和奇偶性.

思考 函数 (1) $y = x^3$; (2) $y = x^{\frac{1}{3}}$; (3) $y = x^{-2}$ 的单调性如何?

发现 如果从“数”来研究,发现要得到单调性情况,比较困难,此时可想到尝试作出它们的图象.

用几何画板作函数 $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的图象,并观察图象,找出它们的共同性质:

(1) 函数的图象都过点 $(0,0)$, $(1,1)$;

(2) 在第一象限内,函数的图象随 x 的增大而上升,函数在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调增函数.

思考 (1) 函数 $y = x^{\alpha} (\alpha > 0)$ 的图象有什么特征? (2) 通过 $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$ 联想函数 $y = x^{\alpha} (\alpha < 0)$ 的图象有什么特征?

合作探究 从学生已有知识出发,借助几何画板,分层次逐步引导学生观察图象与幂函数解析式中 α 符号的关系,抽象、归纳出幂函数的性质和幂指数的关系.

思考 不借助计算机你能画出函数 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 的图象吗?