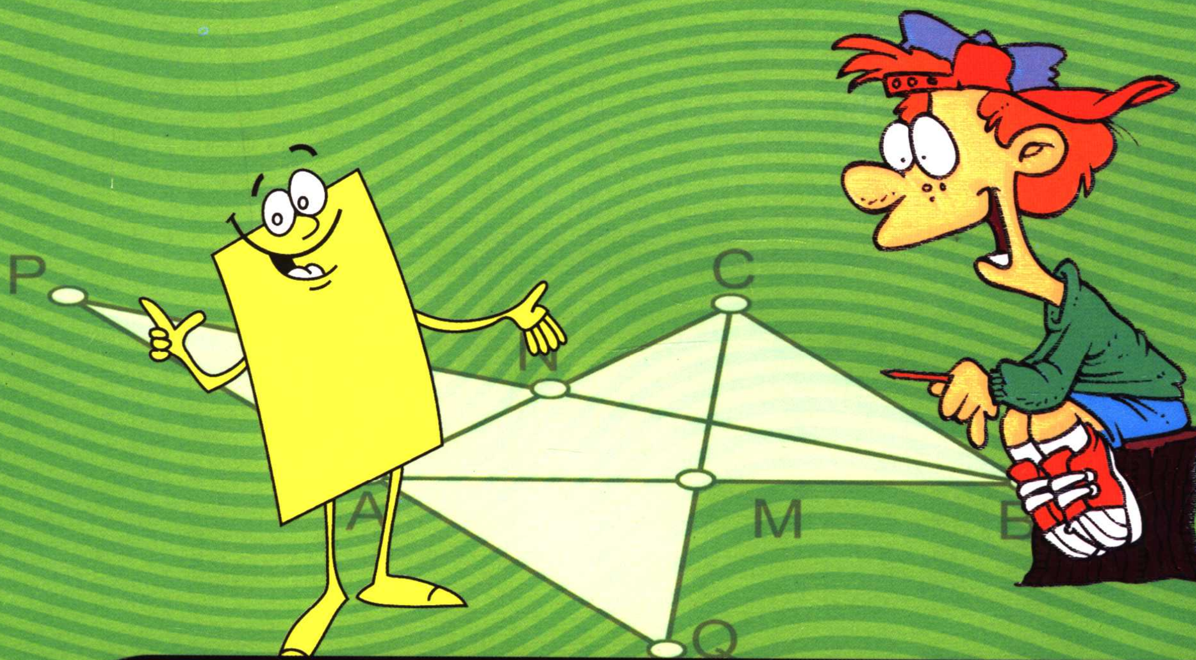
高中精学巧练丛书

上海市 松江二中 编写



高一数学

（试验本）

精要点拨与能力激活

丛书主编／乔世伟　副主编／徐界生　本册主编／孙金明

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高中精学巧练丛书

高一数学(试验本)

精要点拨与能力激活

上海市松江二中编写

丛书主编　乔世伟

副 主 编　徐界生

本册主编　孙金明

华东理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高一数学(试验本)精要点拨与能力激活/孙金明主编.—上海:华东理工大学出版社,2004.8
(高中精学巧练丛书/乔世伟主编)
ISBN 7-5628-1564-X

Ⅰ.高... Ⅱ.孙... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 060901 号

高中精学巧练丛书
高一数学(试验本)精要点拨与能力激活
上海市松江二中编写　丛书主编　乔世伟　副主编　徐界生　本册主编　孙金明

出版	华东理工大学出版社	**开本**	787×1092　1/16
社址	上海市梅陇路 130 号	**印张**	19
邮编	200237　**电话**(021)64250306	**字数**	488 千字
网址	www.hdlgpress.com.cn	**版次**	2004 年 8 月第 1 版
发行	新华书店上海发行所	**印次**	2006 年 6 月第 5 次
印刷	上海展强印刷有限公司	**印数**	26131－36160 册

ISBN 7-5628-1564-X/O・109　　定价:22.00 元

前　言

本丛书可谓我校《高中教学精华丛书》的新生代.

《高中教学精华丛书》自 1996 年 8 月初版以来，即受到广大中学师生的普遍欢迎，经多次重版共销售近百万册. 此后，随着教改形势的发展，教材及高考命题的变化，为进一步提高丛书质量，满足读者要求，我们于 2001 年 6 月对本丛书作了相当的修改增删，以"修订版"的新貌出现在各家书店的图书专柜上，再一次赢得了广大读者的嘉许.

然而，时代的演变，教改的推进是一个生生不息的过程，永远不允许以服务广大高中师生、服务高中教学为宗旨的我校丛书编写停步不前，只能是与时俱进，以变应变. 上海市新一轮课改提出了"以国际化大都市为背景，以德育为核心，以培养学生创新精神和实践能力为重点，以学习方式的改变为特征"的明确要求，市级的各科教学的新编、新选教材闻风而动，相继进入课堂，这对我们来说是一次重编新书的机遇，也是一次探索新路的挑战，更是一次顺应高考改革方向，寻取实战效果的尝试. 借百年老校之传承，积数载教改之经验，凭优良师资之实力，受二期课改之驱动，我们群策群力，集思广益，终于促成新生代婴儿的呱呱坠地，命其名为《高中精学巧练丛书》.

在以往的《高中教学精华丛书》的各个分册中，我们曾力求分别体现其实用性、针对性、侧重性、贴近性、全面性、启发性，以期适应自主学习、自主发展、应对考查、应战高考的需要，后又加大"引导性"、"示范性"的力度，掌握了变中求胜的先机. 现在看来，以上种种仍需择优融入新编丛书之中. 体例不同了，编排不同了，内容不同了，题路不同了，但出新并不意味着一概弃旧，一切都遵循**优化整合、发展创新**的原则，落实**能力立意，应用为要**的措施，注重**夯实基础，促进理解；循序渐进，同步操练；激活思维，拓展视野；加强研究，提升能力**……在这个大前提下，本丛书的各分册编写者各展所长，各显其能，既有共性的渗透，又有个性的发挥. 从编写思路到实例举证，文理各科基本上都自有特色. 由于这些特色源自于在新的教学形势高考形势下致力于提高学生知识、能力、素质水平的我校第一线教师的智慧结晶，丰硕成果，必然有利于广大师生的参考和实际操作.

本丛书杀青之际，正值学校最为紧忙之时，难免有斟酌不及、考量不周之处，恳请广大读者提出批评建议，帮助我们做好今后的修订工作. 谢谢.

上海市松江二中《高中精学巧练丛书》编委会

2003 年 7 月

编 写 说 明

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷.如何发挥一本参考书的长效作用，使学生阅读后，能更透彻地明白重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，这是我们追求的目标，为配合二期课改，进一步体现培养学生的创新精神和实践能力，体现能力立意的宗旨，我们组织了一些具有丰富教学经验的特级教师和高级教师精心编写了本书.本书有以下明显的特点：

【学习导引】阐述各章各节中应掌握的知识点，进行适当的学法指导，明确知识的结构体系，并拓展知识的广度和深度.

【范例解析】精选的题目针对性强，与所学的知识密切有关，既着重基础，又注意拓展提高，还有一定量的"能力型问题".通过思路分析、点拨解题的方式，从而更好地体现学科思想与基本的解题方法，提高学生分析解决问题的能力.

【巩固练习】精选少量试题，力求题型多样，知识覆盖面广，既注意基础知识的训练，又注重综合运用能力的提高，做到知识立意与能力立意兼顾.

希望本书的出版能对数学学习起到事半功倍的作用，同时对学生学习方式的改变起到积极的作用.

本书主编孙金明，参加本书编写的教师还有傅元培、阮晓明、黄继红、金翠妹.

由于时间比较仓促，书中难免有疏漏之处，敬请读者批评指正.

上海市松江二中数学教研组
2004.7

目　录

第1章 集合和命题

1.1 集 合

1.1.1 集合及其表示法

【学习导引】

1. 理解集合概念、空集概念.

2. 掌握集合元素的三个特性:确定性、互异性、无序性.

3. 掌握集合表示法:列举法,描述法.

其中,描述法表示要掌握两个要素:一是集合中元素是什么? 二是元素所共有的特性是什么?

4. 掌握元素和集合的关系,正确使用符号"$\in$"与"$\notin$".

【范例解析】

例 1. 给出下列四个关系式:

(1) $1 \in \{x \mid x \text{是素数}\}$;

(2) $-1 \notin \{x \mid x \text{是奇数}\}$;

(3) $0 \in \{x \mid x \text{是} 3 \text{的倍数}\}$;

(4) $-1 \in \{(-1, 1)\}$.

其中正确关系式的个数是 ( )

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

解:(1) 素数、合数在正整数范围内定义. 对于一个大于 1 的正整数 a,如果仅有 1 与 a 这两个正约数,那么 a 叫做素数. 规定:1 既不是素数也不是合数. 故(1)式是不正确的.

(2) 奇数与偶数在整数范围内定义. 奇数可分为正奇数与负奇数,故(2)式是不正确的.

(3) 约数与倍数在整数范围内定义. 零是一切非零整数的倍数,即能被任何非零整数整除,故(3)式是正确的.

(4) $\{(-1, 1)\}$是集合的列举法表示. 集合中只含一个元素,这个元素是一有序实数对,在通常情况下表示点的坐标,因而可理解为一个点. 而-1是一个实数,不是该集合的元素. 故(4)式是不正确的.

因此选(A).

评注:本章节学习常涉及整数的一些概念与性质. 如素数与合数、奇数与偶数、约数与倍数等等,要正确掌握这些概念. 其中,素数与合数在正整数范围内定义,奇数与偶数、约数与

倍数均在整数范围内定义.

例 2. 设集合 $A=\{y\mid y=4-x,\ x\in\mathbf{N}^*,\ y\in\mathbf{N}\}$，$B=\{y\mid y=4-x,\ x\in\mathbf{N},\ y\in\mathbf{N}\}$，$C=\{(x,\ y)\mid y=4-x,\ x\in\mathbf{N}^*,\ y\in\mathbf{N}\}$，用列举法表示集合 A，B，C.

解： $A=\{y\mid y=4-x,\ x\in\mathbf{N}^*,\ y\in\mathbf{N}\}$.

$\because y=4-x$，且 $y\in\mathbf{N}$，

$\therefore 4-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 4$，又 $x\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore x=1,\ 2,\ 3,\ 4$. 得相应的 $y=3,\ 2,\ 1,\ 0$.

$A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$.

$B=\{y\mid y=4-x,\ x\in\mathbf{N},\ y\in\mathbf{N}\}$.

类似可得 $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$，相应的 $y=4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0$，

$\therefore B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

$C=\{(x,\ y)\mid y=4-x,\ x\in\mathbf{N}^*,\ y\in\mathbf{N}\}$.

由 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$，得相应的 $y=3,\ 2,\ 1,\ 0$，

$\therefore C=\{(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (4,\ 0)\}$.

评注： 集合 B 与集合 A 中 x 的取值范围不同而导致 B 与 A 的不同，而集合 C 与集合 A 中元素的本质不同而导致 C 与 A 不同. 对于集合，一定要确定它是什么集合，集合中元素的共性是什么.

例 3. 已知集合 $A=\{x\mid kx^2-2x+1=0,\ x\in\mathbf{R}\}$ 至多含有一个元素，求实数 k 的取值范围，并用集合形式表示.

解： 集合 A 至多含有一个元素，可以是 A 仅含一个元素或 A 是空集两种情况.

(1) A 中含一个元素时：

$k=0$，此时方程 $kx^2-2x+1=0$，即 $-2x+1=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$. 即 $A=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$，适合题意.

$k\neq 0$，且二次方程 $kx^2-2x+1=0$ 有两相等实根，判别式 $\Delta=0$，即 $(-2)^2-4k=0$，得 $k=1$. 此时 $A=\{1\}$，也适合题意.

(2) A 为空集时：

$k\neq 0$，且二次方程 $kx^2-2x+1=0$ 没有实根.

判别式 $\Delta<0$，$(-2)^2-4k<0$，得 $k>1$.

综上所述，$k\geqslant 1$ 或 $k=0$.

适合题意的 k 值的全体组成的集合是 $\{k\mid k\geqslant 1$ 或 $k=0\}$.

评注： 二次方程 $kx^2-2x+1=0$ 当 $k=0$ 时有两相等实根，根据集合元素的互异性，认为此时集合 A 仅含一个元素，同时要注意集合 A 中的方程不一定是两次方程，也可以是一次方程.

【巩固练习】

一、填空题

1. 用“$\in$”或“$\notin$”表示下列元素和集合之间的关系.

(1) 2 ____ $\{x|x$ 是合数$\}$；

(2) -3 ____ $\{x|x$ 是 102 的约数$\}$；

(3) 4 ____ $\{x|x$ 被 5 除余数是 4$\}$；

(4) 5 ____ $\left\{x \,\middle|\, \dfrac{4}{3-x} \in \mathbf{Z},\ x \in \mathbf{Z}\right\}$.

2. 用列举法表示集合 $A=\{x \mid x(x-1)=0\}$,则 $A=$ ______.

3. (1) 用列举法表示集合 $B=\{y \mid y=x^2-1,\ |x| \leqslant 1,\ x \in \mathbf{Z}\}$,则 $B=$ ______.

(2) 用列举法表示集合 $C=\{(x,\ y) \mid y=x^2-1,\ |x| \leqslant 1,\ x \in \mathbf{Z}\}$,则 $C=$ ______.

4. 用描述法表示所有被 3 除余数为 2 的正整数组成的集合是______.

5. 用描述法表示平面直角坐标系中第二象限所有点组成的集合是______.

二、选择题

1. 下列集合中表示空集的是 (　　)

(A) $\{0\}$.　　(B) $\{\varnothing\}$.

(C) $\{x \mid x^2+1>0,\ x \in \mathbf{R}\}$.　　(D) $\{(x,\ y) \mid x^2+y^2<0,\ x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}$.

2. 下列各组集合中表示同一集合的是 (　　)

(A) $P=\{(2,\ 2)\}$, $Q=\{x \mid x^2-4x+4=0\}$.

(B) $P=\{-1,\ 1\}$, $Q=\{(-1,\ 1)\}$.

(C) $P=\{x \mid x=2n-1,\ n \in \mathbf{N}^*\}$, $Q=\{x \mid x=2n+1,\ n \in \mathbf{N}^*\}$.

(D) $P=\{x \mid x=3k+2,\ k \in \mathbf{Z}\}$, $Q=\{x \mid x=3k-1,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

3. 已知非零实数 $a,\ b,\ c$,则代数式 $\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{|c|}{c}$ 的所有的值组成的集合是 (　　)

(A) $\{3\}$.　　(B) $\{-3\}$.

(C) $\{3,\ -3\}$.　　(D) $\{3,\ -3,\ 1,\ -1\}$.

三、解答题

1. 已知集合 P 含三个元素,且 $P=\{6,\ 3a,\ a^2-2a+6\}$,其中 $a \in \mathbf{R}$,试求 a 的取值范围.

2. 已知集合 $A=\{x \mid (a-2)x^2-x+1=0\}$ 至少含一个元素,求实数 a 的取值范围,并用集合表示.

3. 设集合 $A=\{2,\ 3,\ a^2+4a+2\}$,集合 $B=\{0,\ 7,\ 2-a,\ a^2+4a-2\}$,且 $7 \in A$,求集合 B.

4. 设 $6 \in \{x \mid x^2-ax+b=0\}$,用列举法表示集合 $\{x \mid x^2-8x+a=0\}$.

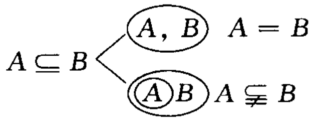
5. 设集合 $A=\{x \mid x^2+(m+2)x+m+1=0,\ m\in\mathbf{R}\}$，求 A 中所有元素的和.

1.1.2　集合之间的关系

【学习导引】

1. 理解子集、真子集、相等集合的概念.

2. 掌握三者之间的关系.真子集、相等集合是在子集基础上定义的，用图示法表示可帮助理解三者之间的关系.



若 A 是 B 的子集，那么 A 或者是 B 的真子集，或者是与 B 相等的集合，两者必居其一.

3. 正确使用表示集合与集合之间关系的符号，如“$\subseteq$”、“$\subsetneqq$”、“$=$”、“$\supseteq$”、“$\supsetneqq$”等.

【范例解析】

例 1. 已知集合 $A=\{s \mid s=2t+5,\ t\geqslant -1\}$，$B=\{y \mid y=x^2-4x+7,\ x\in\mathbf{R}\}$. 试判断 A 与 B 之间的关系，并说明理由.

解: $\because t\geqslant -1$，$\therefore 2t+5\geqslant 3$，即 $s\geqslant 3$，$\therefore A=\{s \mid s\geqslant 3\}$.

又 $y=x^2-4x+7=(x-2)^2+3$.

$\because (x-2)^2\geqslant 0$，$\therefore (x-2)^2+3\geqslant 3$，即 $y\geqslant 3$，

$\therefore B=\{y \mid y\geqslant 3\}$.

集合 A 与集合 B 都是由所有不小于 3 的实数组成的集合.

$\therefore A=B$.

评注: 集合 A 是当 $t\geqslant -1$ 时一次函数的函数值的全体组成的集合，集合 B 是当 $x\in\mathbf{R}$ 时二次函数的函数值的全体组成的集合. 这两个集合形式不相同，但实际上是相同的集合.

例 2. 如果集合 $A=\left\{x \,\middle|\, x=\dfrac{m}{4}+\dfrac{1}{2},\ m\in\mathbf{Z}\right\}$，$B=\left\{x \,\middle|\, x=\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{4},\ n\in\mathbf{Z}\right\}$，那么下列结论中正确的是　　(　　)

(A) $A=B$.　　(B) $A\subsetneqq B$.　　(C) $B\subsetneqq A$.　　(D) 以上都不正确.

解: 在集合 A 中，$m\in\mathbf{Z}$，m 可分为奇数与偶数讨论.

设 $m=2k$ 或 $m=2k-1$.$(k\in\mathbf{Z})$

(1) 当 $m=2k$ 时，$x=\dfrac{m}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

(2) 当 $m=2k-1$ 时，$x=\dfrac{m}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

即 $A=\left\{x \,\middle|\, x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2} \text{ 或 } x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

因此 B 中的任何元素都属于 A，即 $B\subseteq A$，而 A 中至少有一个元素 $\dfrac{1}{2}\notin B$，即 $B\subsetneqq A$.

故选(C)

评注:本例中集合 A 与 B 都是无限集,不可能逐个检验 B 中所有元素属于 A. 对于集合 A,由于 $m\in\mathbf{Z}$, 可以将 m 分成奇数与偶数讨论,从而易于判断两个集合间的包含关系.

本题另解:由 $x=\frac{m}{4}+\frac{1}{2}$ 得 $x=\frac{m+2}{4}$,由 $x=\frac{n}{2}+\frac{1}{4}$ 得 $x=\frac{2n+1}{4}$, 因为 $m, n\in\mathbf{Z}$, 所以 A 是由所有整数的 $\frac{1}{4}$ 的数组成的集合,而 B 是由所有奇数的 $\frac{1}{4}$ 的数组成的集合,从而 $B\subsetneqq A$. 本例说明对两个无限集的关系的判断,一般都从元素所具有的特性着手研究.

例 3. 已知集合 $A=\{x, xy, xy-1\}$,集合 $B=\{0, |x|, y\}$,若 $A=B$, 求 x、y 的值.

解: $A=B$, 因此两集合元素对应相等.

可知 $x=0$,或 $xy=0$,或 $xy-1=0$.

若 $x=0$,则 $xy=x=0$ 与集合中元素互异性矛盾.

若 $xy=0$,则 $x=0$ 或 $y=0$ 也与元素互异性矛盾.

若 $xy-1=0$,得 $xy=1$, 则集合 B 中 $y=xy$,或 $|x|=xy$.

即 $y=1$,或 $|x|=1$,即 $x=\pm 1$.

若 $y=1$,则 $x=1$,若 $x=1$,则 $y=1$.

都与集合中元素互异性矛盾.

因此 $x=-1$,得 $y=-1$.

此时 $A=B=\{-1, 1, 0\}$.

评注:两有限集合相等,那么两集合的元素对应相等. 即:(1)元素个数相同;(2)元素一一对应相等. 这是确定集合相等的两个方法之一,其中要注意集合中元素是互异的.

【巩固练习】

一、填空题

1. 用适当的关于集合的符号连接下列各组集合中的两个集合.

(1) $\{\alpha \mid \alpha=k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$ ______ $\{\beta \mid \beta=k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}\}$,

(2) $\left\{x \,\middle|\, x=k+\frac{1}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$ ______ $\left\{x \,\middle|\, x=2k-\frac{1}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$,

(3) $\{(x, y) \mid x>0 \text{ 或 } y>0\}$ ______ $\{(x, y) \mid x>0 \text{ 且 } y>0\}$,

(4) $\{y \mid y=x^2-1, x\in\mathbf{R}\}$ ______ $\{y \mid y=x-1, x\in\mathbf{R}\}$.

2. 若有两个集合 A, B, $A\not\subseteq B$, 用图示法表示是:

____.

3. 集合 $A=\{x \mid ax=1\}\subsetneqq\{x \mid x^2-1=0\}$,那么 $a=$ ______.

4. 已知集合 $A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $B=\{y \mid y=x^2-2x, x\in A\}$, 那么 A 与 B 的关系是__________.

5. 设集合 $A=\{x \mid x^2-(a+1)x+a=0\}$,集合 $B=\{x \mid 3-x\geqslant 0\}$, 已知 $A\subsetneqq B$, 则实数 a 的取值范围是________.

二、选择题

1. 已知四个集合

$A=\{m \mid m=(2k+1)\pi, k\in\mathbf{Z}\}$;

$B=\{a \mid \text{方程 } x^2-ax+1=0 \text{ 无实根}\}$;

$C = \{x \mid x^2 - ax + 1 = 0,\ x \in \mathbf{R}\}$;

$D = \{(x,\ y) \mid y = x + 1,\ |x| \leqslant 1\}$.

其中,无限集合的个数是　　(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

2. 集合 $M = \{x \mid x \leqslant 0\}$,则下列关系中正确的是　　(　　)

(A) $\varnothing \in M$.　　(B) $\{0\} \in M$.　　(C) $\{0\} \subsetneqq M$.　　(D) $0 \subsetneqq M$.

3. 集合 $A = \{x \mid x = 3k - 2,\ k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{y \mid y = 3m + 1,\ m \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{z \mid z = 6n + 1,\ n \in \mathbf{Z}\}$ 之间的关系是　　(　　)

(A) $C \subsetneqq B \subsetneqq A$.　　(B) $C = B \subsetneqq A$.　　(C) $C \subsetneqq B = A$.　　(D) $C \supsetneqq B = A$.

三、解答题

1. 设集合 $A = \{a,\ a^2,\ ab\}$, $B = \{1,\ a,\ b\}$,且 $A = B$,求实数 a、b 的值.

2. 设非空集合同时满足:(1) $A \subseteq \mathbf{N}^*$; (2) 对于任意 $x \in A$ 都有 $\dfrac{16}{x} \in A$. 试写出所有的集合 A.

3. 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $B = \{y \mid y^2 - ky + 9 = 0\}$,若 $B \subseteq A$,求实数 k 的取值范围.

4. 已知集合 $A = \{x \mid x = t^2 + 2t + 3,\ t \in \mathbf{R}\}$, $B = \{y \mid y = t^2 - 4t + 4,\ t \in \mathbf{R}\}$,判断集合 A 与 B 的关系,说明理由.

5. 已知集合 $A = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 6\}$,集合 $B = \{x \mid x^2 - ax - 2a^2 = 0,\ x \in \mathbf{R}\}$,求使 $B \subsetneqq A$ 的实数 a 的值.

单元综合

【范例解析】

例 1. 已知集合 $A = \{x \mid 4 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \mid m + 1 \leqslant x \leqslant 2m - 1\}$.

(1) 若 $B \subseteq A$，求实数 m 的值；(2) 是否存在实数 m 使 $B = A$.

解:(1) 当 $m+1 > 2m-1$,即 $m < 2$ 时

$$B = \varnothing.$$

由空集是任何集合的子集知 $B \subseteq A$.

(2) 当 $m+1 \leqslant 2m-1$,即 $m \geqslant 2$ 时

$$B \neq \varnothing,\ B \subseteq A.$$

在数轴上表示(如图 1-1)

只需解不等式组

$$\begin{cases} m+1 \geqslant 4 \\ 2m-1 \leqslant 5 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} m \geqslant 3 \\ m \leqslant 3 \end{cases}$$

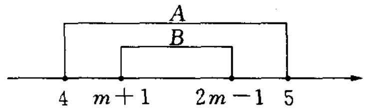


图 1-1

得 $m = 3$ 时,$B \subseteq A$.

综上所述,当 $m < 2$ 或 $m = 3$ 时,$B \subseteq A$.

(3) 当 $m = 3$ 时, $B = A = \{x \mid 4 \leqslant x \leqslant 5\}$, 即存在实数 $m = 3$,使 $B = A$.

评注:在数轴上观察两个数集的关系,直观易得不等式组,同时注意 $B = \varnothing$ 时的情况.

例 2. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x \mid ax^2 + 2x + 2 = 0\}$. 如果 $B \subsetneqq A$, 试确定实数 a 的取值范围.

解: $A = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$.

由于 $B \subsetneqq A$,因此 $B = \varnothing$,或 $B = \{-1\}$,或 $B = \{2\}$

(1) $B = \varnothing$ 时,须满足 $a \neq 0$ 且二次方程 $ax^2 + 2x + 2 = 0$ 无实根.

即 $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 4 - 8a < 0 \end{cases}$

解不等式组,得 $a > \frac{1}{2}$.

(2) 把 $x = -1$ 代入方程 $ax^2 + 2x + 2 = 0$,得 $a = 0$,此时 $B = \{-1\}$.

(3) 把 $x = 2$ 代入方程 $ax^2 + 2x + 2 = 0$,得 $a = -\frac{3}{2}$.

此时方程 $-\frac{3}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$ 的解为 $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $\therefore B = \left\{2, -\frac{2}{3}\right\}$.

不适合 $B \subsetneqq A$ 舍去.

综上所述得 $a > \frac{1}{2}$ 或 $a = 0$.

评注:本题解答过程中需进行分类讨论,分类方法不唯一,可根据 B 集的元素来分,如上述解答. 也可根据方程 $ax^2 + 2x + 2 = 0$ 是一次方程或二次方程来分,其中二次方程再可按有两相同实数解与无实数解来分.

例 3. 设 $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 6m + 10p,\ m,\ p \in \mathbf{Z}\}$,求证:$A = B$.

证明:任取 $x_1 \in B$, 则存在 m_1, $p_1 \in \mathbf{Z}$,使 $x_1 = 6m_1 + 10p_1$,即 $x_1 = 2(3m_1 + 5p_1)$.

而 $3m_1 + 5p_1 \in \mathbf{Z}$,所以 $2(3m_1 + 5p_1) \in A$,即 $x_1 \in A$.

由子集的定义得 $B \subseteq A$.

反过来,任取 $x_2 \in A$, 则存在 $n_1 \in \mathbf{Z}$,使 $x_2 = 2n_1$,而 $2n_1 = 6(-3n_1) + 10(2n_1)$,即

$x_2 = 6(-3n_1)+10(2n_1)$.

其中 $-3n_1 \in \mathbf{Z}$, $2n_1 \in \mathbf{Z}$,因此 $x_2 \in B$.

由子集的定义得 $A \subseteq B$,因为 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,因此 $A = B$.

评注:判断两个集合相等的方法有两种,一是当集合为元素个数少的有限集时,可逐一验证两个集合的元素完全相同;二是当集合为无限集时,需证 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

【巩固练习】

一、填空题

1. 满足 $\{a, b\} \subsetneqq M \subseteq \{a, b, c, d\}$ 的集合 M 的个数是________个.

2. 满足 $\{a_1\} \subseteq P \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 的集合 P 的个数是________个.

3. 设 $A = \{y \mid y = x^2 + 2x + a,\ x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid 3 - x \leqslant 0\}$, 已知 $A \subsetneqq B$, 则实数 a 的取值范围是________.

4. 设 $A = \left\{(x, y) \,\middle|\, \dfrac{y-3}{x-2} = 1,\ x, y \in \mathbf{R}\right\}$, $B = \{(x, y) \mid y = x + 1,\ x, y \in \mathbf{R}\}$, 则 A 与 B 的关系是:A ______ B.

5. 对于数集 A 中的任意一个元素 a,如果在 A 中总存在元素 b,使 $\dfrac{a+b}{2} = 4$ 成立,则称集合 A 是关于数 4 对称的;试写出三个这样的数集________________.

二、选择题

1. 集合 $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, 那么下列四个关系式

(1) $\varnothing \in A$　　　　(2) $\varnothing \subsetneqq A$

(3) $\{\varnothing\} \in A$　　　　(4) $\{\varnothing\} \subsetneqq A$

中正确的关系式的个数为　　(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

2. 集合 $A = \left\{x \,\middle|\, x = \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, $B = \left\{x \,\middle|\, x = k\pi \text{ 或 } x = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$ 之间的关系是　　(　　)

(A) $A \subsetneqq B$.　　(B) $B \subsetneqq A$.　　(C) $A = B$.　　(D) 以上都不正确.

3. 集合 $M = \{y \mid y = x^2 - 2x + 2,\ x \in \mathbf{R}\}$, $P = \{s \mid s = 2t^2 + t,\ t \in \mathbf{R}\}$ 之间的关系是　　(　　)

(A) $M \subsetneqq P$.　　(B) $P \subsetneqq M$.　　(C) $M = P$.　　(D) 以上都不正确.

三、解答题

1. 已知集合 $A = \{x, xy, x-y\}$, $B = \{0, |x|, y\}$,且 $A = B$. 求 x, y 的值.

2. 已知 $A = \{0, 1, 2\}$,若 $B = \{x \mid x \in A\}$, $C = \{X \mid X \subsetneqq A\}$, 试用列举法表示 B 与 C.

3. 判断集合 $M=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{k}{3},\ k\in \mathbf{Z}\right\}$ 与 $P=\left\{x \,\middle|\, x=n\pm\frac{1}{3},\ n\in \mathbf{Z}\right\}$ 之间的关系，并说明理由.

4. 设集合 $A=\{x \mid 2a<x\leqslant 4\}$，$B=\{x \mid 3a-1<x<3a+1\}$，若 $B\subsetneqq A$，求实数 a 的取值范围.

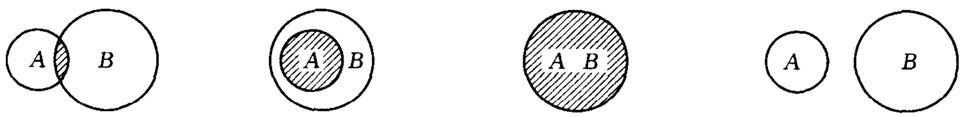
5. 设集合 $A=\{k \mid$ 关于 x 的方程 $(k^2-1)x+1=0$ 无解$\}$，$B=\{x \mid x^2-2ax+b=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，若 $B\subseteq A$ 且 $B\neq\varnothing$，求实数 a、b 的值.

1.1.3　集合的运算

1.1.3.1　交集

【学习导引】

1. 理解交集的概念.
2. 掌握集合的交运算，$A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，“且”表示 $x\in A$ 与 $x\in B$ 同时成立.
3. 集合 A 与 B 的交集的各种情况用图示法表示于图 1-2.



$A\cap B\subsetneqq A$　$A\cap B\subsetneqq B$　　$A\cap B\subsetneqq B$　$A\cap B=A$　　$A\cap B=A=B$　　$A\cap B=\varnothing$

图 1-2

由上图知，若 $A\cap B=A$，等价于 $A\subsetneqq B$ 或 $A=B$，即 $A\subseteq B$.

【范例解析】

例 1. 设 A 是小于 13 的素数全体组成的集合，B 是不大于 13 的全体正奇数组成的集合，集合 $C=A\cap B$，求 C 的真子集的个数.

解： 列举法表示 A 与 B.

$$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\},$$

$$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13\}.$$