高等学校辅导教材

线性代数辅导

同济·第四版

清华大学 李永乐
清华大学 周耀耀 编著

国家行政学院出版社

高等学校辅导教材

线性代数辅导

（同济·第四版）

编著　清华大学　李永乐
　　　清华大学　周耀耀

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数辅导/李永乐，周耀耀编著. －北京：国家行政学院出版社，2004
ISBN 7-80140-320-7

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①李… ②周… Ⅲ. 线性代数-高等学校-自学参考资料
Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 004472 号

线性代数辅导

李永乐 周耀耀 编著

*

国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码：100089
发行部电话：68920615、68929949
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷

*

787×960 1/16 开本 17.5 印张 330 千字
2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-80140-320-7/O·27 定价：16.00 元

前　言

线性代数是一门重要的基础课，它研究的是有限维空间的线性理论，它所涉及到的处理问题的思想、方法和技巧被广泛地应用到科技的各个领域，尤其是随着计算机的发展，这种离散化解决问题的手法尤显重要。

线性代数这门课程的特点是：概念多，符号多，运算法则多（有些法则与大家习惯的数的运算法则有较大的反差），容易引起混淆；内容上纵横交错，前后联系紧密，环环相扣，相互渗透，切入点接口多；对于抽象性和逻辑性有较高的要求。因此，初学者驾驭把握起来有一定困难，不少同学虽用心学习，但收效甚微。为此，我们编写此书希望给同学一些帮助。

本书每章设有**基本内容**，**主要知识网络图**，**重要的定理与公式**，希望能帮助同学把握住该章的核心，通过选编的**典型例题**（约300道），或是澄清基本概念与基本运算，或是指出初学者常犯之错误，或是介绍线性代数中常用思路与技巧，并且许多题目给出一题多解，通过这些希望能开阔思路，活跃思维，举一反三，触类旁通。同学做各章设置的**练习题**可达到巩固、理解、提高的目的。在做练习题时，一定要独立思考，动手做题，实在有困难再看提示和参考答案。

编写本书时，我们主要参考了下列大学的线性代数教材：**清华大学、同济大学、西安交通大学、浙江大学、四川大学**以及高教出版社出版的面向21世纪课程教材，还有N. B. 普罗斯库列柯夫著、周晓钟

译的“线性代数习题集”和全国工学、经济学硕士生入学考试试题。

注：本书中带“*”号的试题要求较高，本科生可不必去做。

本书不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编　者

2004年6月于清华园

目　录

第一章　行列式

§1.1　基本内容

行列式是一个重要的数学工具，在线性代数中有较多的应用．

应当在理解 n 阶行列式的概念，掌握行列式性质的基础上，熟练地计算 3 阶、4 阶行列式，也要会计算简单的 n 阶行列式．

计算行列式的基本方法是用按行(列)展开公式，通过降阶来实现，但在展开之前往往先运用行列式的性质，对行列式作恒等变形，以期有较多的零或公因式，这样可简化计算．计算时的常用技巧有：三角化法、公式法、递推法、数学归纳法等．

一、主要知识网络图

- **排列**——逆序——奇排列、偶排列
- **概念**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t(j_1 j_2 \cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad (1.1)$$

(不同行不同列元素乘积的代数和)

- **性质**
  - 行列互换，行列式的值不变
  - 互换行列式的两行(列)，行列式变号
  - 某行(列)有公因数可把其提到行列式符号之外
  - 某行(列)的 k 倍加至另一行(列)，行列式的值不变
  - 若行列式中某一行(列)的所有元素均为两项之和则该行列式可拆为两个行列式之和．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- **展开式**　$D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$ 代数余子式
- **计算**
  - 三角化法
  - 递推法
  - 加边法
  - 数学归纳法
  - 公式法
  - 拆项法
- **应用**
  - 克莱姆法则
  - 齐次线性方程组有非零解的充分条件

【评注】 ① 由于 n 级排列共有 $n!$ 个,其中奇排列与偶排列的个数相同,因此 n 阶行列式含有 $n!$ 项,其中带正号与带负号的各占二分之一.

② 虽然可用定义来计算行列式的值,但多数情况下是烦乱的,计算行列式主要用行列式的按行(列)展开公式,通过降阶来实现,但在用展开式之前往往先利用行列式的性质对其作恒等变形,以期减少计算工作量.

二、主要定理

【定理 1.1】 (行列式按行(列)展开公式) n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n). \tag{1.2}$$

【定理 1.2】 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j),$$

或

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 \quad (j \neq k). \tag{1.3}$$

【定理 1.3】 (克莱姆法则) 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$,则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}. \tag{1.4}$$

其中 $D_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组的常数项替代后所得到的 n 阶行列式.

【定理 1.4】 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解,则它的系数行列式必为零.

三、重要公式

1. 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{2n} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.5}$$

2. 两个特殊的拉普拉斯展开式

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

(2) $$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

3. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j). \tag{1.8}$$

§1.2 典型例题分析

一、n 阶行列式的概念

【例 1.1】 求下列排列的逆序数：

(1) 21736854；

(2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

【分析】 求一个排列的逆序数可以有两种思路：

思路一：按此排列的次序分别算出每个数的后面比它小的数的个数，然后求和.

思路二：按自然数的顺序分别算出排在 1,2,3,⋯ 前面的比它大的数的个数，再求和.

【解法一】 （用思路一）

2 的后面有 1 小于 2，故 2 的逆序数为 1.

1 的后面没有小于 1 的数，1 的逆序数为 0.

7 的后面有 3,6,5,4 小于 7，故 7 的逆序数为 4. 依此方法逐个计算. 可知此排列的逆序数 $\tau(21736854)=1+0+4+0+2+2+1+0=10$.

【解法二】 （用思路二）

1 的前面比 1 大的数有 1 个 2，故 1 的逆序数是 1.

2 排在首位没有逆序.

3 的前面有一个 7 比 3 大，逆序数为 1.

依此计算，得 $\tau(21736854)=1+0+1+4+3+1+0+0=10$.

(2) 此排列的前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$ 之间没有逆序，后 n 个数 $246\cdots(2n)$ 之间也没有逆序，只是前 n 个数与后 n 个数之间才有逆序，用思路一易见.

$$\begin{aligned}&\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))\\&=0+1+2+\cdots+(n-1)+0+0+\cdots+0\\&=\frac{1}{2}n(n-1).\end{aligned}$$

【例 1.2】 已知 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 在 4 阶行列式中带负号，求 j 与 k.

【分析】 本题有两种方法，一是先将该项的行指标按自然顺序排好，然后再用列指标应当是奇排列（因为该项带负号）来确定 j 与 k. 另一方法是直接计算行的逆序数与列的逆序数，使其和为奇数来定 j 与 k.

【解法一】 由于 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}=a_{12}a_{2k}a_{3j}a_{41}$，而 $2,k,j,1$ 是 1 至 4 的排列，故

j与k只能取自3和4.

若$j=3,k=4$,则

$$\tau(2431)=1+2+1=4$$

是偶排列,与该项带负号不符,故$j=4,k=3$.

【解法二】 同前,若$j=3,k=4$,则该项为$a_{33}a_{12}a_{41}a_{24}$,此时,行指标与列指标的逆序数之和

$$\tau(3142)+\tau(3214)=3+3=6$$

是偶数,与该项带负号不符,可见$j=4,k=3$.

【注】 若$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}=a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$,则

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}.$$

但$\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$与$\tau(k_1k_2\cdots k_n)$不一定相等,它们只是奇偶性相同,这一点不要混淆.

【例1.3】 写出4阶行列式中含$a_{11}a_{23}$的项.

【分析】 行列式是不同行不同列元素乘积的代数和,含$a_{11}a_{23}$的项应当有形式$a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$,由此分析$j_3$, j_4的取值及该项所带的正负号.

【解】 因为含$a_{11}a_{23}$的项可写为$a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$,其中$13j_3j_4$是1至4的排列.所以$j_3$, j_4取自2和4.可见共有两项含$a_{11}a_{23}$.

若$j_3=2$, $j_4=4$,则

$$\tau(1324)=1$$

是奇排列,故该项带负号为:$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

若$j_3=4$, $j_4=2$,利用对换改变排列的奇偶性,知$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$带正号.即4阶行列式中,含$a_{11}a_{23}$的项是:$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$, $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

【例1.4】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ x & 1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

展开式中x^4与x^3的系数.

【分析】 按行列式定义,行列式中每一项都是不同行不同列元素的乘积.那么,要构成x^4必须各行各列都要含x,因此只能是$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,而对于x^3,可判断该项必不含a_{11},若含a_{12},则可由$a_{33}a_{41}a_{24}$,$a_{33}a_{44}a_{21}$分别构成,若不含a_{12},则可由$a_{22}a_{33}a_{41}a_{14}$构成,可见含x^3的共有三项.

【解】 按行列式定义,有且只有a_{11},a_{22},a_{33},a_{44}四元素相乘才出现x^4,故x^4的系数是2.

对于x^3,则有$a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$,$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$,$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$三项,此时各项的系数分别

是 $a_{24}=-1, a_{21}=1, a_{14}=2$ 即 $-x^3, x^3, 2x^3$ 又各项逆序数分别是 $\tau(2431)=4$, $\tau(2134)=1, \tau(4231)=5$, 故所带符号为正、负、负. 因此 x^3 的系数是 -4.

【例1.5】 证明
$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2\,n-1} \cdots a_{n1}. \quad (1.9)$$

【证明】 由于行列式的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$, 所带符号是 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$. 因为第一行除了 a_{1n} 外其它数均为0, 因此欲要得到非0项, 第一行必取 a_{1n}, 即 $j_1=n$, 这样第二行不能选 a_{2n}(因为每列只能选一个数), 故只能选 $a_{2\,n-1}$. 类似地, 第三行只能取 $a_{3\,n-2}, \cdots$. 因此这个行列式只有唯一的一项

$$a_{1n}\, a_{2\,n-1} \cdots a_{n1}$$

有可能不为0, 而这一项列指标的逆序数为

$$\begin{aligned} \tau(n, n-1, \cdots, 1) &= (n-1)+(n-2)+\cdots+0 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1). \end{aligned}$$

因此, 右下三角行列式的值为 $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n}\, a_{2\,n-1} \cdots a_{n1}$.

【评注】 上(下)三角行列式的值是主对角元素的乘积(参见1.5), 而右下(左上)三角行列式的值是副对角线元素的乘积并且带有正负号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$(参见1.9), 这两个公式要分清.

【例1.6】 已知 n 阶行列式 D 中有 n^2-n+1 个0, 证明 $D=0$.

【证明】 因为 n 阶行列式 D 中共有 n^2 个元素, 现在其中有 n^2-n+1 个0, 故非0元素共有 $n-1$ 个. 按行列式定义

$$D = \sum (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

因此, $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{nj_n}$ 这 n 个元素中至少有一个是0, 故行列式 $D=0$.

【例1.7】 证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

【证明】 由题设知, 当 $k \geqslant 3$ 时, $a_{3k}=a_{4k}=a_{5k}=0$, 而行列式 D 中的一般项是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}.$$

由于j_3,j_4,j_5互不相同且取自于1至5,故其中至少有一个要大于或等于3,那么$a_{3j_3},a_{4j_4},a_{5j_5}$中至少有一个为0,所以$D$的展开式中每一项都是0,故行列式$D=0$.

【例1.8】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&0&a&0\\b&0&0&0\\0&c&0&d\\0&0&e&f\end{vmatrix}\quad 之值.$$

【分析】 按行列式定义,D的一般项是$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,由于行列式中有较多的0,该项若不为0,则必有

$$j_1=3,\quad j_2=1.$$

而j_3可取2或4,j_4可取3或4.但因j_1,j_2,j_3,j_4是1至4的排列,互不相同,则必有

$$j_4=4,\quad j_3=2.$$

所以在D的4!项中,仅有一个非0项.

【解】 $D=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$

$=(-1)^{\tau(3124)}abcf=abcf.$

【例1.9】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&1&0\\0&\cdots&2&0&0\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\2000&\cdots&0&0&0\\0&\cdots&0&0&2001\end{vmatrix}\quad 之值.$$

【分析】 行列式D中有大量的0,对于D的一般项

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

若该项不为0,必有

$$j_1=2000,\quad j_2=1999,\quad \cdots,\quad j_{2000}=1,\quad j_{2001}=2001.$$

逆序数$\tau(2000,1999,\cdots,2,1,2001)=\frac{1}{2}2000\cdot1999$为偶数.

故 $D=2001!$

【评注】 对行列式要认识到它是不同行不同列元素乘积的代数和,要处理好每项所带的正负号,它是由排列的奇偶性所决定的.这里的行列式有较多的0,因而可以用定义法来分析论证,以加深对概念的理解,但即使有如此多的0,我们仍应当用行列式的性质,展开公式来计算,以减少工作量.对于一般的行列式若用定义法来计算几乎是不现实的.

二、n 阶行列式的计算

【例 1.10】 计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 6\\4 & -1 & 5 & 0\\-1 & 2 & 0 & -5\\1 & 4 & -2 & -2\end{vmatrix}$$ 之值.

【分析】 本题的行列式没有太多的规律，因而用展开公式来计算，但要先利用行列式的性质将其恒等变形，让其某行（或列）有较多的零.

【解】 $$D\xlongequal[c_4-5c_1]{c_2+2c_1}\begin{vmatrix}2 & 3 & 1 & -4\\4 & 7 & 5 & -20\\-1 & 0 & 0 & 0\\1 & 6 & -2 & -7\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & 1 & -4\\7 & 5 & -20\\6 & -2 & -7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-5r_1}-\begin{vmatrix}3 & 1 & -4\\-8 & 0 & 0\\6 & -2 & -7\end{vmatrix}$$

$$=-(-8)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -4\\-2 & -7\end{vmatrix}=120.$$

【评注】 r_i 表示行列式的第 i 行，c_j 表示行列式的第 j 列，对换 i 行与 j 行记成 $r_i\leftrightarrow r_j$，第 i 行乘以 k 记成 kr_i，i 行的 k 倍加至 j 行记成 r_j+kr_i，类似有列变换的记号.

用行列式展开式时，不要丢掉正负号. 这是初学时常犯的错误.

【例 1.11】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}$$ 之值.

【分析】 为简化计算可利用行列式的性质去掉行列式里的分母，转化为整数的运算.

【解】（三角化法）

$$D=\left(\frac{1}{2}\right)^4\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{\sum r_i}\frac{1}{16}\begin{vmatrix}5&5&5&5\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{5}{16}.\qquad(\text{由}(1.5))$$

【评注】 如果行列式各列元素和相等都是 a,一个常用的办法是将各行均加至第一行,则第一行有公因数 a 可提到行列式记号之外.

对行列式作恒等变形,化其为上三角或下三角行列式利用公式(1.5)是常用技巧.

【例 1.12】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\-1&1-b_1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}\quad\text{之值}.$$

【解】 (三角化法)

$$D\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&-1&1-b_2&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&-1&1-b_3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&b_1&0&0\\0&1&b_2&0\\0&0&1&b_3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1.\quad(\text{由}(1.5))$$

【评注】 逐行(列)相加减的技巧应当知道.

【例 1.13】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$ 之值，其中 $a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

【分析】 这是“爪”型行列式，这一类行列式通常是用提取公因式法化其为三角形.

【解】 第 i 行提出 $a_{i-1}(i=2,3\cdots,n+1)$，得

$$D=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-r_2-r_3-\cdots-r_n}\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).\quad (\text{由}(1.5))$$

【例 1.14】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$ 之值.

【分析】 由于第一行与第二行之和有公因数 $a+b+c$，这样就可转化为范德蒙行列式.

【解】 (公式法)