

高等学校规划教材

网络与系统分析

杨芳春 主编

煤炭工业出版社

高等学校规划教材

网络与系统分析

杨芳春 唐景肃 李振壁 编
王雪丹 徐建华

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书共分十章。比较全面地阐述了网络与系统的基本理论和分析方法。内容包括系统及其数学模型、网络拓扑分析、二端口网络分析、时域分析法、根轨迹法、频域分析法、采样离散系统分析、非线性控制系统分析、状态空间分析法。

本书为高等工科院校工业自动化、电气技术及电力系统自动化等专业的教材,亦可供有关技术人员自学与参考。

高等学校规划教材

网络与系统分析

杨芳春 主编

责任编辑 胡玉雁 褚庆军

*

煤炭工业出版社 出版发行

(北京安定门外和平里北街 21 号)

中国科学院印刷厂 印刷

*

开本 $787 \times 1092 \text{mm}^1/_{16}$ 印张 23.5

字数 550 千字 印数 1—2 600

1995 年 12 月第 1 版 1995 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 7-5020-1261-3/O157·5

书号 4029 A0326 定价:18.30 元

出版说明

《中国教育改革和发展纲要》指出,教育改革“要按照现代科学技术文化发展的新成果和社会主义现代化建设的实际需要,更新教学内容,调整课程结构,加强基本知识、基础理论和基本技能的培养和训练,重视培养学生分析问题和解决问题的能力”。“高等学校教材要在积极扩大种类的同时,不断提高质量,加强理论与实际的联系,力求思想性和科学性的统一”,要适应教学改革需要。

由阜新矿业学院、山西矿业学院、黑龙江矿业学院、淮南矿业学院等四所院校进行的工业电气自动化专业教学综合改革,按照“知识归类、科学组合、优化设课、精简学时、加强实践”的改革原则,制定新的教学计划。根据培养目标的要求,新计划对于原有课程,采用删、调、合、增的方法改变原有课程体系,将工业电气化自动化专业电类课程归并为四大类:基础理论课、方法论课、应用技术基础课和有针对性的专业课。

为了适应深化教学改革的需要,我们首先组织编写、出版以下几种教材:

电工原理
网络与系统分析
电机与传动
控制工程技术
微机原理与接口技术
微机测控技术
矿山自动控制系统
电工技术 CAA
电气实验技术
电气工程实践教程

煤炭工业部科技教育司

教材编审室

一九九四年十月

前 言

《网络与系统分析》是煤炭高等学校“八五教材建设规划”的教材,它是本科工业电气自动化专业教学综合改革系列教材之一,也可供其它有关专业的大学生和科技人员使用。

本书是教学综合改革中设置的新课。在体系上从系统观点出发,将近代网络分析、经典控制系统分析及状态空间分析组合在一起,以介绍系统分析方法论为主,重点培养学生掌握系统分析的能力。将系统校正和控制器设计、最优控制等工程内容,放在《控制工程技术》课中讲授。

本书共分为十章。从系统模型理论及建模方法入手,以电、机、液、气、热等五大系统为典型,建立线性与非线性系统、连续与离散系统及端口与内部描述的数学模型,按相似理论讨论分析系统的对偶与模拟方法,使系统在数学描述上获得统一;在工程分析方法上将介绍拓扑分析、多端口分析、传递函数、信号流图、时域分析、根轨迹分析、频域分析、采样离散系统分析、非线性分析及状态空间分析等;在内容安排上是先模型后方法,先时域后频域、先连续后离散、先线性后非线性、先经典后现代;在每章中选择有启发性及典型性的工程实例和习题;全书的符号、图例、单位均采用国家新标准。

全书按 110 学时编写,实验独立设课。

本书编写分工是:阜新矿业学院杨芳春教授为第一、四章;黑龙江矿业学院王雪丹副教授为第二、三章;阜新矿业学院徐建华副教授为第五、六、七章;山西矿业学院唐景肃教授为第八、九章;淮南矿业学院李振璧讲师为第十章。杨芳春任主编,唐景肃、王雪丹、徐建华任副主编。

从设课规划到本书出版,承蒙煤炭部科教司、教材编审委员会、教材编审室及国内有关高校同行专家的大力支持与关怀,在此向他们及参考文献作者一并表示谢意。

由于编者水平有限,教学综合改革未必合适,欢迎读者批评指正。

编 者

1995 年 4 月于北京

目 录

第一章 系统及其数学模型	(1)
第一节 系统的基本概念	(1)
第二节 系统的数学模型种类及建模方法	(5)
第三节 集中参数的机电系统	(16)
第四节 集中参数的液压、气压和热力系统	(21)
第五节 相似系统及其模拟	(29)
习题	(35)
第二章 网络拓扑分析	(36)
第一节 网络与系统	(36)
第二节 网络拓扑基本定义	(38)
第三节 关联矩阵 回路矩阵 割集矩阵	(41)
第四节 节点分析法	(48)
第五节 改进的节点分析法	(54)
第六节 回路分析法	(58)
第七节 割集分析法	(61)
习题	(64)
第三章 二端口网络分析	(66)
第一节 二端口网络的方程和参数	(66)
第二节 二端口网络的转移(传递)函数与特性阻抗	(72)
第三节 二端口网络的等效电路	(76)
第四节 二端口网络的串联连接	(79)
第五节 二端口网络的基本反馈连接	(81)
习题	(85)
第四章 传递函数与信号流图	(88)
第一节 传递函数	(88)
第二节 用方框图法求系统的传递函数	(95)
第三节 用信号流图法求系统的传递函数	(108)
习题	(116)
第五章 时域分析	(118)
第一节 典型试验信号与瞬态响应的性能指标	(118)
第二节 控制系统的稳定性和稳定判据	(119)
第三节 一阶系统的时域分析	(128)
第四节 二阶系统的时域分析	(130)
第五节 高阶系统的时域分析	(141)
第六节 反馈控制系统的稳态误差分析	(142)
第七节 复合控制系统的误差分析	(152)
习题	(154)

第六章 根轨迹法	(161)
第一节 根轨迹的基本概念及绘制条件	(161)
第二节 绘制根轨迹的基本原则	(163)
第三节 参数根轨迹	(171)
第四节 控制系统的根轨迹分析	(173)
第五节 时滞系统的根轨迹	(177)
习题	(180)
第七章 频域分析	(182)
第一节 频率特性及其描述	(182)
第二节 典型环节和开环频率特性	(187)
第三节 奈魁斯特判据	(201)
第四节 稳定裕量	(208)
第五节 闭环频率特性	(211)
第六节 频域指标和时域指标	(216)
习题	(223)
第八章 采样离散系统分析	(229)
第一节 采样离散系统简介	(229)
第二节 采样与采样定理	(232)
第三节 z 变换与 z 反变换	(237)
第四节 用 z 变换法解线性常差分方程	(246)
第五节 采样离散系统的数学描述	(248)
第六节 采样离散系统的分析	(259)
习题	(270)
第九章 非线性控制系统分析	(272)
第一节 非线性系统的基本概念	(272)
第二节 描述函数法	(275)
第三节 非线性系统的描述函数分析	(282)
第四节 相平面法	(287)
第五节 非线性系统的相平面分析	(301)
第六节 利用非线性改善系统的性能	(304)
习题	(306)
第十章 状态空间分析法	(309)
第一节 状态空间模型	(309)
第二节 线性系统状态空间模型的建立	(312)
第三节 线性系统状态方程的解	(324)
第四节 线性定常离散时间系统的状态空间表达式	(331)
第五节 线性系统的能控性和能观性	(338)
第六节 李亚普诺夫稳定性分析	(354)
习题	(365)
参考文献	(369)

第一章 系统及其数学模型

实际系统有自然的、社会的、生物的、机械的、电气的、液动的、气动的、热力学的等等。系统动态特性或运动状态可以用数学表达式来描述,称为系统的数学模型或称为运动方程。在建立数学模型时要兼顾其准确性和简化性,合理的建立数学模型是分析和研究系统的最重要工作之一。

本章首先介绍系统的基本概念;用时域描述方法讨论系统的数学模型及建模方法;以集中参数的机电系统、液压系统、气压系统和热力系统论述它们的时域数学模型;最后介绍相似系统及电模拟方法。

第一节 系统的基本概念

一、系统与控制

所谓系统是有一定功能由相互关联的若干不同部分或环节有层次组合在一起的综合体。每一个层次分别是一个既独立又相互联系的子系统。一个系统可同时包括人和物质两部分,也可是一种思维过程或社会过程。如反映客观世界物质的存在、分布、运动及其相互作用的系统称为自然系统。如由太阳系、银河系、河外系构成的天体系统;山川、河海、陆地、盆地、岛屿、矿藏构成的地理系统;细胞生长、细胞分裂、生物组织、机体、大脑构成的人体生命系统等等均属于自然系统。由人利用物质构成的系统称为人为系统。如由煤炭、钢铁、化工联合企业构成的复杂生产系统;由发电、输电、配电构成的电力系统;由车辆、船舶、飞机、火箭、宇宙飞船等构成的交通运输系统;由工厂、仓库、销售、运输、消费者等构成的商品流通系统;由生产组织、民间团体、企业、政府、国家等构成的社会管理系统;由文学、艺术、法律、教育、宗教、哲学等构成的社会意识形态系统等等。这些人为系统,则是以客观世界的物质及其属性为基础,通过人类的体力和脑力劳动建立起来的。

由于组成客观世界有:能量、材料和信息三大要素。能量流、物质流及信息流是一切运动形态的基础。系统可以实现预期的各种功能,是靠信息流对能量流、物质流进行加工和处理而实现的,它就是信息对系统的控制作用。控制的基本功能归结为信息的接收、变换、存贮、处理、反馈、输出等等。因此,系统、信息及控制是不可分割的统一体。

二、系统的特性

1. 系统的整体性

系统-子系统-单元的划分是相对的。它们之间是一种有序的结构,共同完成一定的目的和任务。一般而言,系统的组织化程度与结构的有序性成正比。即结构的有序性越强,系统的组织化程度就越高,该系统的整体性和独立性也就越强。如人和生物的机体可视为完全的有序性结构,是能维持自身存在和自行复制的系统;而随机运动的气体分子系统,可视为有序性为零的无序系统。常见的人为系统其结构有序性介于上述两者之间。

2. 系统的能观性、能控性和稳定性

1) 系统必须是能观测的。某个系统在初始时刻 t_0 具有任意的初始状态 $x(t_0)$, 如果在有

限的时间区间 $[t_0, t_1]$ 内可以用系统的外部信息(指输入量或输出量)决定系统内部运动的状态,称为能观测系统。反之,如果不能用系统外部信息完全决定系统内部运动的状态,则称为不能观测系统。任何系统一般都应该能观测的,只是由于历史的或技术的原因,使人类暂时不能观察和测量到系统内部的扰动规律,这是人类认识局限性所致。

2)系统必须是能控制的。如果某个系统在初始时刻 t_0 的运动状态是 $x(t_0)$,在有限时间区域 $[t_0, t_1]$ 内用改变系统输入量 $r(t)$ 的方法,将初始状态转移到任意状态 $x(t_1)$,从而使系统过渡到所预期的输出状态 $c(t_1)$,则该系统称为能控制系统,反之为不能控制系统。系统的能控制性表明系统可用人为手段改变它的输出特性。但并非一切系统都是能控制的,大部分自然系统暂时为不能控制的,而人工系统都是能控制的。人要对系统施加控制作用,不外乎以信息为媒介通过技术的、经济的、管理的三种手段实现。

3)系统必须具有稳定性。一切系统均处于运动之中。机床的运行、飞机飞行状态的变化、人体温度升降、仓库库存量变化、市场商品价格浮动等都是各种系统在运动的表现。虽然系统的运动是绝对的,但人、事、物在运动的各阶段上都具有相对静止状态称为稳定状态。由于系统内部发生故障或受到外界环境干扰系统稳定性受到破坏时,可使系统失去稳定状态变为失控系统。在人为系统中就要研究系统施加控制作用时保证维持稳定状态的条件,以及使系统从一个稳定状态过渡到另一个期望的稳定状态时应采用什么样的手段。

3. 系统依靠信息进行控制

任何系统的控制功能都是依靠信息传递实现的。一般控制过程用控制语言描述为:系统采用某种信号反映系统运动状态及与外部环境相关联的信息,根据这些信息进行决策。再以一定形式的信号将某种决策信息(即控制指令)对被控对象施加影响,完成控制作用。

不同系统对信息的特性提出不同的要求。如:①信息的可靠性。对信息处理作到去伪存真。系统本身产生的信息称为内部信息,来自外部环境的信息称为外部信息。②信息的完整性。对具有严密组织结构有序系统必须提供完整信息,以确保系统正常运行。而对天气预报、市场预测等过程,只能提供不完整的、组织程度较低的信息;③信息的精确性。对科学技术系统、财政经济系统等控制需要精确的信息。而产量估计、健康状况统计等要求信息准确性不高;④信息的时间性。由历史信息 and 现状信息可预报系统未来的趋势;⑤信息的随机性。在正常情况下生产状态、水位报告,银行存款估计、人体体温测量等过程反映的信息都有某个预知的范围,随机性较小。在反常情况下上述过程都有可能产生突发信息,称为随机性信息。

4. 系统的可模型化

系统的模型化是广义的概念,它是对复杂的系统排除各种非本质的因素突出主要特征因素,使系统运动的物理状态和数学描述得到简洁表达形式的模型。同时,系统的模型反映了系统的结构性、能观性、能控性及稳定性。因此,可模型化是用网络理论和控制理论研究系统各种性能的重要手段。

三、自动控制系统的的基本控制方式

1. 开环控制系统

系统以外的部分统称为外部环境。外部环境对系统的作用称为系统输入量 $r(t)$;而系统对外部环境的作用称为系统输出量 $c(t)$,图 1-1 为开环控制系统组成的示意图。系统中的控制器接受输入信号 $r(t)$,产生相应的控制作用信号 $u(t)$ 操纵被控对象,使它的输出 $c(t)$ 符合对系统所提出的性能要求。当被控对象能由控制器自动操纵完成控制作用的称为自动控制

系统。在图 1-1 中系统只有一个输入量和一个输出量称为单输入单输出(SISO)系统;反之则为多输入多输出(MIMO)系统。

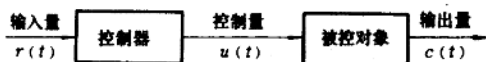


图 1-1 开环控制系统的组成

在开环控制系统中,控制器与被控对象之间的控制作用是单方向进行的,输入量与输出量间无关联。这种系统结构比较简单,但其输出量不可能准确地对应于输入量的要求。由于周围环境的变化经常会使系统受到扰动,如组成系统的器件参数受温度的影响而变化,引起系统内部扰动。此外系统的动力源或负载变化会引起外部干扰。因此,在一定的输入信号作用下,这种干扰量都会使系统相应的输出量出现偏差,开环控制系统不具有调节这种偏差的能力,使系统静态响应不好、准确度不高。另外,被控对象总有惯性存在,使开环控制系统的输出量不能及时地跟踪输入量的变化而改变,动态响应不好,快速性差。这些都是开环控制系统固有的缺点。

2. 闭环控制系统

为克服开环控制系统的缺点,人们总是采用负反馈的闭环控制系统,如图 1-2 所示。负反馈的含义是把系统的输出量直接或者通过测量元件反向引入输入端称为反馈量 $u_f(t)$,它与输入量 $r(t)$ 进行求和得到偏差量 $e(t)$,将偏差量输入给控制器后,控制器产生的控制作用使被控对象力图减小或者消除这种偏差量。

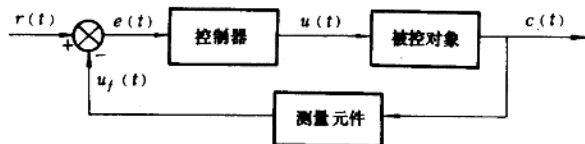


图 1-2 闭环控制系统示意图

采用负反馈控制,可以有效地抑制被反馈通道(由输出到输入)所包围的前向通道(由输入到输出)中各种干扰对系统输出量的影响,改善了系统的静态准确度。同时,因负反馈的存在,对应于一定输出量的输入量必然加大,使控制器受到强激信号作用,可加快被控对象的输出量对输入量的跟踪速度,获得快速响应的效果,改善了系统的动态特性。如果控制器的强激信号作用与被控对象惯性之间匹配不当,负反馈控制系统内可能产生振荡,甚至不能稳定工作。

如果控制系统中的干扰因素已知,将干扰量反馈给输入端利用补偿装置产生与扰动效果相反的作用,以抵消扰动的影响,这种控制方式称为按扰动控制,又称为前馈控制。图 1-3 给出反馈控制与扰动控制结合的复合控制系统的示意图。它可获得较为理想的控制效果。按扰动控制可消除主要干扰量对系统的影响;按偏差控制构成负反馈系统,可消除其它各种干扰引起的偏差。因此,复合控制系统是比较合理的控制系统。

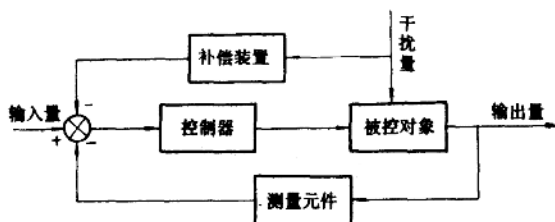


图 1-3 复合控制系统示意图

四、自动控制系统的基本结构

负反馈控制是最基本的控制方式之一。它不仅应用在工程系统中,在生物、经济、管理等非工程系统中亦发挥着重要作用。

负反馈控制系统中均包括有比较(求和)、放大、执行、测量(反馈)等基本元件和被控对象。此外还有为改善系统动态特性而设置的校正元件。其结构图如图 1-4 所示。

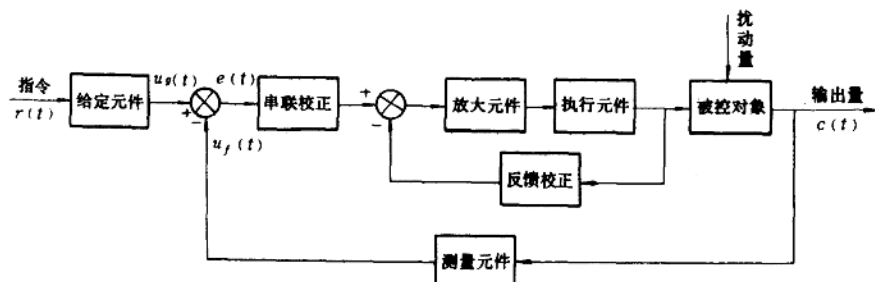


图 1-4 反馈控制系统的基本结构图

被控对象:是系统中被控制的设备或过程。被控对象中需要控制的物理量称为被控量。

给定元件:将控制指令信号 $r(t)$ 变换为系统参考输入信号 $u_s(t)$ 以便与负反馈信号 $u_f(t)$ 进行求和得到偏差量 $e(t)$ 。给定元件输出信号要求准确、稳定,它的精度应高于要求的控制精度。

测量元件:由传感器与反馈网络组合而成。其中传感器用于检测输出量并转换为电信号,电信号经反馈网络变换成某种函数关系的反馈信号送给输入端。测量元件是影响系统性能的关键元件,要求它坚固、准确、稳定。

放大元件:将比较元件输出的微弱电信号进行放大,同时将信号能量变换为电气、机械或液压等形式以便驱动执行元件。

执行元件:用来直接驱动被控对象,以控制输出量满足系统需要。

校正元件:用来改变控制器(包括放大和执行元件)的动态特性,以改善控制系统的性能和品质。

能源元件:为控制器件提供能量的部件。

应该指出,实际控制系统中可能是一个部件实现几种功能,或几个部件实现一种功能。

但在分析系统性能时,应从上述基本结构出发,描述系统的数学模型,便于分析和研究。

第二节 系统的数学模型种类及建模方法

一、模型的种类

所谓模型就是用某种形式近似地描述(或模拟)所研究的对象(或过程)。模型大体可分为两类:具体模型(形象模型)和数学模型(抽象模型)。

1. 具体模型

具体模型又可分为模拟模型和缩尺模型两种。

1)模拟模型 根据相似原理可用其它现象(或过程)来描述所研究的现象(或过程),用模型性质表征原现象的性质。由于电系统的参数易于测量和控制,常用电系统模拟机械、热学、流体等各种现象和过程。如果模拟模型的变量与原现象的变量间存在一一对应关系时,称为直接模拟模型。例如用电网络去模拟热传导系统时,电阻、电容、电压及电流分别与热阻、热容、温差及热流量相对应。如果模拟的变量与原现象的变量之间不能建立一一对应的关系时,称为间接模拟模型。

2)缩尺模型 是将真实事物按比例缩小或放大。如飞机模型、船舶模型等。当复杂现象很难进行理论分析与计算,又找不到适当的模拟模型时,可采用缩尺模型进行实验,将结果再利用相似原理加以处理。这种方法费时、费人力和财力。

2. 数学模型

1)图形模型 是用一些图形如方框图、信号流程图、流程图、状态图等来表示所研究的现象或过程的某种特征。如用地图表示地理位置、等高线图表示地面的高程、铁路线路图表示铁路连接状态等等。

2)数式模型 是将所研究的现象或过程的某种特征利用数学表达式描述。

二、数学模型的分类

1. 按系统的性质分类

1)确定数学模型与随机数学模型 在许多系统中,由于受到一些复杂而尚未完全认识清楚的因素影响,使系统虽有确定的输入量,但得到的输出量是不确定的,这种系统称为随机系统。它的数学模型只能用随机变量的概率分布描述,称为随机数学模型。例如生产系统中某些设备何时发生故障、自然灾害及异常气候何时发生等均属于随机现象。

若系统有确定的输入量时,系统的输出量也是确定的,这种系统称为确定系统。它的数学模型是反映其本质特征变量的某种数学表达式,称为确定数学模型。

2)连续模型与离散模型 如果系统的输入量和输出量是时间的连续函数,如图 1-4 所示自动控制系统,称为连续时间系统。其数学模型为连续时间模型,简称为连续系统和连续模型。通常用微分方程和状态方程来描述。

若系统的输入量和输出量只在离散的瞬间取值,或者说输入量和输出量是序列函数,这样的系统和模型称为离散时间系统和模型,通常用差分方程来描述。计算机控制系统是采样离散控制系统的实例。数字计算机只能识别数字信号,而数字信号是离散信号量化而得。计算机控制已得到了广泛的应用。

3)线性数学模型与非线性数学模型 如果系统的输入量与输出量呈现线性关系,也就是满足齐次性与叠加性。若 $r_1(t)$ 、 $r_2(t)$ 是任意两个输入,则 $c_1(t)$ 、 $c_2(t)$ 为对应的输出,即

$$\alpha r_1(t) \Rightarrow \alpha c_1(t), \quad \beta r_2(t) \Rightarrow \beta c_2(t) \quad (\text{齐次性})$$

$$\alpha r_1(t) + \beta r_2(t) \Rightarrow \alpha c_1(t) + \beta c_2(t) \quad (\text{叠加性})$$

其中 α, β 是任意常数, 满足上面关系的为线性系统。其数学模型为线性数学模型。不满足齐次性和叠加性的系统和模型, 称为非线性系统和模型。

4) 定常数学模型和时变数学模型 系统在初始条件给定的情况下, 输出的形状取决于输入的形状而与输入时刻无关。设 $r(t)$ 为输入量, $c(t)$ 为输出量, 即 $r(t) \Rightarrow c(t)$ 。若输入滞后时间 T , 则输出亦延后时间 T , 即 $r(t-T) \Rightarrow c(t-T)$ 。具有这种特性的系统称为定常系统或时不变系统。即参数为常数的系统为定常系统。反之, 若系统参数为时间 t 的函数时称为时变系统, 如真空管和凸极电机的参数均是时变的。定常数学模型用常数微分(或状态或差分)方程表示; 时变数学模型用变系数微分(或状态或差分)方程表示。

5) 存贮系统和非存贮系统 系统某瞬时 t 的输出量仅与该瞬时的输入量有关, 具有这种性质的系统称为非存贮(或无记忆)系统。如电阻网络某时刻 t 的输出量仅取决于该瞬时的输入量, 它就是非存贮系统, 它的数学模型为代数方程。相反, 若系统在某瞬时 t 的输出量依赖于某个区间 $[t-T, t]$ 的输入量, 即与过去的状态有关, 该系统称为存贮(或有记忆)系统。 T 为存贮长度。如电容元件电压的数学模型为

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

可见, 输出电压依赖于 $(-\infty, t)$ 整个区间内的输入电流, 这是一个无穷期的存贮系统。存贮系统的数学模型为非代数方程。

6) 集中参数模型与分布参数模型 输入作用于系统后, 输入激励的响应几乎同时传播到系统的每一点上。也就是说, 激励的响应仅是时间的函数而与系统各点的位置(空间)无关, 这种系统和模型称为集中参数系统和模型。在集中参数系统中, 系统的能量被存贮或消耗在分离的元件内, 例如电网络中电阻、电容及电感元件; 机械系统中阻力、弹簧及阻尼元件等等。

若系统输入激励的响应需要经过一段时间才传递到系统各点上, 激励的响应不仅是时间函数也是系统各点位置的函数, 即为时空二元函数, 这样的系统和模型称为分布参数系统和模型。如材料的导热, 在一端加热后经过一段时间热量才传到另一端; 又如长距离的电力传输线或高频电路的数学模型就是分布参数电路。

7) 微观数学模型与宏观数学模型 在许多系统中, 有时很难找到该系统的有关变量间函数表达式, 但却易于找到变量与它们的微小增量或变化率之间的关系式, 可用这种微分关系式描述该系统称为微观模型。它常常是用微分(或状态或差分)方程表示的。若系统存在着有关变量在一段时间(或一个空间)里的总和与其它变量之间的变化规律, 这样的数学模型称为宏观模型, 可用联立代数方程组及各种积分表达式、积分方程来表示。

2. 按系统性质与时间的关系分类

1) 静态数学模型 当系统处于静态时各个变量之间的定量关系式与时间无关, 常用代数方程来表示, 称为静态数学模型, 也称稳态数学模型。

2) 动态数学模型 当系统处于从一个稳态转到另一个稳态的过渡过程中, 系统各变量均是时间函数, 它用微分方程或状态方程描述, 称为动态数学模型。

3. 按对系统认识程度分类

1) 白盒问题 对系统的机理和内在规律完全清楚, 可写出完全确定的数学模型。

2) 灰盒问题 对系统的机理和内在规律不完全清楚。

3) 黑盒问题 对系统的机理和内在规律完全不知道,只知道其输入和输出量,其数学模型通过系统辨识建立。

4. 按建立数学模型的方法分类

1) 理论模型 基于理论上的推导和分析得到的数学模型。

2) 经验模型 由实验结果归纳和分析得到的数学模型。

在实际问题中,许多数学模型是同时采用上述两种方法构造得到的。比如先从理论上推出的模型,再由实验确定其参数。

三、建立数学模型的一般方法

建立数学模型方法大致有以下四种:

1. 分析法

将一个复杂系统或被控对象按其结构层次分解为若干独立的子系统,每一个子系统又分成若干个单元或环节。根据每一单元的物理、化学、自然规律或过程的机理性质,采用分析法写出其数学模型即运动方程,按系统的结构原理和相互制约关系将这些方程联立组合便得到系统或被控对象的数学模型。用分析法得到的数学模型一般称为机理模型。

2. 实验测试法

一般系统或对象的输出量与输入量间有一一对应的关系。在输入端加入不同的输入量时,同时记录输出量的变化规律,根据这些试验数据寻求一个数学模型。这种实验测试法建模应用最为广泛,它是相当可靠的一种建模方法。

为尽量减少实验误差,突出实验效果。采用特殊的输入扰动信号,就有不同的实验方法:

1) 响应曲线法 给系统输入阶跃扰动信号,输出为阶跃响应曲线。

2) 脉冲特性法 给系统输入脉冲扰动信号,输出为脉冲响应曲线。

3) 频率特性法 给系统输入不同频率正弦周期扰动信号,输出为频率特性。

这些方法将在后续各章中讨论。

3. 统计相关试验法

上述实验测试法,必须将生产装置从正常运行状态转入到实验状态,属于离线辨识。因而实验时间越长,对生产影响就愈大,且耗费人力和物力。近年来采用在生产运行正常状态下去获取实验数据建立模型,这就是统计相关试验法,它属于在线辨识。测试时将一个特定的随机信号 $r(t)$ 加到被测对象的输入端。该信号既不能引起系统偏离正常运行状态过大,又在数据分析上简便。测出对象输出信号 $c(t)$,然后计算对象输出信号 $c(t)$ 与输入信号 $r(t)$ 的互相关函数,再以这个互相关函数来度量对象的脉冲响应函数。

4. 系统辨识法

系统辨识法是在输入和输出基础上,从一类系统中确定一个与所测系统等价的系统。根据对系统了解的基础确定数学模型的结构,设计出为系统辨识应作的实验项目,由输入、输出实验数据对数学模型中未知部分进行估计。在某一工况下取得的实验数据建立的数学模型,需要在其它工况下的数据对数学模型进行检验,如不符合还需要重新进行实验来估计数学模型,至满意为止。

四、数学模型的建立步骤及修正方法

1. 建立数学模型的步骤

1) 明确系统的目标及要求; 2) 找出主要因素, 确定主要变量; 3) 确定系统内各种相互关系及其约束条件; 4) 规定统一的符号及代号; 5) 用有关学科知识, 找出数学表达式; 6) 简化表达式形式, 验证该模型的可靠性。

2. 对数学模型的修正方法

当一个复杂系统的数学模型虽已构成, 但在试验和求解过程又遇到很大困难, 须改用简单近似模型。对模型的修正和近似常采用下面的方法进行:

1) 改变变量的数量 选择 1~2 个主要变量进行优选试验, 如得到满意的结果时其余变量可去掉; 有时将性质相同的变量合并成有代表性的变量, 或者按需要将有些变量再分细。

2) 改变变量的性质 有时把有的变量看成是常量; 把有的连续变量看成是离散变量; 把有的离散变量看成是连续变量。

3) 改变变量之间的函数关系 比如非线性关系可用线性关系、或二次函数、或其它函数去逼近, 使模型简化。在随机性问题中, 可用正态分布、指数分布等替代复杂的概率分布函数。

4) 改变约束条件 为简化模型可对变量的约束条件加以改变。增加约束后求得系统质量指标一般偏低, 此时求得的解为保守解; 减少约束后求得系统质量指标一般偏高, 此时的解为冒进解。显然, 它们都不是系统的真正解, 但可以看出解的范围, 便于对系统进行初步估算。

五、数学模型的举例

1. RLC 电路的数学模型

图 1-5 所示 RLC 串联电路, 其中 $0 \leq \alpha \leq 1$ 。 $u_i(t)$ 为输入量, $u_o(t)$ 为输出量。由于输出端 2-2' 常接以入端阻抗极高的电子装置, 相当于开路状态。

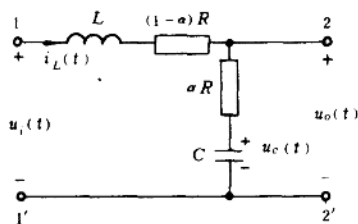


图 1-5 RLC 串联电路

连续系统的数学模型有两种描述方法:

1) 输入-输出描述法 即将系统的输入量 $u_i(t)$ 与输出量 $u_o(t)$ 用一个数学式描述, 称为输入-输出描述法。在图 1-5 中 $\alpha=0 \sim 1$ 的可变系数。应用 KVL 可直接写出输出电压方程为

$$u_o = \alpha R i_L + u_C \quad (1-1)$$

可见, 输出电压 u_o 被 i_L 和电容电压 u_C 控制着。 i_L 和 u_C 称为受控量, 因为它们被输入量 $u_i(t)$ 和电路

参数 RLC 所控制, 所以输出量为受控量 i_L 和 u_C 的线性组合。

在图 1-5 中由 KVL 可写出电路运动(运动泛指一切物理量随时间的变化)方程组为

$$\begin{cases} u_i(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} + (1-\alpha)Ri_L(t) + \alpha Ri_L(t) + u_C(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + u_C(t) \\ i_L(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \end{cases}$$

如仅取 u_C 作为受控量时, 将 i_L 视为中间变量可以消去, 此时上面的电路运动方程组简化为

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_i \quad (1-2)$$

当给定 u_i 及参数值, 可用任何一种方法(包括计算机)求解出 u_o 。

于是, 以 u_c 为受控量时, 系统的输出方程变为

$$u_o = a i_L R + u_c = a R C \frac{du_c}{dt} + u_c \quad (1-3)$$

当系统初始条件为零时, 即 $i_L(0) = u_c(0) = 0$ 。对式(1-2)两边取拉氏变换得

$$L C s^2 U_c(s) + R C s U_c(s) + U_c(s) = U_i(s)$$

得

$$U_c(s) = \frac{U_i(s)}{L C s^2 + R C s + 1} \quad (1-4)$$

对式(1-3)双边取拉氏变换, 将上式代入可得

$$U_o(s) = a R C s U_c(s) + U_c(s) = \frac{(a R C s + 1) U_i(s)}{L C s^2 + R C s + 1} \quad (1-5)$$

上式表明, 系统用输出量象函数 $U_o(s)$ 与输入量象函数 $U_i(s)$ 表征的数学模型为代数形式, 这是在频域中描述的数学模型。

2) 状态变量描述法 所谓状态变量就是系统中一组独立变量, 状态变量是指在某时刻系统必须具备的最少量的信息。由任意时刻的状态变量值可决定该时刻系统的性状。由状态变量构成的方程简称为状态方程, 它是用状态变量表达的一组独立的一阶微分方程组。电网中电容上电压和电感中的电流确定了任何瞬间电路的能量贮存, 所以把电容电压和电感电流可选作状态变量。

在图 1-5 中应用 KVL 得到

$$L \frac{di_L}{dt} = u_i - R i_L - U_c$$

而

$$i_L = C \frac{du_c}{dt}$$

将上述两个方程改写成如下形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_c}{dt} &= 0 + \frac{1}{C} i_L + 0 \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{1}{L} u_c - \frac{R}{L} i_L + \frac{1}{L} u_i \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

上式就是描写电网络运动的状态方程, 它可写成矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} \frac{du_c}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u_i \quad (1-7)$$

亦可将输出方程式(1-1)写成矩阵形式, 有

$$\begin{bmatrix} u_o \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & aR \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

显然, 由式(1-7)求解出状态变量 u_c 和 i_L , 再应用式(1-8)可求出输出量 u_o 。关于状态变量法将在本书第十章深入讨论。

2. 梯形电阻网络的离散型数学模型

电阻网络如图 1-6 所示。求以各个节点电压 $u(1), u(2), \dots, u(k), \dots, u(n)$ 为输出量的数

学模型,其中 k 表示节点的位置。

在网络中可任取某节点来推导节点电压之间的递推公式。在图 1-6 中以第 k 节为例,由 KCL 可得

$$i_1 = i_2 + i_3$$

将上式写成用节点电压表达形式为

$$\frac{u(k-1) - u(k)}{R_1} = \frac{u(k)}{R_2} + \frac{u(k) - u(k+1)}{R_1}$$

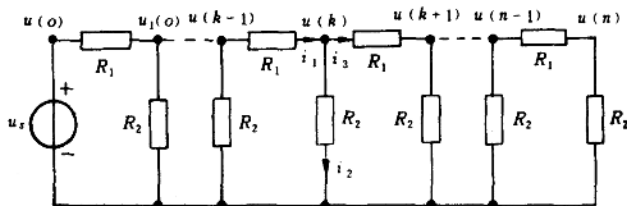


图 1-6 梯形网络

整理得以节点电压为输出量的差分方程为

$$(2 + a)u(k) - u(k-1) - u(k+1) = 0 \quad (1-9)$$

其中 $a=R_1/R_2$, $K=1, 2, 3, \dots, n-1$ 。其边界条件为 $u(0)=u_s$; $(1+a)u(n)=u(n-1)$ 。在式(1-9)中 k 取自然数的集合, $u(k)$ 为离散变量。因此,式(1-9)为离散型的数学模型。

类似地,在图 1-6 中可推出以回路电流为输出量的数学模型。设 $i(k)$ 为第 k 个回路中的回路电流,由 KVL 得

$$(2R_2 + R_1)i(k) - R_2i(k-1) - R_2i(k+1) = 0$$

整理得,以回路电流为输出量的差分方程为

$$(2 + a)i(k) - i(k-1) - i(k+1) = 0 \quad (1-10)$$

若电源为电流源 i_s 时,其边界条件为 $i(1)=i_s$; $(2+a)i(n)=i(n-1)$ 。

3. 群体理论的数学模型

群体是指动物、植物的总体。它可以是人类、一个民族、某类细菌、树木、鱼类等。

若某细菌的繁殖速率与现有细菌数目成正比。已知在第 5 小时细菌总数增长了 3 倍,问第 10 小时细菌数目是原来的多少倍?

设细菌在 t 时刻的数量为 $x=x(t)$,则按上述假定有

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

其通解为

$$x = Ce^{kt} \quad (1-11)$$

设 $t=0$ 时, $x=x_0$ 。依题意有 $t=5$ 时, $x=3x_0$ 。将其代入方程的解,得

$$x_0 = C, \quad 3x_0 = Ce^{5k}$$

整理得 $k = \frac{1}{5} \ln 3$ 。于是特解为

$$x = x_0 e^{\frac{\ln 3}{5} t} \quad (1-12)$$