

# 常微分方程

第三版

高等学校教材

王高雄  
朱思铭

周之铭  
王寿松

朱思铭  
李艳会

王寿松  
修订  
编

常微分方程在微积分概念出现后即已出现，发展初期是对具体的常微分方程希望能用初等函数或超越函数表示其解，属于“求通解”时代。早期的常微分方程的求解热潮被刘维尔证明里卡蒂方程不存在一般的初等解而止断，加上柯西初值问题的提出，常微分方程从“求通解”转向“求定解”时代……



高等教育出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/王高雄等编. -3版. -北京:高等教育出版社,2006.7

ISBN 7-04-019366-3

I. 常... II. 王... III. 常微分方程-高等学校-教材 IV. O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第057643号

策划编辑 李蕊 责任编辑 李蕊 封面设计 张申申  
责任绘图 黄建英 版式设计 王艳红 责任校对 殷然  
责任印制 陈伟光

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
		网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
印 刷	北京市白帆印务有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
		版 次	1978年12月第1版
开 本	850×1168 1/32		2006年7月第3版
印 张	14	印 次	2006年7月第1次印刷
字 数	360 000	定 价	19.30元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 19366-00

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话：**(010) 58581897/58581896/58581879

**传 真：**(010) 82086060

**E - mail：**dd@hep.com.cn

**通信地址：**北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

**邮 编：**100011

**购书请拨打电话：**(010)58581118

## 内 容 提 要

本书是原中山大学数学力学系常微分方程组编《常微分方程》1978年初版及1983年第二版后的新修订版。考虑到二十多年科学技术的发展,除尽量保持原书结构与易学易教的特点外,在教学时数不增加及内容可选的前提下,适当补充应用实例、非线性内容及计算机应用,包括分支、混沌、哈密顿方程、数值解等;并增加数学软件在常微分方程中应用作为附录;同时在绪论中简单介绍了常微分方程的发展历史和在教学中的地位,书后附习题答案及参考文献。

第三版重写了第一、六章,其他各章只作了少量修订。熟悉第二版的老师可仍按原计划讲授,然后再根据情况适当补充新内容。

全书主要内容有:绪论;一阶微分方程的初等解法;一阶微分方程的解的存在定理;高阶微分方程;线性微分方程组;非线性微分方程;一阶线性偏微分方程。此外还有两个附录:边值问题;数学软件在常微分方程中的应用。

本书可作综合大学和师范院校数学与应用数学专业,以及师范专科学校数学系常微分方程课程的教材和各高校数学模型课程的参考资料。

## 第三版前言

本书的出版经历了中国改革开放的整个时期，一直在重印中，说明本书的编写得到了读者的肯定。全书按教学大纲的要求，较全面地介绍了常微分方程的基本理论和方法，结构合理，讨论详尽，易教易学，有丰富的例子和习题，在处理诸如高阶线性方程和线性方程组等内容时有自己的特色。

在 21 世纪的新时期中修订本书，我们除保持原来的优点外，将首先以开放的观点处理材料，把常微分方程放在整个数学结构中考虑。除补充了关于常微分方程的发展历史外，在各章节中还适当介绍了有关的其他理论方法，给出有关的参考文献。

虽然常微分方程理论发展已经历几百年，但目前仍在发展中。特别是近三十多年来，在自然科学中，混沌(chaos)现象和孤立子(soliton)的重大发现，便是以微分方程为基础出现的；非线性科学的研究目前仍方兴未艾。为此，我们除在第六章非线性微分方程中介绍稳定性和定性基本理论及其应用外还以简短篇幅补充了分支、混沌、哈密顿方程和孤立子等内容，虽然概念较多，但多用图形、例子说明，不涉及复杂的推导，主要让读者对当今常微分方程的新面貌有一个概略的印象。

目前已进入信息时代，计算机已普及应用。正是由于计算机技术的发展才引发了混沌、孤立子及分形(fractal)等新现象的发现。使用计算机数学软件可大大促进数学包括常微分方程的学习、教学和研究，但考虑到本书仅是常微分方程的入门教材，正文中暂不涉及使用计算机数学软件，而把数学软件在常微分方程中的应用作为附录，附录中介绍了 Mathematica、MATLAB 和 Maple

三种通用的计算机数学语言,并列出于常微分方程的典型例子的语言程序供参考。考虑到计算机绘制微分方程积分曲线及轨线图的重要作用,而这依赖于微分方程的数值解(不管方程可积或不可积),因此补充了微分方程数值解内容,使读者能更好地使用数学软件。

目前,大学生数学建模竞赛已经普及,并成为高等院校提高素质教育及教学改革的重要手段,研究生数学建模竞赛也已开展。常微分方程模型是数学模型的基本内容之一,书中适当补充了常微分方程模型的若干例子,也适当增加了研究生入学试题作为习题。

修订部分集中在第一章和第六章,不影响原教学计划,可仍按原计划教学。增加的数值解在第三章最后,是可选内容;数学软件使用是辅助学习,只列入附录,且主要是绘图及计算,教学可用或不用计算机;甚至可将第六章非线性微分方程及附录Ⅱ数学软件在常微分方程中的应用这两部分另行作为选修课的内容。

考虑到书中用到的雅可比矩阵及函数独立性概念在微积分基本教材中不一定涉及,我们在第一章基本概念中附加了雅可比矩阵与函数独立性一段内容供需要时查阅。书中除学习要点外用仿宋体排印的是一些补充材料,初学时略去而不影响后面阅读。另外,可选或作参考部分的节或小节用星号“\*”标记于该节号或该小节号之后,而部分证明及补充仍用小字排印。

本书第一版(1978)除第六章和附录外主要参考周之铭编写的已在中山大学使用的讲义编成;第二版(1983)王高雄作了全面修订,并增加编写了第七章;现第三版因周之铭、王高雄在国外,由朱思铭、王寿松、李艳会修订,朱思铭主持。朱思铭重写了第六章,增加了应用实例和常微分方程的发展历史和参考文献,并修订了附录Ⅰ,Ⅱ;王寿松处理了拉普拉斯变换部分,修订了第三、四、五章;李艳会增加数值解一节及附录Ⅱ数学软件在常微分方程中的应用,修订了第一、二、七章。

本书的修订得到了广大师生的支持,特别是中山大学曾长期从事常微分方程教学的老师,如李尚廉、朱洁华、陈楚平、王远世、赵育林、姜正录、王其如等同志,提出了很多宝贵的建议和意见,对此,我们表示衷心的感谢。

在常微分方程教材中适当引入现代发展的新概念及数学软件是一种新的尝试,虽然仅作为可选内容,只迈出小小的一步,希望能得到兄弟院校广大师生的反馈信息。

由于本次修订时间仓促,未经全体原编者审核,有关错漏与问题由修订者负责。

朱 思 铭

2006年1月于中山大学康乐园

## 第二版前言

本版是根据高等学校理科 1981 至 1985 年教材编写规划和 1980 年在上海举行的高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会扩大会议上审订的“常微分方程教学大纲”的要求,结合几年来的教学实践,在第一版的基础上修改、补充而成的。除对全书进行全面修改外,重点补充改写了第三章、第五章的若干部分;增添了第七章一阶线性偏微分方程;此外,还充实了各章、节的习题。

本书第一版自 1978 年出版以来,得到了兄弟院校广大师生的关心和支持,他们为这次修订工作提供了很好的意见,在此谨向这些同志致谢。由于经验和水平的关系,本版一定还有错漏或不完善的地方,热切希望同志们批评指正。

编者

1982 年 10 月



# 编者说明

本书是在中山大学数学力学系原《常微分方程讲义》基础上，参考国内外一些同类的教材，经过加工和补充编写而成。全稿是在许淞庆教授主持下，由王高雄、周之铭、朱思铭、王寿松四位同志分工编写，经过反复讨论、多次修改完成。由于时间匆促，更受科学水平和教学经验的限制，一定存在不少缺点，甚至还有错误之处，恳切希望同志们提出批评和指正。

关于全书各章的主要内容，请参阅各章后面的“学习要点”。下面就我们在编写过程中的几点考虑作些说明。

一、考虑到“常微分方程”不但是数学的基础课，同时也是常微分方程学科本身近代发展方向的重要基础。本书除讲述常微分方程的最基本的从而是比较经典性的传统内容外，在第六章着重介绍微分方程的重要分支——稳定性理论的一般概念和重要结果，其中包括李雅普诺夫第二方法的主要定理及一类控制系统的绝对稳定性问题。同时在第五章讲述线性方程组时，采用了矩阵和向量等工具，为进一步学习这门学科准备某些必要的基础。

二、在编写过程中，力图做到“由浅入深，循序渐进”和“少而精”；注意突出重点，力求论证详细明了，便于自学。在基本定理的证明中，反复运用皮卡逐步逼近法，希望读者不但了解定理内容，同时要掌握这一证明方法。此外，每章还附“学习要点”，对该章内容加以总结，帮助读者掌握各部分基本内容。我们略去一阶偏微分方程部分，对于奇解则只是简单地介绍它的概念和求法。

三、在加强基本理论教学的同时，注意运算技能的培养和训练。书中各部分内容均配有典型例子，并加以说明。此外，各章、

节还配有相当数量的习题,希望通过做习题这个环节,来帮助培养、提高解题能力和技巧。

四、高阶线性方程和线性方程组完全可以统一起来处理,采用矩阵和向量等工具,使叙述上显得十分方便。但是,我们认为在常系数高阶线性方程的具体求解过程上,不采用先过渡到方程组的办法,而直接应用本书第四章介绍的方法,可能更为简便些。

基于上述的考虑,我们将上述内容分别设章编写:先讲高阶线性方程,后讲一阶线性方程组。在第五章中,关于常系数线性方程组的基解矩阵的计算,我们避免了化矩阵为若尔当型的麻烦,但却不能不用到关于空间的分解等较深的代数知识。有较好的线性代数基础的读者,可以先学习第五章,而将第四章 §4.1 的结果作为有关定理的直接推论。因此,使用本书时,对第四章和第五章的有关内容,可以灵活处理,根据实际情况进行调整。

五、在内容安排上,我们既考虑到大纲中关于学时的要求,又不完全受其限制。书中某些章节,特别第六章的内容是供选讲用的。这一章的主要定理都给出了证明,有些用小字排印,那是为学有余力的读者而写的。这些内容讲多讲少请任课教师酌定。

六、最后,鉴于工程技术方面对拉普拉斯变换法的需要,除在第四章和第五章的有关部分加以应用外,还在书末配置附录 I,介绍拉普拉斯变换的基本概念和主要性质。此外,考虑到微分方程边值问题的实际意义,在附录 II 中作为参考资料来介绍。

书末附有各章节习题答案,供读者参考。

本书由南京大学主审,复旦大学、武汉大学、兰州大学参加审查。审稿同志提出许多宝贵意见。这些意见对本书的定稿工作很有帮助。本书修改后,又经主审人何崇佑同志认真复审。在此,我们谨向这些同志表示谢意。

编者于广州中山大学

1978年7月

# 目 录

<b>第一章 绪论</b> .....	1
§ 1.1 常微分方程模型 .....	1
§ 1.2 基本概念和常微分方程的发展历史 .....	16
1.2.1 常微分方程基本概念 .....	16
* 1.2.2 雅可比矩阵与函数相关性 .....	23
* 1.2.3 常微分方程的发展历史 .....	24
本章学习要点 .....	28
<b>第二章 一阶微分方程的初等解法</b> .....	30
§ 2.1 变量分离方程与变量变换 .....	30
2.1.1 变量分离方程 .....	30
2.1.2 可化为变量分离方程的类型 .....	34
2.1.3 应用举例 .....	39
§ 2.2 线性微分方程与常数变易法 .....	44
§ 2.3 恰当微分方程与积分因子 .....	50
2.3.1 恰当微分方程 .....	50
2.3.2 积分因子 .....	55
§ 2.4 一阶隐式微分方程与参数表示 .....	62
2.4.1 可以解出 $y$ (或 $x$ )的方程 .....	62
2.4.2 不显含 $y$ (或 $x$ )的方程 .....	67
本章学习要点 .....	70
<b>第三章 一阶微分方程的解的存在定理</b> .....	75
§ 3.1 解的存在唯一性定理与逐步逼近法 .....	76
3.1.1 存在唯一性定理 .....	76

3.1.2 近似计算和误差估计 .....	87
§ 3.2 解的延拓 .....	89
§ 3.3 解对初值的连续性和可微性定理 .....	93
3.3.1 解关于初值的对称性 .....	94
3.3.2 解对初值的连续依赖性 .....	94
3.3.3 解对初值的可微性 .....	99
* § 3.4 奇解 .....	103
3.4.1 包络和奇解 .....	103
3.4.2 克莱罗微分方程 .....	108
* § 3.5 数值解 .....	112
3.5.1 欧拉方法 .....	112
3.5.2 龙格-库塔方法 .....	114
本章学习要点 .....	119
<b>第四章 高阶微分方程</b> .....	<b>120</b>
§ 4.1 线性微分方程的一般理论 .....	120
4.1.1 引言 .....	120
4.1.2 齐次线性微分方程的解的性质与结构 .....	121
4.1.3 非齐次线性微分方程与常数变易法 .....	126
§ 4.2 常系数线性微分方程的解法 .....	133
4.2.1 复值函数与复值解 .....	133
4.2.2 常系数齐次线性微分方程和欧拉方程 .....	136
4.2.3 非齐次线性微分方程·比较系数法与拉普拉斯变换法 .....	144
4.2.4 质点振动 .....	156
§ 4.3 高阶微分方程的降阶和幂级数解法 .....	166
4.3.1 可降阶的一些方程类型 .....	166
4.3.2 二阶线性微分方程的幂级数解法 .....	173
4.3.3 第二宇宙速度计算 .....	181
本章学习要点 .....	184
<b>第五章 线性微分方程组</b> .....	<b>186</b>

§ 5.1 存在唯一性定理 .....	186
5.1.1 记号和定义 .....	186
* 5.1.2 存在唯一性定理 .....	194
§ 5.2 线性微分方程组的一般理论 .....	202
5.2.1 齐次线性微分方程组 .....	202
5.2.2 非齐次线性微分方程组 .....	210
§ 5.3 常系数线性微分方程组 .....	219
5.3.1 矩阵指数 $\exp A$ 的定义和性质 .....	219
5.3.2 基解矩阵的计算公式 .....	223
* 5.3.3 拉普拉斯变换的应用 .....	240
本章学习要点 .....	246
<b>第六章 非线性微分方程</b> .....	<b>248</b>
§ 6.1 稳定性 .....	249
6.1.1 常微分方程组的存在唯一性定理 .....	249
6.1.2 李雅普诺夫稳定性 .....	250
6.1.3 按线性近似决定稳定性 .....	255
§ 6.2 $V$ 函数方法 .....	262
6.2.1 李雅普诺夫定理 .....	262
6.2.2 二次型 $V$ 函数的构造 .....	271
§ 6.3 奇点 .....	279
§ 6.4 极限环和平面图貌 .....	293
6.4.1 极限环 .....	293
6.4.2 平面图貌 .....	301
* § 6.5 分支与混沌 .....	309
6.5.1 常微分方程单参数分支 .....	309
6.5.2 Lorenz 方程与混沌 .....	315
* § 6.6 哈密顿方程 .....	325
6.6.1 完全可积性 .....	325
6.6.2 KAM 定理和 Mel'nikov 函数 .....	330

6.6.3 孤立子 .....	336
本章学习要点 .....	340
<b>第七章 一阶线性偏微分方程</b> .....	342
§ 7.1 基本概念 .....	342
§ 7.2 一阶线性偏微分方程与常微分方程组的关系 .....	344
§ 7.3 利用首次积分求解常微分方程组 .....	348
§ 7.4 一阶线性偏微分方程的解法 .....	352
§ 7.5 柯西问题 .....	362
本章学习要点 .....	368
<b>附录 I 边值问题</b> .....	370
<b>附录 II 数学软件在常微分方程中的应用</b> .....	389
<b>习题答案</b> .....	408
<b>参考文献</b> .....	428

# 第一章

## 绪 论

数学分析(微积分)中研究了变量的各种函数及函数的微分与积分.如函数未知,但知道变量与函数的代数关系式,便组成代数方程,通过求解代数方程解出未知函数.同样,如果知道自变量、未知函数及函数的导数(或微分)组成的关系式,得到的便是微分方程,通过求解微分方程求出未知函数.自变量只有一个的微分方程称为常微分方程.常微分方程是数学分析或基础数学的一个组成部分,在整个数学大厦中占据着重要位置.

在反映客观现实世界运动过程的量与量之间的关系中,大量存在满足常微分方程关系式的数学模型,需要我们通过求解常微分方程来了解未知函数的性质.常微分方程是解决实际问题的重要工具.

本章中先介绍自然界、社会界中的各种常微分方程模型,了解构造常微分方程模型的几种方法.同时讲述一些微分方程和函数相关性的基本概念及常微分方程发展历史,使读者概略了解常微分方程的历史和在数学中的地位.

### § 1.1 常微分方程模型

这一节先介绍物理、力学中的常微分方程模型,然后讨论在社会、生物、化学及气象中的常微分方程模型,最后简略介绍力学系

统中的常微分方程,为后面理论学习提供应用例子,同时总结出建立常微分方程模型的几种方法.

### 例1 RLC 电路.

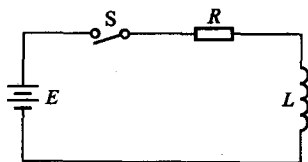
包含电阻  $R$ 、电感  $L$ 、电容  $C$  及电源的电路称为  $RLC$  电路, $RLC$  电路是电子电路的基础.根据电学知识,电流  $I$  经过  $R, L, C$  的电压降分别为  $RI, L \frac{dI}{dt}$  和  $\frac{Q}{C}$ ,其中  $Q$  为电量,它与电流的关系为  $I = \frac{dQ}{dt}$ ,根据基尔霍夫(Kirchhoff)第二定律:在闭合回路中,所有支路上的电压的代数和等于零.

由图(1.1)所示的  $RL$  电路,设  $R, L$  及电源电压  $E$  为常数,当开关  $S$  合上后,存在关系式

$$E - L \frac{dI}{dt} - RI = 0,$$

即

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}, \quad (1.1)$$



图(1.1)

这便是  $RL$  电路的常微分方程.其中电流  $I$  是自变量  $t$  的函数  $I =$

$I(t)$ ,在方程(1.1)中是未知函数.当开关  $S$  刚合上即  $t = 0$  时有  $I = 0$ ,即

$$I(0) = 0, \quad (1.2)$$

称此条件为方程(1.1)的初值条件.

如果当  $t = t_0$  时有  $I = I_0$ ,而电源突然短路,即  $E = 0$  且保持不变,此时方程(1.1)变为

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0, \quad (1.3)$$

初值条件为

$$I(t_0) = I_0. \quad (1.4)$$

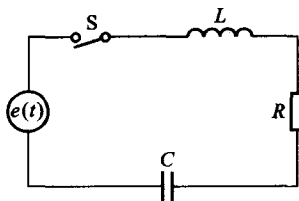
再看图(1.2)所示的  $RLC$  电路,假设  $R, L, C$  为常数,电源电



压  $e(t)$  是时间  $t$  的已知函数. 当开关  $S$  合上时有关系式

$$e(t) = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C},$$

微分上式, 代入  $I = \frac{dQ}{dt}$ , 便得到以时间  $t$  为自变量、电流  $I$  为未知函数的常微分方程



图(1.2)

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = \frac{1}{L} \frac{de(t)}{dt}. \quad (1.5)$$

当电源电压是常数  $e(t) = E$  时, 上述微分方程变为

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0. \quad (1.6)$$

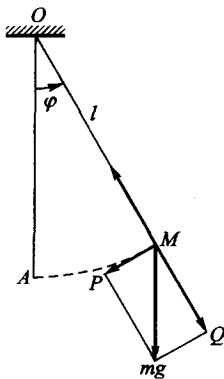
如还有  $R = 0$ , 微分方程进一步简化为

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{LC} = 0. \quad (1.7)$$

### 例 2 数学摆.

数学摆是系于一根长度为  $l$  的线上而质量为  $m$  的质点  $M$ , 在重力作用下, 它在垂直于地面的平面上沿圆周运动, 如图(1.3)所示. 我们来确定摆的运动方程.

设取反时针运动的方向作为计算摆与铅垂线所成的角  $\varphi$  的正方向. 质点  $M$  沿圆周的切向速度  $v$  可以表示为  $v = l \frac{d\varphi}{dt}$ . 作用于质点  $M$  的重力  $mg$  将摆拉回平衡位置  $A$ . 把重力  $mg$  分解为两个分量  $\overrightarrow{MQ}$  和  $\overrightarrow{MP}$ , 第一个分量  $\overrightarrow{MQ}$  沿半径  $OM$  方向, 与线的拉力相抵消, 它不会引起质点  $M$  的速度  $v$  的数值的改变. 第二个分量  $\overrightarrow{MP}$  沿着圆



图(1.3)