

高等学校教材

高等数学

(本科少学时类型) (第三版) 上册

同济大学应用数学系 编



高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

(本科少学时类型)

(第三版)

上册

同济大学应用数学系 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册: 本科少学时类型/同济大学应用数学系编. —3版. —北京: 高等教育出版社, 2006. 7

ISBN 7-04-019578-X

I. 高... II. 同... III. 高等数学-高等学校-教材 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第057719号

策划编辑 徐刚 责任编辑 蒋青 封面设计 王 晔
责任绘图 杜晓丹 版式设计 史新薇 责任校对 殷 然
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版 次	1978年3月第1版 2006年7月第3版
开 本	850×1168 1/32	印 次	2006年7月第1次印刷
印 张	13.625	定 价	14.50元
字 数	340 000		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 19578-00

内容提要

本书分上、下两册出版。上册 6 章，内容为函数与极限，一元函数微积分，微分方程；下册 4 章，内容为向量代数与空间解析几何，多元函数微积分，无穷级数。本书按照适当降低理论深度，突出微积分中实用的分析和运算方法，着重基本技能的训练而不过分追求技巧的原则，对第二版作了修订。内容上作了一些增删；结构上作了适当调整；删去了某些要求过高的习题，增加了突出基本训练的题目，增加了便于阶段复习的章复习题，使之更适应本书的使用要求。本书可作为本科少学时专业和专科的高等数学教材或参考书。

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

第三版前言

本书第三版是在第二版的基础上，参照近期修订的工科类本科数学基础课程基本要求和专科类高等数学课程教学基本要求，并考虑当前教学的实际情况，进行修订而成的。

本书主要面向大学本科少学时类型和一些专科、高职的高等数学课程。近几年来，选择这种类型高等数学课程的专业和学生增加较快，他们的教学需求也变得多样。为此，我们在修订时，在基本保持本书第二版的内容框架和深广度的同时，对部分内容作了适当调整和精简处理，更加突出少学时类型的特色。考虑到不同专业对数学要求的差异，对一些内容加了*号，供要求较高的专业使用。此外还有一些内容用小字排印，以便使用者根据实际情况灵活选用，更好地掌握教学重点。本次修订时着重考虑了如何进一步加强基本概念，突出素质培养，注重实际应用。为此，我们对一些基本概念和理论的阐述作了修订，在不失严谨的同时做到更加平易好懂，便于教学。书中增加了一些选自不同领域的简单应用题，精选了一些复习概念的习题，引进一些新的题型，并在每章后面增加了章复习题，便于学生进行阶段复习。

参加本次修订工作的有骆承钦、郭镜明、邵婉鸣、朱晓平等同志。对于本书存在的问题及不足之处，欢迎同行和读者批评指正。

编 者

2006年2月

第二版前言

本书自 1987 年出版以来，至今已有 14 年之久。在这期间内，我国的高等教育事业发展很快，有更多的专业需要使用少学时类型的高等数学教材，并在使用过程中对这类教材提出了一些意见和新的要求。在这样的形势下，为了使本书更好地适应教学需要，在高等教育出版社的大力支持下，我们对它作了一次全面的修订。

这次修订的指导思想是：适当降低理论深度，突出微积分中实用的分析和运算方法，着重基本技能的训练而不过分追求技巧。按照这个想法，我们对极限理论、积分法、向量代数和级数理论等都作了修改，使之更适应本书的使用要求。此外，我们参照教育部颁发的专科高等数学教学基本要求，对原书内容作了少量增删，去掉了级数一章的“*”号，并删去了其中傅里叶级数部分，增加了求条件极值的拉格朗日乘法。在这次修订时，我们遵从多数同行的意见，把中值定理与导数应用一章紧接在导数一章之后，并把定积分与定积分的应用合并为一章。这次还对全书习题作了修订，删去了某些要求过高的习题，同时增加了一些突出基本训练的题目。

参加本次修订工作的有骆承钦、郭镜明、邵婉鸣、朱晓平等同志。天津大学齐植兰教授仔细审阅了初稿并提出了许多中肯的修改意见，对此我们表示衷心的感谢。

编 者

2000 年 6 月

第一版前言

我国高等学校中有一部分工科本科专业的高等数学课程的教学要求比一般工科专业稍低，教学时数也较少，我校就有少数这样的专业。此外，我校还有一些大专性质的专修科、进修班，它们的高等数学课程也属于这一类型。由于教学的需要，长期以来我们一直想编写一本适用于这一类型的教材，在高等教育出版社的支持下，终于在今年春季正式开始了编写工作。我们希望，这本教材的出版，能对其他学校的同类型的高等数学教学有所裨益。

在编写本教材时，我们以同济大学数学教研室主编的《高等数学》一书作为基础，但作了不少改动。我们删节了一些对于少学时类型来说要求过高的内容和难度较大的习题；对有些概念的叙述以及少数定理的证明作了某些改变；对一些章节的次序也重新作了安排。在精简部分内容的同时，对于那些我们认为学生必须掌握的基本理论、基本知识和基本技能，则不惜篇幅，力求解说详细，使读者容易接受。我们希望所作的这些改动能使这本教材较好地适合本科少学时类型的教学要求。

考虑到有些专业课程需要较早地应用积分的知识，因此在上册一元函数微积分学中，把不定积分与定积分安排在中值定理与导数的应用之前，这样做也许有利于高等数学与其他课程的配合。当然，如果没有这种需要，也可先学中值定理与导数的应用这一章，然后再学一元函数积分学。

我们认为，对一本教材所包含的内容不宜限制过死，以便使它能适应要求大体相仿但不完全相同的读者的需要。基于这样的认识，我们在下册中写进了一些供选学的内容，这些内容均用*

号标出。

参加本书编写工作的有王福楹、张绮萱、骆承钦、郭镜明等同志，限于编者的水平，书中必有考虑不周之处，也会存在缺点和错误，希望读者批评、指正。

编 者

1985年12月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
一、集合与区间	1
二、函数概念	5
三、函数的几种特性	9
四、反函数	11
五、复合函数·初等函数	14
习题 1-1	17
第二节 数列的极限	19
习题 1-2	27
第三节 函数的极限	28
一、自变量趋于有限值时函数的极限	28
二、自变量趋于无穷大时函数的极限	33
习题 1-3	36
第四节 无穷小与无穷大	37
一、无穷小	37
二、无穷大	40
习题 1-4	43
第五节 极限运算法则	43
习题 1-5	49
第六节 极限存在准则·两个重要极限	50
一、夹逼准则	50
二、单调有界收敛准则	54
习题 1-6	59

第七节 无穷小的比较	60
习题 1-7	64
第八节 函数的连续性	64
一、函数连续性的概念	64
二、函数的间断点	66
三、初等函数的连续性	69
习题 1-8	72
第九节 闭区间上连续函数的性质	73
一、最大值和最小值定理	73
二、介值定理	75
习题 1-9	77
第一章复习题	77
第二章 导数与微分	80
第一节 导数概念	80
一、引例	80
二、导数的定义	83
三、求导数举例	84
四、导数的几何意义	88
五、函数的可导性与连续性之间的关系	90
习题 2-1	91
第二节 函数的和、积、商的求导法则	92
一、函数的线性组合的求导法则	92
二、函数积的求导法则	94
三、函数商的求导法则	96
习题 2-2	99
第三节 反函数和复合函数的求导法则	100
一、反函数的导数	100
二、复合函数的求导法则	103
习题 2-3	107

第四节 高阶导数	109
习题 2-4	112
第五节 隐函数的导数以及由参数方程所确定的函数的 导数	113
一、隐函数的导数	113
二、由参数方程所确定的函数的导数	117
习题 2-5	122
第六节 变化率问题举例及相关变化率	123
一、变化率问题举例	123
二、相关变化率	128
习题 2-6	130
第七节 函数的微分	131
一、微分的定义	131
二、微分的几何意义	135
三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则	136
四、微分在近似计算中的应用	139
习题 2-7	142
第二章复习题	144
第三章 中值定理与导数的应用	148
第一节 中值定理	148
一、罗尔定理	148
二、拉格朗日中值定理	151
习题 3-1	156
第二节 洛必达法则	156
习题 3-2	162
第三节 泰勒中值定理	162
习题 3-3	167
第四节 函数的单调性和曲线的凹凸性	168
一、函数单调性的判定法	168

二、曲线的凹凸性与拐点	172
习题 3-4	177
第五节 函数的极值和最大、最小值	178
一、函数的极值	178
二、函数的最大、最小值	184
习题 3-5	190
第六节 函数图形的描绘	191
习题 3-6	197
* 第七节 曲率	197
一、弧微分	197
二、曲率及其计算公式	199
三、曲率圆与曲率半径	203
* 习题 3-7	204
* 第八节 方程的近似解	205
* 习题 3-8	209
第三章复习题	209
第四章 不定积分	212
第一节 不定积分的概念与性质	212
一、原函数与不定积分的概念	212
二、基本积分表	217
三、不定积分的性质	219
习题 4-1	221
第二节 换元积分法	222
一、第一类换元法	222
二、第二类换元法	230
习题 4-2	235
第三节 分部积分法	236
习题 4-3	241
第四节 有理函数的不定积分	242

习题 4-4	247
第五节 积分表的使用	248
习题 4-5	250
第四章复习题	250
第五章 定积分及其应用	253
第一节 定积分的概念与性质	253
一、定积分问题举例	253
二、定积分的定义	256
三、定积分的近似计算	260
四、定积分的性质	262
习题 5-1	267
第二节 微积分基本公式	268
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系	268
二、积分上限的函数及其导数	269
三、牛顿-莱布尼茨公式	271
习题 5-2	274
第三节 定积分的换元法及分部积分法	276
一、定积分的换元积分法	276
二、定积分的分部积分法	281
习题 5-3	284
第四节 定积分在几何上的应用	285
一、定积分的元素法	286
二、平面图形的面积	287
三、体积	293
四、平面曲线的弧长	296
习题 5-4	300
第五节 定积分在物理上的应用	303
一、变力沿直线所作的功	303
二、水压力	305

三、引力	306
习题 5-5	307
第六节 反常积分	308
一、无穷限的反常积分	308
二、被积函数具有无穷间断点的反常积分	313
习题 5-6	317
第五章复习题	317
第六章 微分方程	321
第一节 微分方程的基本概念	321
习题 6-1	325
第二节 可分离变量的微分方程	326
一、可分离变量的微分方程	326
* 二、齐次方程	330
习题 6-2	335
第三节 一阶线性微分方程	336
习题 6-3	341
* 第四节 可降阶的高阶微分方程	342
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	342
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	344
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	347
* 习题 6-4	349
第五节 二阶常系数齐次线性微分方程	349
习题 6-5	358
第六节 二阶常系数非齐次线性微分方程	359
一、 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型	360
二、 $f(x) = e^{\lambda x}(A\cos \omega x + B\sin \omega x)$ 型	363
习题 6-6	365
第六章复习题	366
附录	369

附录 I	基本初等函数的图形及其主要性质	369
附录 II	几种常用的曲线	373
附录 III	积分表	377
习题答案	390

第一章 函数与极限

本高等数学课程的主要内容是微积分及其应用。微积分与中学里学的初等数学是有重大区别的。初等数学研究的对象基本上是不变的量(称为常量)，而微积分则是以变量作为研究对象。研究变量时，着重考察变量之间的相依关系(即所谓的函数关系)，并讨论当某个变量变化时，与它相关的变量的变化趋势。这种研究方法就是所谓的极限方法。本章将介绍函数、极限和函数连续性等基本概念，以及它们的一些性质，这些内容是学习本课程必需掌握好的基础知识。

第一节 函 数

一、集合与区间

1. 集合

讨论函数离不开集合这个概念。在数学中，我们把指定的有限多个或无限多个事物所组成的总体称为一个集合。组成这个集合的事物称为该集合的元素。本书以大写字母表示集合。事物 a 是集合 M 的元素，记作 $a \in M$ (读作 a 属于 M)；事物 a 不是集合 M 的元素记作 $a \notin M$ (读作 a 不属于 M)。

由有限个元素组成的集合称为有限集，而由无穷多个元素所组成的集合则称为无限集。表示集合的方法通常有两种。一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来表示。例如，由元素 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的集合 A 可表示成

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$