21世纪远程教育精品教材

公共基础课系列

高等数学“学习包”

（高等数学学习与考试指导）

张家琦　曹承宾　编著

中国人民大学出版社

21世纪远程教育精品教材

公共基础课系列

高等数学“学习包”

（高等数学学习与考试指导）

张家琦　曹承宾　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学"学习包"（高等数学学习与考试指导）/张家琦，曹承宾编著.
北京：中国人民大学出版社，2006
21世纪远程教育精品教材·公共基础课系列
ISBN 7-300-06765-4

Ⅰ.高…
Ⅱ.①张… ②曹…
Ⅲ.高等数学-远距离教育-教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第094783号

21世纪远程教育精品教材·公共基础课系列
高等数学"学习包"（高等数学学习与考试指导）
张家琦　曹承宾　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511239（出版部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司		
开　　本	720×965毫米 1/16	**版　　次**	2006年3月第1版
印　　张	18	**印　　次**	2006年3月第1次印刷
字　　数	318 000	**定　　价**	总定价36.00元　本册定价18.00元

“21世纪远程教育精品教材”

编委会

前　言

本书是根据高校网络教育部分公共基础课全国统一考试大纲《“高等数学(B)”考试大纲》编写的学习和应试指导书。编写本书是为了使考生更好地理解高等数学中的基本概念、基本理论、基本方法，掌握常用的运算技巧，帮助考生顺利地通过考试。

本书以中国人民大学出版社出版，张家琦、曹承宾编著的《高等数学》为教科书。

编写本书的指导思想如下：

1. 本书系统全面地涵盖了《“高等数学(B)”考试大纲》中的考核知识点，并对知识点的内容做了简约化的梳理，舍去了不必要的赘言。目的是使考生能够在有限的时间内，掌握好必要的、够用的考试内容。

2. 针对考生不易理解的概念和不易掌握的方法，从不同角度进行分析、讲解，以利于考生自学。

3. 按《“高等数学(B)”考试大纲》关于试卷题型的要求，在本书的各章，采取分题型归类的方法，对典型题目及其解题的思路做了引导性的讲解，旨在帮助考生了解出题形式和命题思路。

4. 在本书的各章综合练习部分，有针对性地选编了一些练习题，希望考生能够克服困难，独立完成，这是加深理解、学会运用和巩固学习成果的必要环节。同时考虑到考生自学的需要，我们给出了练习题的全解，供考生参考。

我们相信,此书的出版,对于广大考生顺利地通过考试具有切实的指导意义。书中如有不妥之处,恳请读者指正。

编 者

2006 年 1 月

目录

第一章

函　数

一、考试内容与考试要求

(一)考试内容

函数的定义,函数的表示法,分段函数,反函数,复合函数,隐函数,函数的性质(有界性、奇偶性、周期性、单调性),基本初等函数,初等函数.

(二)考试要求

1. 理解函数的概念.掌握函数的表示法,会求函数的定义域.
2. 了解函数的有界性、奇偶性、周期性、单调性.
3. 了解分段函数、反函数、复合函数、隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质和图像,了解初等函数的概念.

二、释疑解难

1. 确定一个函数的三个因素是什么？其中哪两个是要素？

【答】 确定一个函数的三个因素是：自变量的取值范围，因变量与自变量的对应法则，因变量的变化范围. 其中，自变量的取值范围和因变量与自变量的对应法则是要素.

2. 学习函数的定义应该注意哪些问题？

【答】 学习函数的定义，应该注意如下问题：

(1)函数的表示法只与上述两个要素有关，而与用什么字母表示自变量和因变量无关，即

$$f(x)=f(t)=f(u)=\cdots$$

例 1.1 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+5$，求 $f(x)$.

解 因为

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+5=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+5=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3$$

把 $x+\frac{1}{x}$ 换成 x，于是由上式可得

$$f(x)=x^2+3$$

(2)判别给定的两个函数是否表示同一函数，一般从两方面着手：其一，定义域是否相同；其二，对应关系是否一致. 仅当二者完全相同时，它们才相同.

例 1.2 $y=\frac{x^3-1}{x-1}$ 与 $g=x^2+x+1$ 是否相同函数？

解 由于函数 y 的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，而函数 g 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，因此它们不是相同函数.

例 1.3 $y=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 与 $g=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ 是否相同函数？

解 由于

$$y=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} & (x<0)\\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} & (x>0)\end{cases}$$

因此，它与函数 $g=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ 的对应法则不同，不是相同函数.

3. 何谓分段函数？讨论分段函数时，应注意什么问题？

【答】 在函数解析式表示法中，有时会遇到定义域中有些点处不同的子区间内，不能用统一的一个式子来表示函数的对应法则，需要用两个或两个以上的式子来表示，用这种方法表示的函数关系，称为分段函数. 用两个或多个式子表达函数关系时，它表述的是一个整体函数，不是多个函数.

在讨论分段函数时，要注意以下两个问题：

(1)在不同的子区间内，函数的对应法则；

(2)在分段点处，函数的取值.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+x & (x\leqslant 1)\\ x+5 & (x>1)\end{cases}$，求 $f(x+2)$. 解法如下：

用 $x+2$ 替换 $f(x)$ 中的 x，得

$$f(x+2)=\begin{cases}(x+2)^2+(x+2) & (x\leqslant 1)\\ (x+2)+5 & (x>1)\end{cases}\ \text{即}\ f(x+2)=\begin{cases}x^2+5x+6 & (x\leqslant 1)\\ x+7 & (x>1)\end{cases}$$

这种做法对吗？

【答】 不对. 正确做法是：当 $x+2\leqslant 1$，即 $x\leqslant -1$ 时，将 $x+2$ 代入上边一个解析式；当 $x+2>1$，即 $x>-1$ 时，将 $x+2$ 代入下边一个解析式，所以有

$$f(x+2)=\begin{cases}x^2+5x+6 & (x\leqslant -1)\\ x+7 & (x>-1)\end{cases}$$

关于分段函数求函数值，一定要注意正确选择与自变量取值相对应的解析式.

5. 分段函数是初等函数吗？

【答】 一般定义初等函数是指由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所得到的，并能用一个式子表示的函数. 虽然分段函数通常用几个表达式表示，但并不是说它不能用一个表达式表示.

例如，$\varphi(x)=|x|$，通常写成分段函数的形式

$$\varphi(x)=|x|=\begin{cases}-x & (x\leqslant 0)\\ x & (x>0)\end{cases}$$

但也可以写成一个表达式 $\varphi(x)=|x|=\sqrt{x^2}$,因此函数 $\varphi(x)=|x|$ 是初等函数.

虽然有些分段函数是初等函数,但把它写成一个表达式时,无助于我们讨论它的性质,相反,常会给我们增加麻烦.因此,对于分段函数,除特殊需要外,通常我们没有必要去鉴别它是不是初等函数,而把它当作非初等函数对待.

6. 设 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 有定义,$f(x)$ 是否可以既是偶函数又是奇函数?

【答】 一般不可能.可论证如下:

若 $f(x)$ 既是偶函数又是奇函数,那么由定义知,应有

$$\begin{cases}f(-x)=f(x)\\ f(-x)=-f(x)\end{cases}\quad \text{即} \quad \begin{cases}f(x)=f(-x)\\ f(x)=-f(-x)\end{cases} \qquad ①$$

两式相加,得 $f(x)=0$.

这说明除了恒为零的常数函数 $y=0$ 之外,不可能有满足组①的函数存在.

7. 单调函数必有单值反函数,不单调的函数是不是一定没有单值反函数?

【答】 不是的.一个函数是否存在单值反函数,取决于它的对应法则 f 在定义域 D 与值域 z 之间是否构成一一对应的关系,如果是一一对应,那么必有单值反函数;否则就没有单值反函数.函数在区间 I 上单调只是一种特殊的一一对应关系,因此单调仅是存在单值反函数的充分条件,而不是必要条件.

例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}-x & (-1\leqslant x\leqslant 0)\\ x+1 & (0<x\leqslant 1)\end{cases}$$

在区间 $[-1,1]$ 上不单调(见图 1.1),但它存在单值反函数(见图 1.2).

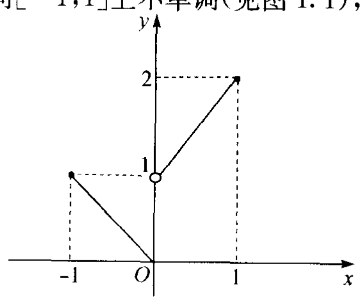

图 1.1

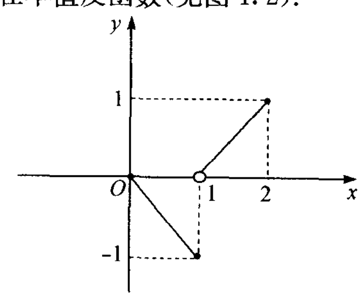

图 1.2

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ x-1 & (1<x\leqslant 2)\end{cases}$$

又如，函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}x & (x\text{ 为有理数})\\ -x & (x\text{ 为无理数})\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$内不单调，但有单值反函数 $\varphi^{-1}(x)\equiv\varphi(x)$.

8. 怎样确定函数值?

【思路】 对于函数 $y=f(x)$，当自变量取定义域中某一定值 x_0 时，因变量 y 的相应值称为当 $x=x_0$ 时的函数值，记作

$$f(x_0)\text{或 }y_0\text{ 或 }y|_{x=x_0}$$

当函数用公式法表示时，将 $x=x_0$ 代入 $f(x)$，即得 $f(x_0)$.

例 1.4 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(x+1)$.

解 将 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$中的所有 x 用$x+1$ 代替，得

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{x+2}$$

例 1.5 设 $f(x-1)=x^2+x-4$，求 $f(x)$.

〈方法一〉 设 $x-1=t$，则 $x=t+1$，于是

$$f(t)=(t+1)^2+(t+1)-4$$

$$f(t)=t^2+3t-2$$

即 $$f(x)=x^2+3x-2$$

〈方法二〉 由于

$$\begin{aligned}f(x-1)&=x^2+x-4\\&=(x^2-2x+1)+(3x-3)-2\\&=(x-1)^2+3(x-1)-2\end{aligned}$$

所以 $$f(x)=x^2+3x-2$$

例 1.6 设 $f(x)=\ln x, g(x)=e^{2x+1}$，求 $f[g(x)]$.

解 将 $f(x)=\ln x$ 中的所有 x 用 $g(x)$代替，有

$$f[g(x)]=\ln g(x)=\ln e^{2x+1}$$
$$=(2x+1)\ln e=2x+1$$

9. 怎样确定已知函数的反函数?

【思路】 (1)给定函数 $y=f(x)$,求出 x,用 y 的关系式表示,得 $x=f^{-1}(y)$,再将 x 换成 y,y 换成 x,即得 $y=f(x)$的反函数 $y=f^{-1}(x)$;

(2)$f(x)$与 $f^{-1}(x)$的定义域与值域互换;

(3)$f(x)$与 $f^{-1}(x)$的图形对称于直线 $y=x$.

例 1.7 设 $y=\dfrac{a+x}{b+cx}$(a,b,c 是常数)的反函数是 $y=\dfrac{1+2x}{1+3x}$,求 a,b,c 的值.

解 由 $y=\dfrac{a+x}{b+cx}$,解出 x,有 $x=\dfrac{a-by}{1-cy}$.

即 $y=\dfrac{a-bx}{1-cx}$

再由$\dfrac{a-bx}{1-cx}=\dfrac{1+2x}{1+3x}$

比较可得 $a=1,b=-2,c=-3$.

10. 怎样确定函数的奇偶性?

【思路】 设函数 $y=f(x)$的定义域是以原点为对称的区间 D 时,

(1)若 $f(-x)=f(x),x\in D$,则称 $f(x)$为偶函数;

(2)若 $f(-x)=-f(x),x\in D$,则称 $f(x)$为奇函数;

(3)若 $f(-x)\neq f(x)$且 $f(-x)\neq -f(x),x\in D$,则称 $f(x)$为非奇非偶函数.

例 1.8 求证:不论 $f(x)$是定义在$(-a,a)$的什么样的函数,总可以表成一个偶函数与一个奇函数之和.

证 将 $f(x)$表示为

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

设 $F(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,$G(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

因为 $F(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=F(x)$,所以 $F(x)$是偶函数.

因为 $G(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}=-G(x)$,所以 $G(x)$是奇函数.

故 $f(x)=F(x)+G(x)$ 总可以表为一个偶函数与一个奇函数之和.

三、典型例题解析

(一) 单项选择题

例 1.9 函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\lg(3x-8)$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,-2)\cup(8/3,+\infty)$　　B. $(8/3,+\infty)$

C. $(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2)$

【分析】 由 $x^2-x-6>0$ 得 $x>3$ 或 $x<-2$;由 $3x-8>0$ 得 $x>8/3$,所以函数的定义域为 $(3,+\infty)$.

解 选 C.

例 1.10 设 $f(x)=\begin{cases} x & (|x|<1) \\ 2 & (1\leqslant x\leqslant 3) \end{cases}$,则 $f(x-2)$ 的定义域是(　　).

A. $[-1,3]$　　B. $(-1,3]$

C. $[1,5]$　　D. $(1,5]$

【分析】 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,3]$,故有 $-1<x-2\leqslant 3$,即 $1<x\leqslant 5$. 所以 $f(x-2)$ 的定义域为 $(1,5]$.

解 选 D.

例 1.11 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2]$,则函数 $F(x)=f(x+2)+f(2x)$ 的定义域是(　　).

A. $[-3,0]$　　B. $[-3,1]$

C. $[-1/2,1]$　　D. $[-1/2,0]$

【分析】 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2]$,所以有

$$\begin{cases} -1\leqslant x+2\leqslant 2 \\ -1\leqslant 2x\leqslant 2 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -3\leqslant x\leqslant 0 \\ -\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$$

也即 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0$

因此,$F(x)$的定义域为$\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

解 选D.

例1.12 设$y=f(\lg x)$的定义域为$[1/2,2]$,则$y=f(x)$的定义域是( ).

A. $[1/2,2]$　　B. $[\sqrt{10},100]$

C. $[-\lg 2,\lg 2]$　　D. $[0,1]$

【分析】 求$f(x)$的定义域即求$\lg x$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上的值域,又$\lg x$为单调增函数,$\lg x$在$[1/2,2]$的值域为$\left[\lg\frac{1}{2},\lg 2\right]$,即$[-\lg 2,\lg 2]$.

解 选C.

例1.13 设$f(x)=\mathrm{e}^{(x-a)^2}$,$\varphi(x)=a+\cos x$,则$f[\varphi(x)]=$( ).

A. $a+\cos\mathrm{e}^{(x-a)^2}$　　B. $\cos\mathrm{e}^{(x-a)^2}$

C. $\mathrm{e}^{\cos x^2}$　　D. $\mathrm{e}^{\cos^2 x}$

【分析】 将$f(x)$中的x用$\varphi(x)$代替,有

$$\begin{aligned}f[\varphi(x)]&=\mathrm{e}^{[\varphi(x)-a]^2}\\&=\mathrm{e}^{[(a+\cos x)-a]^2}=\mathrm{e}^{\cos^2 x}\end{aligned}$$

解 选D.

例1.14 设$f(x)=x^2$,$g(x)=2^x$,则$f[g(x)]=$( ).

A. 2^{x^2}　　B. x^{2^x}　　C. x^{2x}　　D. 2^{2x}

【分析】 将$f(x)$中的x用$\varphi(x)$代替,有

$$\begin{aligned}f[g(x)]&=[g(x)]^2\\&=(2^x)^2=2^{2x}\end{aligned}$$

解 选D.

例1.15 设$f(x)=\begin{cases}2 & (|x|\leqslant 2)\\1 & (|x|>2)\end{cases}$,则$f[f(x)]=$( ).

A. 2　　B. 1　　C. $f(x)$　　D. $(f(x))^2$

【分析】 由题意,有

$$f[f(x)]=\begin{cases}2 & (|f(x)|\leqslant 2)\\1 & (|f(x)|>2)\end{cases}$$

因为，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|f(x)|\leqslant 2$，所以 $f[f(x)]=2$.

解 选 A.

例 1.16 设 $f(1-2x)=1-\dfrac{2}{x}$，则 $f(x)=($ $)$.

A. $1+\dfrac{4}{1-x}$ B. $1-\dfrac{4}{1-x}$

C. $1-\dfrac{2}{1-2x}$ D. $1+\dfrac{2}{1-2x}$

【分析】 设 $1-2x=t$，则 $x=\dfrac{1-t}{2}$，有

$$f(t)=1-\frac{2}{\frac{1-t}{2}}=1-\frac{4}{1-t}$$

即 $f(x)=1-\dfrac{4}{1-x}$

解 选 B.

例 1.17 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，则 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=($ $)$.

A. $1-\cos x$ B. $-\cos x$

C. $1+\cos x$ D. $1-\sin x$

【分析】 因为 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x=1+1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$

$$=2-2\sin^2\frac{x}{2}$$

所以 $f(x)=2-2x^2$

从而 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\dfrac{x}{2}=2-(1+\cos x)$

$$=1-\cos x$$

解 选 A.

例 1.18 下列各对函数中，是相同函数的是（ ）.

A. $f(x)=x\sqrt{x-1},g(x)=\sqrt{x^4-x^2}$

B. $f(x)=\arcsin(\sin x),g(x)=x$

C. $f(x)=\ln x^2,g(x)=2\ln x$

D. $f(x)=1-\cos 2x,g(x)=2\sin^2 x$