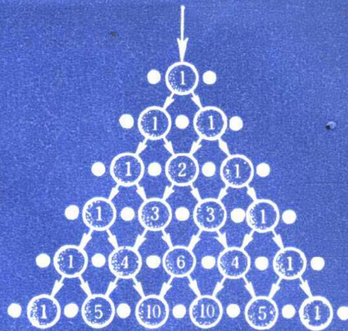
数学进修用书




吕钦

# 排列与组合

PAILIEYUZUHE

浙江人民出版社

# 内 容 提 要

本书较详尽系统地叙述了排列和组合的基本概念、计算方法，并介绍了相关的二项式定理、多项式定理、概率计算中的盒子模型等知识。对于利用排列、组合数来计算有限数列求和，自然数方幂的和以及常见的高阶等差数列的和也有所叙述。全书十分重视分析方法的介绍，浅显易懂，可供自学和教学参考。

数学进修用书
排列与组合
吕 钦
*
浙江人民出版社出版
（杭州武林路196号）
浙江新华印刷厂印刷
（杭州环城北路天水桥境）
浙江省新华书店发行
开本 787×1092 1/32 印张 3 字数60,000
1980年7月第 一 版
1980年7月第一次印刷
印数：1—2,000
统一书号：7103·1110
定 价：0.26 元

# 编辑说明

这套丛书主要是为中学数学教师编写的. 随着教育事业的发展，教师队伍迅速壮大，新教师大量增加. 在新的长征中，他们担负着为祖国培养千千万万建设人才的极其光荣的任务. 当前他们需要尽快地熟悉和掌握教育部新编教材，努力提高教育质量，因而进修的要求十分迫切. 本丛书出版目的，就是为他们进修提供一点比较系统的材料. 编写时照顾教师队伍的实际状况，内容比教育部新编中学数学教材要扩大、加深和提高一些，使学完以后继续自学大学有关数学课程，基础打得更加扎实. 同时也注意适当联系中学教学实际，有助于教师进行教学. 丛书也适合具有高中程度的学生和工农青年自学.

# 前　言

排列与组合的实际应用相当广泛．譬如，一个城市里要安装自动电话，就得知道，如果是用五位数字的电话号码的话，那么最多可安装多少台电话．又如某种化工产品所用的配料是甲、乙、丙三种，但不知道何种比例配合最好，甲的用量分成三档，乙的用量分成两档，丙的用量分成五档，如果每种配料方案都试验一次，那么就得先算一算一共需要做多少次试验，以便制订试验计划．再如一次篮球赛的组织者总要先了解有多少个球队参加比赛，用循环制共要赛多少场，用分组淘汰制又要赛多少场．解决这样一些问题的时候就要用到排列与组合的知识．

排列与组合又是进一步学习其他数学课程的基础．如代数中的二项式定理和多项式定理，概率统计中古典概型的概率计算都少不了这个基础．

因此，切实掌握排列与组合的知识，是解决实际问题的需要；也是进一步学习的需要．

学习排列与组合，不需要很多的预备知识，而且相对独立地自成一个体系，这是学习时有利的方面．

但是，排列与组合的有关概念和思考方法对于初学者来说是陌生的；一些应用问题的分析和求解，初学时也往往感到没有把握，这是学习中可能遇到的困难．但它却能培养和训练我们分析问题和解决问题的能力，随着这种能力的不断

提高，就会越学越有兴趣．这本小册子如果能够帮助读者克服一些困难，获得排列与组合的比较系统的基础知识，那就是我们最大的希望了．

本书是吕钦老师生前遗作．初稿经黄祥楙老师审阅、程其坚老师修改后定稿．

# 目　　录

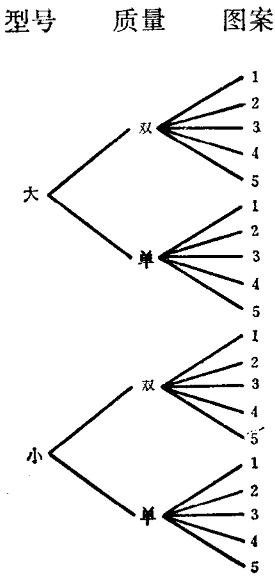
# 一、乘法法则和加法法则

乘法法则和加法法则是计算排列与组合的依据，深刻理解并能灵活运用这两个法则，对学好排列组合起着决定的作用．那么什么是乘法法则和加法法则呢？现举例加以说明．

**例 1** 某搪瓷制品厂生产的面盆分大、小两种型号，每种型号里有双料、单料两种不同的质量，和五种不同的图案，问一共可以制造多少种不同的面盆？

制造的每一只面盆，必有一定的型号（大号或小号），一定的质量（双料或单料）和一定的图案（1、2、3、4、5这五种图案之一），三者不可缺一．这里，型号只有两种选择，当我们确定了一种型号后，质量又有两种选择，因此仅仅从型号和质量考虑就有 $2\times2=4$ 种选择．而对于这四种选择中的每一种来说，其图案都还有 5 种选择，因此同时考虑型号、质量、图案时，就一共有 $2\times2\times5=20$种选择．这一数量关系我们可以通过下图直观地加以说明：

这个图象如同有分叉的树枝，开始有 2 枝"树枝"，每一枝上分出两枝，就有 4 枝，最后在每一分枝上又分出 5 个分枝，所以最后共有 $2\times2\times5=20$个分枝．这种图通常叫做**树图**，它不但可以说明为什么要用乘法计算，而且可以把所有可能出现的结果（此例就是20种面盆）既不重复又不遗漏地罗列出来．上面的树图中，最后一列就是所有20种不同的面盆，括号中第一个字表示型号，第二个字表示质量，第三个字表示图案编号．

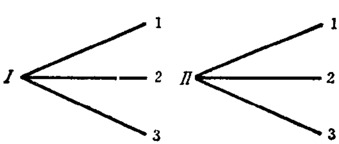



（大双1）
（大双2）
（大双3）
（大双4）
（大双5）
（大单1）
（大单2）
（大单3）
（大单4）
（大单5）
（小双1）
（小双2）
（小双3）
（小双4）
（小双5）
（小单1）
（小单2）
（小单3）
（小单4）
（小单5）

再看一个例子.

**例 2**　从甲地到丙地必须经过乙地．若甲地到乙地有 2 条路，乙地到丙地有 3 条路，问甲地到丙地共有多少条不同的路线.

甲地到乙地的 2 条路记为Ⅰ、Ⅱ；乙地到丙地的 3 条路记为1、2、3．这里应注意，每条路线的起点是甲地，终点是丙地．在一条路线上只要有一部分改变了走法，整个路线就算改变了．这样，原来的路线与后来的路线应看作是不同的两种路线．因此，从甲地到乙地的两种走法与乙地到丙地的 3 种走法的任何一种不同的结合方式都表示不



同的路线.

由本例中的树图，知这种路线共有 $2\times3=6$ 条，就是（Ⅰ1）、（Ⅰ2）、（Ⅰ3）、（Ⅱ1）、（Ⅱ2）、（Ⅱ3）.

我们看到，例 1 和例 2 所提出的问题，只用到了乘法．把这两个例题的共同特点和计算方法加以推广，就可得出下面的更具有普遍意义的规律，这个规律就是乘法法则.

**乘法法则** *如果完成一件事要分成几个步骤，第一步有 $m$ 种方法，第二步有 $n$ 种方法，……，最后一步有 $r$ 种方法，这些步骤又缺一不可，那末完成这件事就有 $mn\cdots\cdots r$ 种不同的方法.*

特别要注意乘法法则只能在完成一件事必须通过若干步骤，而各个步骤又有若干种方法的情况下才能适用．所谓"完成一件事"，在例 1 是"制成一只面盆"；在例 2 是指"从甲地走到乙地".而所谓"若干步骤"，在例 1 是指"选定型号，规定质量，确定图案"这三个步骤；在例 2 是指"甲地到乙地，乙地到丙地"这两个步骤．我们在运用乘法法则时一定要先充分理解乘法法则的意义，注意乘法法则中所说的"完成一件事"、"有几个步骤"的广泛含义，这样才能充分发挥乘法法则的作用.

**例 3** 从甲地到乙地可以乘火车，也可以乘汽车，也可以乘轮船．火车有 3 班，汽车有 4 班，轮船有 2 班，问从甲地到乙地有几种不同的走法？（交通工具不同，或者交通工具虽同但班次不同都算不同的走法）

乘火车有三种方法，乘汽车有 4 种方法，乘轮船有 2 种方法，谁都能够算出共有 $3+4+2=9$ 种方法．这个问题比例 1、例 2 更为简单，它告诉我们如下的计算法则：

**加法法则** 完成一件事有几种不同的方式，第一种方式有$m$种方法，第二种方式有$n$种方法，……，最后一种方式有$r$种方法．此外再没有别的方法．任何一种方式中的任何一种方法都可以完成这件事，那么完成这件事共有$m+n+\cdots\cdots+r$种方法．

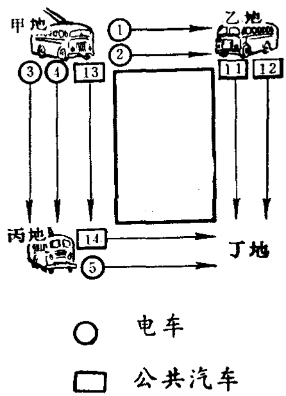
如例3中，完成一件事就是指“从甲地到乙地”．“乘火车”就是完成这件事的第一种方式，“乘汽车”是完成这件事的第二种方式，“乘轮船”是第三种方式．火车有3班，说明第一种方式有3种方法；汽车有4班，说明第二种方式有4种方法；轮船有2班，说明第三种方式有2种方法．这里，哪一种方式叫做第一种方式，哪一种方式叫做第二种方式，是随便的．

在加法法则中，要特别注意到“任何一种方式中的任何一种方法都可以完成这件事”这句话，这句话在例3中就是：利用任何一种交通工具中的任何一个班次均可到达目的地．而乘法法则所说的任何一个步骤中的一种方法，却不能单独完成这件事，只能完成这件事的一个组成部分．这一点，务必区别请楚，才不致于在具体运用时搞错．

乘法法则和加法法则指出了什么时候要用乘法，什么时候要用加法．道理十分浅显，容易为人们所理解．但是这两个计算法则在排列与组合中的地位和作用，却往往不易被人们充分地认识．需知，排列与组合的有关计算公式的推导以及许多应用问题的解答，实际上都是乘法法则和加法法则的具体运用．切实理解乘法法则与加法法则，并能灵活地加以运用，这对于学习排列组合起着决定的作用，我们一定要给以充分的注意．

在实际解题时，乘法法则与加法法则常常需要结合使用．如

**例 4** 按右边示意图，计算从甲地到丁地共有多少种走法．




右图表示，从甲地到丁地可以经过乙地并在乙地换车；也可以经过丙地并在丙地换车．

经乙地的走法有 $2\times2=4$ 种；

经丙地的走法有 $3\times2=6$ 种．

所以，从甲地到丁地共有 $4+6=10$种走法．

这里，在计算从甲地经丙地再达丁地的走法有几种时，因为每种走法都分成从甲到丙，再从丙到丁这两步，缺一不可．而第一步有 3 种走法，第二步有 2 种走法，所以应该应用乘法法则，共计有 $3\times2=6$ 个走法．同理，从甲地经乙地再到丁地，就有 $2\times2=4$ 个走法．而在计算总数时，又用了加法法则．这是因为从甲地到达丁地共有两种走法，已算得第一种（即从甲到乙再到丁）有 4 个走法，第二种(即从甲到丙再到丁)有 6 个走法，而且这些走法中的任何一个都能实现从甲地到丁地的目的，所以必须把两种走法的个数相加，即 $4+6=10$．为了准确选用乘法或加法，必须认清问题中的“一件事”是指什么．这个例子中的一件事就是指从甲地到达丁地．因此从甲地到达了丁地就算完成了这件事，没有到达丁地就不能算是完成了这件事．这样，就能将所有的完成这件事的方法按不同方式分

类，什么地方该用乘法，什么地方该用加法也就不会弄错了.

## 习 题 一

1. 一座展览大厅，朝南有 4 扇门，朝北有 3 扇门，一人从南门进北门出，问有几种不同的走法？并画出树图.
2. (1)从甲地到丙地可以坐轮船或汽车直达. 轮船有 $a$、$b$、$c$ 三条路线，汽车有 $A$、$B$ 两条路线，问从甲地到丙地共有几种走法？
   (2)有人从甲地到丙地，但是又必须经乙地中转，从甲地到乙地有 $a$、$b$、$c$ 三种路线可去，从乙地到丙地有 $A$、$B$ 两种路线可去，问共有多少种走法？

# 二、排　　列

## 1.排列和排列种数

先看两个例子

**例 1**　从红、黄、蓝三面旗子中，每次取两面，分别挂在一根旗杆的上、下两个位置，表示一个信号，问一共可以表示多少种不同的信号？

**解**　一个信号不仅要看所挂的是哪两面旗子，而且还要看这两面旗子按怎样的上、下顺序悬挂. 如$\left\{\begin{matrix}\text{红}\\\text{蓝}\end{matrix}\right.$与$\left\{\begin{matrix}\text{红}\\\text{黄}\end{matrix}\right.$表示不同的信号，$\left\{\begin{matrix}\text{红}\\\text{蓝}\end{matrix}\right.$与$\left\{\begin{matrix}\text{蓝}\\\text{红}\end{matrix}\right.$也是不同的信号，因此，可表示的不同信号有：

$$\begin{matrix}\text{上：}\\\text{下：}\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{红}\\\text{蓝}\end{matrix}\right.\quad\left\{\begin{matrix}\text{红}\\\text{黄}\end{matrix}\right.\quad\left\{\begin{matrix}\text{黄}\\\text{蓝}\end{matrix}\right.\quad\left\{\begin{matrix}\text{黄}\\\text{红}\end{matrix}\right.\quad\left\{\begin{matrix}\text{蓝}\\\text{红}\end{matrix}\right.\quad\left\{\begin{matrix}\text{蓝}\\\text{黄}\end{matrix}\right.$$

总共 6 种.

**例 2**　某一航空线上有甲、乙、丙三站，问应备几种不同的飞机票？（甲至乙与乙至甲算两种不同的票）

**解**　每种飞机票由一个起点站和一个终点站确定，因此任何两站都有两种飞机票，例如甲站与乙站就有甲站至乙站和乙站至甲站两种. 应备的票有：

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 起点： | 甲站 | 甲站 | 乙站 | 乙站 | 丙站 | 丙站 |
| | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 终点： | 乙站 | 丙站 | 甲站 | 丙站 | 甲站 | 乙站 |

总共有 6 种.

**例 3** 用1、2、3、4这四个数码，可以排成多少个不同的四位数，而且每个整数中的数码不同.

**分析** 要确定一个四位整数就得确定千位上的数码是什么，百位，十位和个位上的数码各是什么，求这种不同的四位整数有几个就是求这四个数码在“个”、“十”、“百”、“千”这四个位置上有多少种不同的安置法. 我们可以用树图（这里将树图表格化，见下表）把所有这种四位整数罗列出来：

| 千 位 | 百 位 | 十 位 | 个 位 | 四 位 整 数 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1234 |
| | | 4 | 3 | 1243 |
| | 3 | 2 | 4 | 1324 |
| | | 4 | 2 | 1342 |
| | 4 | 2 | 3 | 1423 |
| | | 3 | 2 | 1432 |
| 2 | 1 | 3 | 4 | 2134 |
| | | 4 | 3 | 2143 |
| | 3 | 1 | 4 | 2314 |
| | | 4 | 1 | 2341 |
| | 4 | 1 | 3 | 2413 |
| | | 3 | 1 | 2431 |

续表

| 千位 | 百位 | 十位 | 个位 | 四位整数 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 2 | 4 | 3124 |
| | | 4 | 2 | 3142 |
| | 2 | 1 | 4 | 3214 |
| | | 4 | 1 | 3241 |
| | 4 | 1 | 2 | 3412 |
| | | 2 | 1 | 3421 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4123 |
| | | 3 | 2 | 4132 |
| | 2 | 1 | 3 | 4213 |
| | | 3 | 1 | 4231 |
| | 3 | 1 | 2 | 4312 |
| | | 2 | 1 | 4321 |

**答**　这种四位整数共有24个.

以上三个例子，虽然所提的问题各不相同，但都是研究某些对象（如旗子，航空站，数码）按各种次序排成一列有多少种不同排法的问题. 在例 1，就是研究从三面不同颜色的旗子中每次取两面旗子按上、下次序排列，有多少种不同的排法；例 2 就是研究在三个航空站中以两个航空站按顺序排成一列（前者为起点站，后者为终点站）表示一种飞机票，有多少种不同的排法；例 3 就是研究四个数码按各种次

序有多少种不同的安排法．如果我们把参与安排的对象称为元素，并且用字母表示元素的个数，那么所提出的这类问题就可以用一般的形式来表现：

**定义** 从 $n$ 个不同的元素中，每次取出 $k(k\leqslant n)$ 个不同元素按一定的顺序排成一列，叫做从 $n$ 个不同元素中每次取出 $k$ 个不同元素的排列．所有不同的排列的种数记为 $A_n^k$.

任何一个排列显然可看成是 $n$ 个元素在 $k$ 个位置上的一种安放法（一个位置放一个元素），$k$ 的大小反映了排列的长短，所以 $k$ 也可称为**排列的长**．在例 1 中 $n=3$，$k=2$，每个排列（信号）都是红、黄、蓝三面旗子在上、下两个位置上的一种安放法；例 2 中，也是 $n=3$，$k=2$，每种排列（飞机票）都是三个航空站在起点和终点这两个位置上的一种安排法．例 1 例 2 的排列长都是 2，例 3 中，$n=4$，$k=4$，每个排列（四位整数）都是 1，2，3，4 四个数码在个、十、百、千四个位置上的一种安排法，排列长是 4．

$k<n$ 时的排列称为选排列（如例 1，例 2）．

$k=n$ 时的排列称为全排列（如例 3）．

这里应注意区别“排列”与“排列种数”这两个不同的概念．如 $a$、$b$、$c$ 三个元素中每次取 2 个不同元素的所有不同的排列有 $ab$，$ac$，$ba$，$bc$，$ca$，$cb$，象 $ab$，$ac$ 等等有序的字母对都是排列，而所有不同的排列的种数 $A_3^2=6$，则是一个数．

这里还需注意什么是不同的排列．两种排列所含的元素不完全一样时，是不同的排列（如 $ab$ 与 $ac$ 是不同排列）；两种排列所含元素虽然完全一样但顺序不同也是不同的排列（如 $ab$ 与 $ba$ 是不同的排列）．只有当两个排列的元素完全

一样，并且排列的顺序也完全相同时，这两个排列才是相同的排列（如 $ab$ 与 $ab$ 是相同的排列）．在计算排列种数时，相同的排列只能算一个．

为了计算所有不同排列的种数，可以象上面的例 1，例 2，例 3 那样，把所有不同的排列罗列出来．但是排列的种数往往很多，要罗列所有的排列非常麻烦，所以我们需要学会一种便利的计算方法．

先看上面的例 3：问 1、2、3、4 四个数码可以排成多少个四位整数．

表 1 罗列了所有的四位整数，同时也启发我们应该如何计算这种四位整数的个数．确定一个四位整数必须分别确定千位、百位、十位、个位数各是什么，缺一不可，确定千位数有 4 种方法，确定了千位数后，百位数有 3 种确定方法，千位和百位数确定以后，十位数有 2 种确定方法，千、百、十位数确定后，个位数就只有 1 种确定方法．故由乘法法则，确定这样的四位整数就有 $4\times3\times2\times1=24$ 种方法，即这种四位整数共有 24 个．

表 1 实际上也是一张树图，用它可以罗列出所有的这种四位整数，而且可以帮助我们理解计算总数为什么要用乘法．类似这样的树图，要求读者一定要会画．

学会例 3 的计算方法，一般的排列种数的计算也就不难推知了．现在我们就来求 $A_n^k$．

因为每一个选排列都可以看成从 $n$ 个不同元素中取出 $k$ 个不同的元素，并安放在 $k$ 个位置（不同）上的一种安放法，所以每个位置上的元素都确定了，排列才算确定．而第一个位置上的元素可以从 $n$ 个不同元素中任取一个，共有 $n$