按教育部新大纲、新教材同步编写（26省市适用）

高一数学（下）

（试验本）

龙门辅导双色笔记

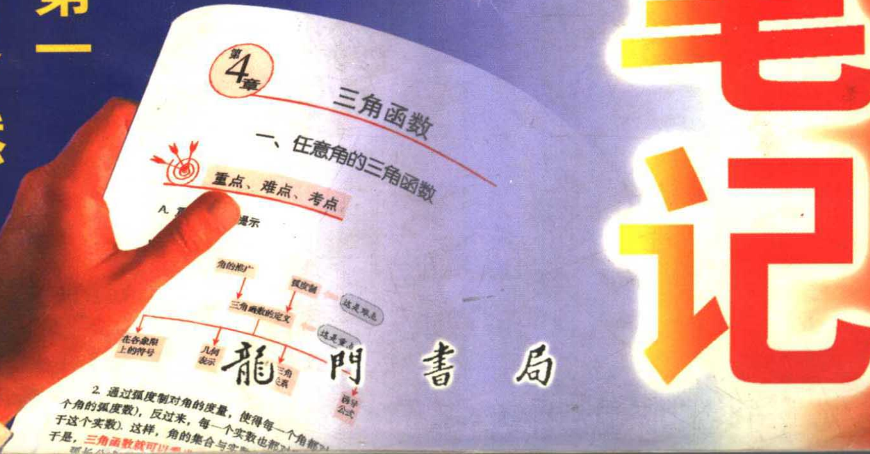
提高学习效率　门门功课第一

全国独一无二　开卷一目了然

主编 梅向明

顾问 蔡上鹤 顾振彪

撰文 王建民 等



龍門書局

创新

龙门辅导双色笔记

高一数学(下)

(试验本)

主　编：梅向明

顾　问：蔡上鹤
　　　　顾振彪

撰　文：王建民　毛　英
　　　　任爱东　何振琪
　　　　范登宸　张　鹤
　　　　邵光砚　辛　颖

龍門書局

2002

龙门辅导双色笔记

高一数学(下)

(试验本)

主编：梅向明　顾问：蔡上鹤　顾振彪

撰　　文：王建民　毛　英　任爱东　何振琪
　　　　　范登宸　张　鹤　邵光砚　辛　颖

责任编辑：吴浩源　李　名

出 版 者：龍門書局

发 行 者：科学出版社总发行　各地书店经销

(北京东黄城根北街16号　邮政编码：100717)

印　　刷：中国科学院印刷厂

版　　次：2002年1月第一版

印　　次：2002年1月第一次印刷

开　　本：850 × 1168　1/32

印　　张：6 3/8

字　　数：170 000

印　　数：1—60 000

定　　价：10.00元

ISBN　7 - 80160 - 376 - 1 / G · 367

(如有印装质量问题，我社负责调换)

创新 纸上VCD

龙门辅导 双色笔记

编委会

总 策 划：龙门书局
主 编：梅向明
顾 问：蔡上鹤 顾振彪
执行编委：吴浩源
编 委：马 超 李宝忱 郑学遐 冯树三 娄树华 王建民 陈继蟾 扈之霖 张雪梅 杨岷生 李新黔 罗 滨 许文龙 阎达伟 姜 崎
策划创意：马 超 吴浩源 郑学遐

主编

梅向明 著名教育家，原北京师范学院副院长兼数学系主任。现任全国政协常委、北京市政协副主席、中国民主促进会中央委员会副主席。

顾问

蔡上鹤 著名教材专家，人教版九年义务教育初中数学系列教材主编，人民教育出版社编审，课程教材研究所研究员，美国数学学会会员。

顾振彪 著名教材专家，人教版九年义务教育初中语文系列教材主编，人民教育出版社编审，课程教材研究所研究员。

前言

双色笔记：给你带来学习的快乐与进步

新世纪的钟声敲“新”了所有……

《龙门辅导双色笔记》丛书高中版在广大读者的期盼中呈现在大家的面前。由于丛书的初中版面世半年销量达到十五万套的事实，使我们完全相信，《龙门辅导双色笔记》丛书高中版的“新”也同样会得到广大高中师生和家长的喜爱的。

因为……

创新策划：提高学习效率，门门功课第一

《龙门辅导双色笔记》丛书高中版的策划充分考虑了高中阶段学习所追求的目标、高考考试改革的最新趋势和广大师生和家长对教辅读物的新要求。

首先，学习时间对高中学生来说是最宝贵的。《龙门辅导双色笔记》丛书高中版在内容和编排形式上力求创新，从激发学生的学习兴趣入手，在提高学生的学习效率上下功夫，使学生在相同的单位时间内学会更多的知识。

第二，章或单元的栏目设置必须精要、实用，针对性强；例题和练习题的选题必须源于教材、宽于教材、高于教材，编写难度以高考的考试水平、出题难度为参考界限，题型类别与高考的考试题型对应。在《龙门辅导双色笔记》丛书高中版独创编排形式的帮助下，使学生能在最短的时间内、用最有效的方式快速地、扎实地掌握知识，提高自己分析问题和解决问题的能力。这样，应试能力一定会很快提高，“门门功课第一”一定会成为现实。

创新编排：独创双色插入，开卷一目了然

《龙门辅导双色笔记》丛书高中版首创的“双色笔记型”实现了在内容和编排形式上的创新，即：

对章或单元的重点、难点、考点、规律、原理、公式、解题关键、易错之处、失分要害等采用“双色”显示，免去了学生在书本上勾画涂注之劳。

将学生在课堂上记笔记与教师的讲解、板书提示融为一体的“笔记型”，把老师解题的全过程和点拨提示均以独特的插入标志显示出来，使开卷一目了然，做到学习阅读和思维同步，解除了学生在学习中产生的思维障碍，大大地节省了学习时间。

最新信息：紧跟最新教材，依据最新大纲

《龙门辅导双色笔记》丛书高中版紧跟最新教材，依据最新颁布的高中各科的教学大纲和最新出版的全国统编的高中各科(试验修订本)教科书同步编写。为保持与全国统编教科书(试验修订本)的最新版本同步，高一语文、数学；高二语文、数学分上册(第一学期用)和下册(第二学期用)出版。

还是开头的那句话：新世纪的钟声敲“新”了所有。愿《龙门辅导双色笔记》丛书高中版的“新”给你带来学习的快乐和进步！

丛书编委会

2002年元月于北京

编者的话

本书依据2001年最新颁布的高中数学教学大纲和2001年出版的全国统编的高中数学第一册(下)(试验修订本·必修)，并结合近年全国高考的情况和高考考试改革的最新趋势，与最新教材同步，分章、节编写。每章都设置“重点、难点、考点”、“三点例题精析”、“课内习题选析”、“综合能力训练”、“应试能力测试”和“思路提示与答案”六部分内容，并附有“期末试题”与答案。书中所选的例题、综合训练题和测试题源于教材，宽于教材，高于教材，有利于开阔学生的思路，丰富和充实学生的信息量，提高学生的应试能力。

“重点、难点、考点”部分：对每章的重点知识、难点内容、高考热点进行简要的讲解，帮助学生掌握重点、突破难点，熟悉考点，以建立起知识体系，使学习、记忆、运用有序化。

“三点例题精析”部分：针对学习中应掌握的重点、难点和考点知识精选一定数量的启发性、实用性较强的典型例题，分析解题思路，给出规范解法，教给学生灵活运用所学知识，帮助学生寻求解题的突破口，引导学生研究“一题多解”、“多题一解”、“一题多变”和“多解归一”的思路和方法，使学生真正领悟到举一反三、触类旁通的奥妙。

“课内习题选析”部分：选取教材中少数有一定难度的习题进行讲解，使学生能及时巩固所学知识。

“综合能力训练”部分：选题既注重基础知识的训练，又注重综合能力的培养，以提高学生的解题能力。

“应试能力测试”部分：按大纲和考纲的要求选编了一定数量、贴近高考题型的测试题，供学生进行自测，以逐步提高应试能力。

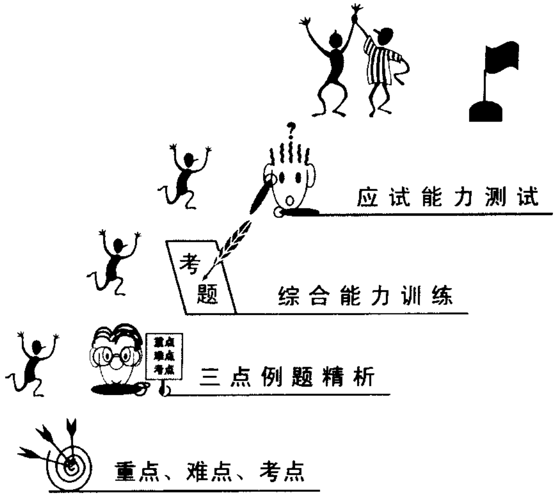
“思路提示与答案”部分：附于每章之最后，对“综合能力训练”和“应试能力测试”的全部题目给出提示、思路及解答，以便于学生练习后进行反馈纠正。

由于对书中的重点、难点、考点、规律、原理、公式、解题关键、易错漏之处、失分要害等采用双色显示，并将课堂笔记与板书融为一体、以插入的形式点拨，使开卷一目了然。采用这种全国独创的新形式可使重要内容突出，更符合学生的阅读习惯和思维程序，从而大大提高学习效率，在相同的单位时间内学会更多的知识。同时，本书也是家教的首选读物，因为这种全国独一无二的形式特别适合学生的自学，也特别适合教师、家长的辅导。

编　者

2002年元月于北京

目录



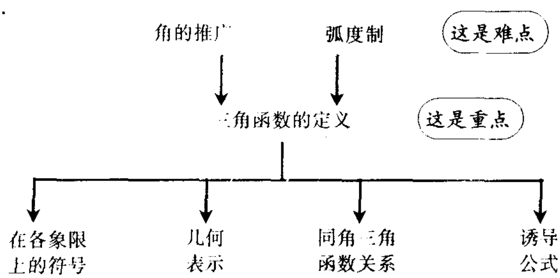
第4章 三角函数

一、任意角的三角函数

重点、难点、考点

A. 重点、难点提示

1.



2. 通过弧度制对角的度量，使得每一个角都对应着一个实数(即这个角的弧度数)，反过来，每一个实数也都对应着一个角(角的弧度数等于这个实数). 这样，角的集合与实数集之间建立了一种一一对应关系. 于是，三角函数就可以看成是以实数为自变量的函数.

弧长公式：$l=|\alpha|r$

其中，l 为弧长，r 为半径，α 为圆弧所对圆心角的弧度数.

3. 同角三角函数的基本关系式.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$$

是进行三角恒等变换的重要基础. 熟记，并能正确运用

4. 正弦、余弦的诱导公式.

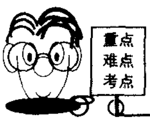
	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2k\pi+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$

概括地讲，就是$\alpha+2k\pi(k\in \mathbf{Z})$，$-\alpha$，$\pi\pm\alpha$，$2\pi-\alpha$ 的三角函数值，等于α 的同名函数值，前面加上一个把α 看成锐角时原函数的符号.

B. 考点指要

1. 理解任意角的概念、弧度的意义，能正确地进行弧度与角度的换算.

2. 掌握任意角的正弦、余弦，正切的定义，并会利用单位圆中的三角函数线表示正弦、余弦和正切；了解任意角的余切、正割、余割的定义；掌握同角三角函数的基本关系式；掌握正弦、余弦的诱导公式.



三点例题精析

【例 1】 判断下列命题的真假：

(1) 终边相同的角一定相等；

(2) 第一象限的角都是锐角；

(3) 若$\alpha\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$，则$\alpha$ 是第一象限的角；

(4) 若α 是第一象限的角，则$\frac{\alpha}{2}$也必定是第一象限的角.

思路分析

要搞清“终边相同的角”、“象限角”与“区间角”的概念及它们之间的差异.

解： 四个命题都是假的.

(1) 例如弧度为$\frac{\pi}{6}$的角与$\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in \mathbf{Z}$ 且 $k\neq 0)$的角，终边相同但并不相等.

要重视对角的准确理解及表达

(2) 因为锐角$\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，而第一象限的角的表达式为

$2k\pi<\beta<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$，显然 $k\neq 0$ 时，β 并非锐角.

(3) $\alpha=0$ 或 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 都不是第一象限的角.

(4) 例如 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}+2\pi$ 是第一象限的角，但 $\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\pi}{12}+\pi$ 并非第一象限的角.

【例 2】 已知角 α 的终边经过点 $P(3t,\ -4t)$，求角 α 的正弦、余弦和正切函数值.

思路分析

在由三角函数的定义求三角函数时，为了确定角所在象限和所求函数值的符号，必须对 t 进行讨论，这一点不可忽视.

解： $\because\ x=3t,\ y=-4t,\ |OP|=r$

$\therefore\ r=\sqrt{(3t)^2+(-4t)^2}=\sqrt{25t^2}=5|t|$ （要会用定义求三角函数值）

(1) 当 $t>0$ 时，α 是第四象限角，$\therefore\ \sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-4t}{5t}=-\dfrac{4}{5}$

$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{3t}{5t}=\dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-4t}{3t}=-\dfrac{4}{3}$.

(2) 当 $t<0$ 时，α 是第二象限角

$\therefore\ \sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-4t}{-5t}=\dfrac{4}{5}$

同理可得：$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$.

【例 3】 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$，求 $1+\tan^4\alpha$ 的值.

思路分析

欲求 $\tan\alpha$，由商数关系：$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\alpha$ 知，只需求 $\sin\alpha$，由于已知 $\cos\alpha$，可利用平方关系求 $\sin\alpha$.

解： $\because\ \cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$

$$\therefore\ 1+\tan^4\alpha=1+\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=1+\frac{\frac{25}{81}}{\frac{16}{81}}=1+\frac{25}{16}=\frac{41}{16}.$$

正切转化为正弦、余弦之比是常用的三角变形

【例 4】 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，求 $\tan\theta+\cot\theta$ 的值.

思路分析

$\sin\theta+\cos\theta$，$\sin\theta-\cos\theta$，$\sin\theta\cdot\cos\theta$ 三者知其一可求其二，但已知 $\sin\theta\cdot\cos\theta$，求另二式时需注意开方时的符号.

解： $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$ ㊉

$\because\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$

$\therefore\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\because\ \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$，平方有

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{3}$，即 $\sin^2\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{3}$

又 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\therefore\ 2\sin\theta\cdot\cos\theta=-\frac{2}{3}$

$\therefore\ \sin\theta\cdot\cos\theta=-\frac{1}{3}$，由㊉式知

$\tan\theta+\cot\theta=-3.$

【例 5】 设 $\tan\alpha=2$，求以下各式的值：

(1) $\frac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}$　　(2) $\frac{4\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}{5\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}$

(3) $\frac{1}{1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$　　(4) $\frac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$

思路分析

欲求上列各式的值，只需将它们用 $\tan\alpha$ 表示.

形如 $y=a\sin\theta+b\cos\theta$　①

$y=a\sin^2\theta+b\sin\theta\cdot\cos\theta+c\cos^2\theta$　②

$$y=\frac{a\sin\theta+b\cos\theta}{a'\sin\theta+b'\cos\theta} \qquad ③$$

$$y=\frac{a\sin^2\theta+b\sin\theta\cdot\cos\theta+c\cos^2\theta}{a'\sin^2\theta+b'\sin\theta\cdot\cos\theta+c'\cos^2\theta} \qquad ④$$

的式子，分别称为正弦、余弦的齐次式或齐次分式. 如果 $\tan\theta=m$ ($m\neq 0$)，那么以上诸式都可以依下述方法求值.

将① 式乘以 $\frac{\cos\theta}{\cos\theta}$，得到$(a\,m+b)\cos\theta$，然后求 $\cos\theta$；

将② 式乘以 $\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$，得到 $\frac{am^2+bm+c}{1+m^2}$；

将③式分子、分母同除以 $\cos\theta$，得 $\frac{am+b}{a'm+b'}$；

将④式分子、分母同除以 $\cos^2\theta$，得到 $\frac{am^2+bm+c}{a'm^2+b'm+c'}$.

解：(1) 将原式分子、分母同除以 $\cos\alpha$

原式$=\frac{4\tan\alpha-2}{5+3\tan\alpha}=\frac{6}{11}$.

依据 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(2) 将原式分子、分母同除以 $\cos^2\alpha$，

原式$=\frac{4\tan^2\alpha-2}{5+3\tan^2\alpha}=\frac{14}{17}$.

(3) $\frac{1}{1-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

化成正、余弦齐次分式

将上式分子、分母同除以 $\cos^2\alpha$

原式$=\frac{\tan^2\alpha+1}{\tan^2\alpha+1-\tan\alpha}=\frac{5}{3}$.

(4) $\frac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$

将上式分子、分母同除以 $\cos^2\alpha$

原式$=\frac{\tan^2\alpha+1+2\tan\alpha}{\tan^2\alpha-1}=\frac{9}{3}=3$.

【例 6】 已知 $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=2$，$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{1}{2}$，求 $\tan\alpha$, $\cot\beta$ 的值.

思路分析

这是已知两个等式的求值问题，一般可用消去法，即用代入、加减、平方等方法消去某些量来解.

解： $\because$ $\sin\alpha = 2\sin\beta$，$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\cos\beta$

体会“1”的妙用！

$\therefore$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 4\sin^2\beta + \dfrac{1}{4}\cos^2\beta = 1 = \sin^2\beta + \cos^2\beta$

解得 $3\sin^2\beta = \dfrac{3}{4}\cos^2\beta$

由 $\cos\beta \neq 0$ 得 $\tan^2\beta = \dfrac{1}{4}$

由 $\tan\beta \cdot \cot\beta = 1$ 知 $\cot^2\beta = 4$ $\therefore$ $\cot\beta = \pm 2$

同理可求得，$\tan\alpha = \pm 2$

又由原两式之比为 $\tan\alpha \cdot \cot\beta = 4$

即 $\tan\alpha$ 与 $\cot\beta$ 同号

故 $\tan\alpha = 2$，$\cot\beta = 2$ 或 $\tan\alpha = -2$，$\cot\beta = -2$.

【例 7】 求证：$2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) = -1$.

思路分析

证明三角恒等式离不开三角函数的变换，在变换中，要自始至终从式子的结构特征入手，抓差异，促转化，求同一.

本题函数，运算上都有差异：左边是正、余弦的高次多项式，右边是常数项. 因此，对左边消元，降次，化繁为简应是解此题的基本途径.

证法一： 左边 $= 2[(\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3] - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$

$= 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)[\sin^4\theta - \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta + \cos^4\theta] - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$

注意乘法公式的应用

$= 2\sin^4\theta - 2\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta + 2\cos^4\theta - 3\sin^4\theta - 3\cos^4\theta$

$= -(\sin^4\theta + 2\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta + \cos^4\theta)$

$= -(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 = -1$ 逆用完全平方公式化简

$\therefore$ 左边=右边.

证法二： 利用 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，得

$$(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 = \sin^4\theta + 2\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$$

$\therefore$ $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta$ ①

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3=\sin^6\theta+3\sin^4\theta\cdot\cos^2\theta+3\sin^2\theta\cdot\cos^4\theta+\cos^6\theta=1$$

$$\therefore\ \sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta \qquad ②$$

把① ②代入等式左边，得　　运用公式$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$\begin{aligned}&2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\\&=2(1-3\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta)-3(1-2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta)\\&=2-6\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta-3+6\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta=-1.\end{aligned}$$

◆点评◆　本例中，为降低 $\sin\theta$, $\cos\theta$ 的次数，我们反复使用了平方关系 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. 由此联想到，若反用该公式还能达到升次作用.

【例 8】化简：

$\sin(-1071°)\cdot\sin99°+\sin(-171°)\cdot\sin(-261°)-\cot1089°\cdot\cot(-630°)$.

思路分析

在使用诱导公式求三角函数值时，一般可按以下步骤进行：先化负角为正角，再去掉圆周数 $2k\pi$，最后化 $0°\sim360°$间角为 $0°\sim90°$间角.

解：原式 $=\sin(-3\times360°+9°)\times\sin(180°-81°)+\sin(180°-9°)$

$$\begin{aligned}&\times\sin(180°+81°)+\cot(3\times360°+9°)\times\cot(360°+270°)\\&=\sin9°\times\sin81°-\sin9°\times\sin81°+\cot9°\times\cot270°\\&=0.\end{aligned}$$

【例 9】　化简 $\cos\left[\dfrac{(4n+1)\pi}{4}+\alpha\right]+\cos\left[\dfrac{(4n-1)\pi}{4}-\alpha\right]$ $(n\in\mathbf{Z})$

思路分析

这是关于整数 n 的三角式的化简问题，一般要对 n 进行讨论.

解：原式 $=\cos\left[n\pi+\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]+\cos\left[n\pi-\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]$

当 n 为偶数时

原式 $=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$

当 n 为奇数时　　对 n 讨论以便使用诱导公式

原式 $=-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$=-2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$