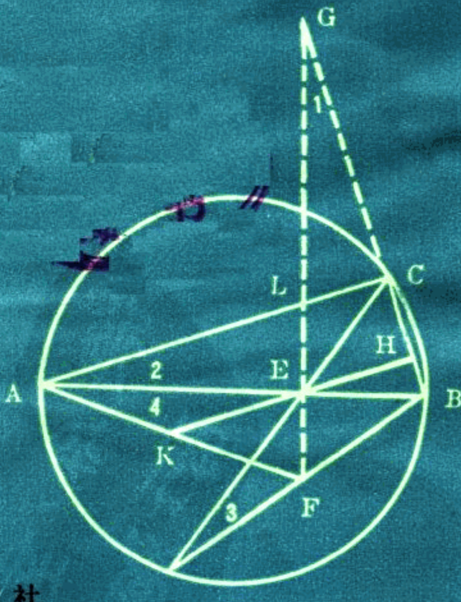
黑龙江省中学数学竞赛题解



黑龙江人民出版社

出 版 说 明

在向四个现代化进军的大好形势鼓舞下，我省于 1978 年以来先后举办了三次全省中学数学竞赛。在这期间，各地、市也都相应地举办了地区和市一级的中学数学竞赛。

为了提高全省中学数学教学水平和推动广大青少年的学习，我们将这些中学数学竞赛试题及其解答汇编成册，予以出版，以供广大中学数学教师、中学生、知识青年和数学爱好者学习、研究与参考。

本书的大部分试题及其解答，由各地、市数学竞赛委员会提供初稿。黑龙江大学数学系副教授颜秉海和讲师朱士庄、李云龙，对全部试题及其解答给予了校核、补充和编排，对部分试题还提出了多种解法。

本书插图由王海柯同志绘制。

目　录

试　题

题　解

试　　题

黑龙江省第一届中学数学竞赛试题

（1978 年在哈尔滨）

第一试试题

1. 计算 $100^{\frac{1}{2}\lg 9-2}$。

2. 已知 a、b、c 都是有理数，试证方程

$$ax^2+(ac-ab-c)x+bc-c^2=0$$

$(a\neq 0)$的根都是有理数。

3. 试求所有能被 45 整除的形如 $m1978n$ 的六位数(其中 m 为首位数字，n 为末位数字)。

4. 设 a、b 是由下式

$$(a-1)^2+|a+b-2|=0$$

所决定的数，试证曲线 L_1：

$$ax^2+bx+y^2+b=0$$

与直线 L_2：

$$x+ay-b=0$$

相切。

5. 设 $-1<a<1$，试比较$(1-\sqrt{1-a})$与$(\sqrt{1+a}-1)$的大小。

6. 过四面体 $ABCD$ 的棱 AB 和对棱 CD 上的一点 P 作一截面，试确定 P 点的位置，使此截面将四面体分成体积相

等的两部分，并证明你的结论。

7. 如图 2，已知 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\frac{AH}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}=\frac{1}{3},$$

线段 AE、BF、CG、DH 把平行四边形 $ABCD$ 分成九部分，若其中一部分 $\triangle AHK$ 的面积为 1，试将其余八个部分的面积的数值分别填在相应的图形内。

8. 解方程：

$$\sin x+\cos x+\mathrm{tg}\,x+\mathrm{ctg}\,x+\sec x+\csc x+2=0。$$

第二试试题

1. 设$\triangle ABC$ 中角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\frac{a}{b+c},$$

试判定$\triangle ABC$ 的形状。

2. a 取哪些整数时，方程

$$(a-1)x^2-(a^2-3)x+a^2+a=0$$

的根都是整数？

3. 分别以直角三角形的每边作为一边向外作正方形，求证连接两直角边上的正方形中心的线段与连接斜边上正方形中心和直角顶点的线段垂直且相等。

4. (1) 在一片开阔地上进行投弹演习，将开阔地用纵横直线划分成正方格形区域，每个正方格的边长均为 a 米 ($a>0$)，现要求随意投下一颗炸弹都能至少杀伤一个正方格

内的所有目标，问炸弹的杀伤半径至少应为多少米？证明你的结论。

(2) 在一条直线 l 的两侧各有一个定点 A 及 B，甲、乙两人分别从 A、B 同时出发，甲行进中的速度和乙行进中的速度相同，要在 l 上尽早会面，试确定会面点的位置，并证明你的结论。

5. 设 M 是平面上的点，其直角坐标为 (x, y)，且有

$$0<x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1.$$

现在要使数 $x, y, 1$ 是以下五种情形之一：

(1) 一个直角三角形的三条边的长；

(2) 一个三角形的三条边的长；

(3) 一个锐角三角形的三条边的长；

(4) 一个钝角三角形的三条边的长；

(5) 一个等腰三角形的三条边的长。

试分别对上述每种情形画出点 $M(x, y)$ 的全体所组成的图形。

黑龙江省第二届中学数学竞赛试题

(1979 年在哈尔滨)

第一试试题

1. 解方程组：

$$\begin{cases} x^2-2y^2-x=0, \\ 2x^2-5y^2+3y=0. \end{cases}$$

2. 若 $b^2=ac$，$d^2=af$，$e^2=cf$，$abde>0$。求证下列二次式

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$$

为一完全平方。

3. 在锐角三角形 ABC 中，AD 是边 BC 上的高，H 为垂心，在 AD 上有一点 P，使 $PD^2=AD\cdot HD$，连 BP、CP，求证：$\angle BPC$ 为直角。

4. 自正四棱锥 $S-ABCD$ 的高 SO 的中点 M，作侧棱的垂线，垂足为 N，$MN=a$；作侧面的垂线，垂足为 K，$MK=b$，求此棱锥的高 SO。

5. 三角形的三边长成等差数列，它的最大角与最小角的差为 90°，求三角形三边长的比。

第二试试题

1. 已知圆的方程为

$$x^2+y^2-2\sqrt{m+1}x-\sqrt{m}y+m+1=0\ (m>0).$$

(1) 求证：对于任何正数 m，圆心都在双曲线 C 上；

(2) 在双曲线 C 上求一点，使这点与直线 $y=2x+1$ 的距离最短。

2. 有一个四位数的千位数字、百位数字、十位数字、个位数字分别为 a、b、c、d，且 a、b、c、d 之和为 26，b、d 之积的十位数字等于 $(a+c)$，又 $bd-c^2$ 是 2 的整数幂，试求此四位数（说明理由）。

3. 求满足条件：$x\geqslant1,y\geqslant1,z\geqslant1,xyz=10,x^{\lg x}y^{\lg y}z^{\lg z}$

$\geqslant 10$ 的 x、y、z 的值。

4. 利用两个相同的喷水器，修建一个矩形花坛，使花坛全部能喷到水，已知每个喷水器的喷水区域是半径为 5 米的圆，问如何设计（求出两喷水器之间的距离和矩形的长宽）才能使矩形花坛的面积最大。

5. 要分配 A、B、C、D、E 五人中的若干人去执行某项任务，分配时需要考虑下列条件：

(1) 若 A 去，则 B 也去；

(2) D、E 两人中至少去一人；

(3) B、C 两人中去且只去一人；

(4) C、D 两人或都去，或都不去；

(5) 若 E 去，则 A、D 都去。

问应该让谁去？要说明理由。

6. 将全部正整数对，按如下所示箭头方向依次编号，每一数对的编号数写在该数对的前面。例如 6(1, 3) 表示数对(1,3)的编号数为 6。问数对(P,q)（P,q 为正整数）的编号数是多少？数对(100,99)的编号数是多少？

1(1,1) →	2(1,2)	6(1,3) →	7(1,4)	15(1,5) →…
↙	↗	↙	↗	
3(2,1)	5(2,2)	8(2,3)	14(2,4)	(2,5)…
↓ ↗	↙	↗		
4(3,1)	9(3,2)	13(3,3)	(3,4)	(3,5)…
↙	↗			
10(4,1)	12(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)…
↓ ↗				
11(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)…
…	…	…	…	…

7. 已知数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_0, b_1, \cdots, b_n$ 满足条件：

$$a_0=1, a_1=1, \quad a_k=\frac{1}{2}(a_{k-1}+a_{k-2}) \ (k=2,3,\cdots,n),$$

$$b_0=0, b_1=1, b_k=\frac{1}{2}(b_{k-1}+b_{k-2}) \ (k=2,3,\cdots,n),$$

又作一个新的数列 $c_k=a_kb_{k-1}-a_{k-1}b_k(k=1,2,\cdots,n)$。试求：$S_n=c_1+2c_2+\cdots+nc_n$。

黑龙江省第三届中学数学竞赛试题

(1981 年在哈尔滨)

1. 求数 315^{1981}的最后三位数。

2. 解不等式：

$$\arccos\frac{x-1}{2}>\arcsin\left(x-\frac{1}{4}\right).$$

3. 已知一组曲线方程为

$$\frac{x^2}{6-k}+\frac{y^2}{15-k}=1 \qquad (k\ 为参数),$$

求每一条曲线在两坐标轴上截距相等的切线的切点轨迹。

4. 已知等腰三角形 ABC。D 为底边 BC 的中点，E 为 AC 上一点，EF 垂直 BC 于F，EG 垂直 BE 交 BC 于G，$BG=4DF$，求证：BE 平分$\angle ABC$。

5. 已知正五棱锥侧棱长为 1，侧棱与底面夹角为 α，问 α 为何值时，正五棱锥的体积最大？

6. 已知实数 x、y 满足 $|y-x^2|+|y|\leqslant 1$，试讨论并画出

它所确定的图形，并求图形的面积。

7. 今有一人去抢修10条损坏的输水管 $S_1, S_2, \cdots, S_{10}$。每条水管在单位时间内损失的水量分别是 $V_1, V_2, \cdots, V_{10}$。这个人修好这10条水管所需的时间分别是 $T_1, T_2, \cdots, T_{10}$。现在要求他一次只能修一条，并且修好一条后立即再修另一条，问应怎样安排一个抢修水管的先后次序，才能使总的损失水量最小？（须证明你的结论）

哈尔滨市第一届中学数学竞赛试题

（1962 年）

高中二年级第一试试题

1. 设 α、β 是 $x^2+px+q=0$（其中 $q\neq 0$）的两根，试作出以 $\alpha+\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}$、$\beta+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ 为根的一元二次方程，其系数用 p、q 表示。

2. 设 $x+y=a+b$，$x^2+y^2=a^2+b^2$（其中 a、b 都是正数），试证：$x^n+y^n=a^n+b^n$。

3. 从任意锐角三角形 ABC 的顶点 B、C 分别向对边 AC、AB 作垂线，其垂足依次是 E、D，又边 BC 的中点为 G，线段 ED 的中点为 F，则 $GF\perp ED$。

4. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，分别以边 AB、AC 为直径在 $\triangle ABC$ 的外部各作一半圆，EF 是它们的公切线，切点是 E、F，自 A 向 BC 所作垂线的垂足为 D，而 $\angle EDF=30^\circ$，

求$\angle BAC$的大小？

5. 设外切于半径为r的圆的等腰三角形的顶角为2α，试用$\sin\alpha$与r表示此三角形的面积。

高中二年级第二试试题

1. 求出下面方程组的一组实根：

$$\begin{cases} \dfrac{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4}{x_1+x_2+x_3}=1, \\ \dfrac{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4}{x_1+x_2+x_4}=2, \\ \dfrac{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4}{x_1+x_3+x_4}=3, \\ \dfrac{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4}{x_2+x_3+x_4}=6. \end{cases}$$

2. 在$\triangle ABC$内任取两点P、Q，连AP、BP、CP依次交对边BC、CA、AB于D、E、F，由Q引$QL//AD$、$QM//BE$、$QN//CF$依次交BC、CA、AB于L、M、N，则

$$\frac{QL}{AD}+\frac{QM}{BE}+\frac{QN}{CF}=1.$$

3. 某人有若干个孩子，他们的年龄各不相同，已知：(1) 最大孩子15岁；(2) 其中一个9岁；(3) 所有孩子岁数的总和是45岁；(4) 除去9岁的那个孩子外，其他孩子的岁数恰好成等差数列。问此人有多少个孩子？每个孩子各几岁？

4. n ($n>2$) 个学生坐成一个圆圈，依逆时针方向顺次编为1、2、…、n号，老师在圈外按下述规则叫号，设第一

次叫到第 k 号学生，则第二次被叫到的是该学生后面（按逆时针方向）第 k 个学生，设他是第 i 号，则第三次叫到的是第 i 号学生后面的第 i 个学生，如此继续进行下去，证明不论第一次叫第几号学生，至少有一个学生永远不会被叫到。

高中三年级第一试试题

1. 试证：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$ （其中 n 为自然数）。

2. 解方程：

$$6\log_{\frac{x}{a}}a+\frac{4}{\log_a x}+6\log_{ax}a=0$$ （其中 $a>0$，$a\neq1$）。

3. 设 $\sin\alpha$ 是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的等差中项，$\sin\beta$ 是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的等比中项，求证：

$$\cos2\alpha=\frac{1}{2}\cos2\beta.$$

4. 已知 $\triangle ABC$ 的 $\angle B=2\angle C$，边 BC 的中点为 M，从顶点 A 向边 BC 所作的垂线足为 H，则 $MH=\frac{1}{2}AB$。

5. 设已知直角的一条边平行于一个平面，另一条边与该平面不垂直，则这个角在这平面内的正射影是直角。

高中三年级第二试试题

1. 同高中二年级第二试第 1 题。

2. 已知

$$a^4\sin^4\theta+b^4\cos^4\theta+c^4\mathrm{tg}^4\theta+d^4\mathrm{ctg}^4\theta=2abcd\sin2\theta,$$

其中 a, b, c, d 皆为正数，θ 为正锐角。试证：

$$\frac{a}{b}\mathrm{tg}\theta+\frac{b}{a}\mathrm{ctg}\theta+\frac{a}{c}\cos\theta+\frac{b}{d}\sin\theta=4.$$

3. 已给圆的两弦 AB 与 CD 交于圆内点 P(非圆心)，已知 $AP^2+BP^2+CP^2+DP^2=d^2$ (d 为所给圆的直径)，当 CD 位置固定时，问 AB 可能取怎样的位置？

4. 同高中二年级第二试第 4 题。

哈尔滨市第二届中学数学竞赛试题

(1978 年)

第一试试题

1. 试证 $\mathrm{arctg}7-2\mathrm{arctg}2=-\frac{\pi}{4}$。

2. 解方程：

$$\frac{1}{\lg\left(\frac{1}{2}+\cos^2x\right)}=\log_{\sin^2 2x}10.$$

3. 已知 a、b、c 为实数，且 $a>b>c$。求证：

(1) 方程 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ 总有相异两实根；

(2) 上述方程的两实根必在 c、a 两数之间。

4. 如图 33，在 $\triangle ABC$ 中，$AE:EC=4:3$，$BD:DC$

$=2:5$. 求$\dfrac{AH}{HD}$的值。

5. 求证：对任何自然数 n，不等式

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1)$$

成立。

6. 棱长为 a 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M、N、P分别是棱 C_1B_1、C_1C、C_1D_1 的中点。

(1) 证明正方体的对角线 AC_1 与$\triangle MNP$所在的平面垂直；

(2) 计算四面体 $A—MNP$ 的体积。

第二试试题

1. 求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值. 其中实数 x、y、z 满足：

$$\begin{cases}x+y+z=10,\\ x-y+z=6.\end{cases}$$

2. 已知$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle B=2\angle A$。

(1) 求证：$AB^2=AB\cdot BC+BC^2$；

(2) 求 $\cos A$ 的值。

3. 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=400$ 所围成的图形内部(不包括边界)的整点(坐标均为整数的点)的个数。

4. $(1978!)^2$ 的得数末尾一共有多少个连续的0？并说明理由。

5. 从 $1,2,3,4,\cdots,2n-1,2n$ (n是自然数)中任取 $n+1$ 个数. 证明所取的$n+1$ 个数中必有一个数是另两个数的和

或是另一个数的二倍。

6. （附加题）已知两组实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots b_n$（n 是自然数）分别满足

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n,$$
$$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n.$$

且 M 是 $a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n$ 中最大数。

(1) 如果 N 是 $a_1+b_2, a_2+b_3, \cdots, a_{n-1}+b_n, a_n+b_1$ 中最大的数，求证 $N \geqslant M$；

(2) 又 N' 表示 $a_1+B_1, a_2+B_2, \cdots, a_n+B_n$ 中最大的数，其中 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是 $b_1, b_2 \cdots, b_n$ 的任意一个排列，求证

$$N' \geqslant M.$$

哈尔滨市参加省第一届中学数学竞赛选拔赛试题

（1978 年）

1. 解方程 $\log_2(x+1)^2 + \log_{|x+1|}4 = 5$.

2. 设 A、B 为锐角，已知

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{7}, \ \sin B = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

求 $A+2B$ 的度数。

3. 已知 $\triangle ABC$ 内接于圆，角 A 所对的弧 BC 的中点为 D，连接 AD 与 BC 相交于 E 点，求证：