

让你更出色

数学

新版

辅导与训练

高中二年级用

黄汉禹 杨安澜 主编
上海科学技术出版社

- 编写阵容强
- 学科信息新
- 解题思路巧
- 学习效果佳



数学辅导与训练

(高中二年级用)

黄汉禹 杨安澜 主编

上海科学技术出版社

内 容 提 要

《数学辅导与训练》一书依据上海市数学学科课程标准编写而成。全书分学习要求,解题指导,疑难分析,基本训练,自我评估,本章测试等部分组成。本书通过提示各个知识要点,指导各类题的解法,让学生牢固掌握数学基础知识,提高学生分析和解决问题的能力。

责任编辑 周玉刚

新 版

数学辅导与训练

(高中二年级用)

黄汉禹 杨安澜 主编

上海世纪出版股份有限公司 出版、发行
上海科学技术出版社

(上海钦州南路 71 号 邮政编码:200235)

新华书店上海发行所经销 上海商务联西印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 15.25 字数 359 000

2002 年 6 月第 1 版 2006 年 2 月第 13 次印刷

印数:105 901 - 111 900

ISBN 7-5323-6423-2/G·1444

定价:16.30 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题,
请向承印厂联系调换

编写说明

本书以修订的学科课程标准和教材使用意见(高中部分)为依据,内容紧密配合课本,旨在帮助学生克服学习上的困难,增长阅读能力和自学能力,提高学科素质,及时消化所学的知识内容(包括基本概念、基本理论、基本要求,以及有关的重点、难点),并为学有余力的学生提供一些深、宽度略高于课程标准的学习资料。

由上海中小学课程教材改革委员会组织编写的、供国家发达地区使用的中、小学数学教材,经过多年试用,越来越被广大教师、家长和社会认同与接受。由于这套教材的成功,数学编写组曾于1994年获得了“苏步青教育奖”,在社会上取得了良好的信誉。为更好地体现这套教材的精神,本辅导与练习每章按节在结构上由学习要求、知识要点、解题指导、疑难分析及基本训练等部分组成。

[学习要求] 根据数学学科课程标准,简明扼要、恰如其分地分条列出教学要求。

[解题指导] 精选例题,力求使每个例题都有其显明的目的性。每个例题视其难易,设有分析、解(包括多种典型解法)、解后适当而恰如其分地提出“注意”、“说明”、“思考”、“研究”等项目。这里“注意”是指解题的注意事项,指出其容易出错或疏忽的地方;“说明”是指通过本例阐明解题的一般规律,告诉学生解题的基本方法;“思考”是指当本例题的条件和结论作适当改变时,命题将起何变化,也在解题方法上提出思考性问题;“研究”是更高层次上的“思考”,使学生对某些数学规律能自我发现。

[疑难分析] 将解题中的疑难所在作简明扼要的概括分析。

[基本训练] 通过解题指导和疑难分析之后,让学生进行必要的、基本的解题训练,以使有关的数学知识和数学思想方法及时得到落实。

本书各章还进行简明扼要的小结,每章最后又有本章测试,可以进一步帮助学生巩固所学知识,加深理解,熟练技能,全面掌握本章的数学基本概念、基础知识、数学思想方法及其应用。

本书由上海中学、市西中学、控江中学等三所市重点中学的教师编写,作者们对书稿的体例和选材反复斟酌,力求充分体现以培养创新能力为核心的素质教育精神。全书渗透了三校丰富的数学教学经验,一定程度上揭示了市重点中学数学教学的真谛。编写过程中始终得到三校领导的大力支持,在此我们表示

深深的谢意。本书由黄汉禹、杨安澜主编，邹一心、周玉刚主审。本书第八、第九章由杨安澜、金建军、翁正德编写，第十章由陶敬东编写，第十一章由郁汝璆编写，第十二章由郁汝璆、卢起升编写，第十三章由张颂方编写，参加本书编写的还有张志新，金辉，潘克飞等同志。

本丛书已在教学实践中使用了两至三轮。广大师生在教学过程中，一方面对本书的内容、编制的体例和格局深深厚爱，另一方面又热情地给我们指出了其中的一些不足之处。为使本书修改得更好，本版由市西中学杨安澜、张颂方、陶敬东进行了全面修订，黄汉禹审阅了修订稿。限于我们的水平，书中难免仍有不足之处，恳请广大师生、家长多提宝贵意见。

上海科学技术出版社

2002年2月

目 录

第八章 空间直线、平面	1
一、平面的性质	1
8.1 平面	1
基本训练 8.1	7
二、空间的两条直线	8
8.2 直线与直线的平行	8
8.3 异面直线	11
基本训练 8.2	15
三、直线与平面、平面与平面的平行	16
8.4 直线与平面平行	16
基本训练 8.3	20
8.5 平面与平面平行	21
基本训练 8.4	25
四、直线与平面、平面与平面相交	26
8.6 直线与平面的垂直	26
基本训练 8.5	30
8.7 直线与平面的交角	32
基本训练 8.6	36
8.8 二面角	37
基本训练 8.7	42
8.9 平面与平面的垂直	44
基本训练 8.8	47
本章测试题(A 卷)	51
本章测试题(B 卷)	52
第九章 多面体	55
一、棱柱	55
9.1 棱柱的性质	55
基本训练 9.1	59
9.2 棱柱的体积	60
基本训练 9.2	63
二、棱锥	64
9.3 棱锥的性质	64
基本训练 9.3	68

9.4 棱锥的体积	70
基本训练 9.4	74
三、棱台	75
9.5 棱台	75
基本训练 9.5	80
本章测试题(A 卷)	82
本章测试题(B 卷)	84
第十章 向量初步	87
一、平面向量	87
基本训练 10.1	98
二、空间向量	99
基本训练 10.2	111
本章测试题(A 卷)	112
本章测试题(B 卷)	114
第十一章 坐标平面上的直线	116
一、坐标法	116
11.1 坐标法	116
11.2 直线的倾斜角和斜率	120
11.3 两条直线的平行和垂直	122
基本训练 11.1	124
二、直线方程	125
11.4 一次函数和直线方程	125
11.5 直线方程的其他形式	127
基本训练 11.2	131
三、两条直线的交点、夹角,点到直线的距离	132
11.6 两条直线的交点	132
11.7 两条直线的夹角	136
11.8 点到直线的距离	138
基本训练 11.3	141
本章测试题(A 卷)	143
本章测试题(B 卷)	144
第十二章 圆锥曲线	147
一、曲线与方程	147
12.1 曲线与方程	147
12.2 曲线的交点	150
基本训练 12.1	151
二、圆	152
12.3 圆的方程	152
基本训练 12.2	157

三、椭圆与双曲线	158
12.4 椭圆与它的标准方程	158
12.5 椭圆的性质	160
12.6 双曲线与它的标准方程	163
12.7 双曲线的性质	165
基本训练 12.3	168
四、抛物线	170
12.8 抛物线与它的标准方程	170
基本训练 12.4	175
五、坐标的平移	176
12.9 坐标系的平移公式	176
基本训练 12.5	180
六、圆的参数方程	181
12.10 圆的参数方程	181
本章测试题(A卷)	184
本章测试题(B卷)	186
第十三章 数列与数学归纳法	188
一、数列	188
基本训练 13.1	192
二、等差数列与等比数列的通项公式	193
基本训练 13.2	197
三、数列的前 n 项和	199
基本训练 13.3	208
四、数学归纳法	210
基本训练 13.4	214
本章测试题(A卷)	216
本章测试题(B卷)	217
参考答案	219

第八章

空间直线、平面

一、平面的性质

8.1 平面

[学习要求]

1. 理解平面的概念, 掌握用集合符号表示点与平面的位置关系及直线与平面的位置关系.
2. 理解平面的基本性质, 初步学会绘制简单的空间图形和进行简单的论证.

[知识要点]

1. 平面

数学中所说的平面是一个只描述而不给定义的原始概念. 它无所谓大小、厚薄和宽窄, 它在空间是无限伸展的. 这些与直线的概念相类似. 画平面时, 通常画一个平行四边形来表示平面的表示法: 如平面 M , 平面 α , 平面 AC (图 8.1).

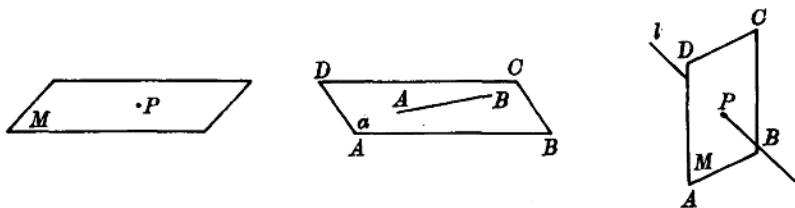


图 8.1

2. 空间点、直线、平面位置关系的表示

通常把空间的点看作元素, 那么直线是点的集合; 平面也是点的集合, 故点与直线, 点与平面之间位置关系是元素与集合间的关系, 而直线与平面之间是集合间的关系. 这样, 点 P 在平面 M 内, 表示为 $P \in \text{平面 } M$; 直线 AB 在平面 α 内, 表示为 $AB \subset \alpha$. 直线 l 与平面 AC 相交于点 P , 表示为 $l \cap \text{平面 } AC = P$ (图 8.1).

3. 平面的基本性质

公理 1 如果一条直线的两个点在一个平面内, 那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

表示为: 若 $A \in \alpha$, 且 $B \in \alpha$, 又 A, B 不重合, 则 $AB \subset \alpha$.

其作用是, 判断点在平面内; 直线在平面内.

公理 2 如果两个平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

表示为, 若 $A \in \alpha$, 且 $A \in \beta$, 又 α, β 不重合, 则 $l \subset \alpha$. 且 $l \subset \beta, A \in l$.

其作用是确定两个平面的交线; 确定直线和平面的交点位置; 证明点在一直线上或三点共线.

公理 3 经过不在同一直线上的三点, 有且只有一个平面.

表示为: 若 A, B, C 为不同点, 且 A, B, C 不同 $\in l$, 则 A, B, C 确定一个平面.

以下推论 1, 2, 3 的集合符合表示, 由读者自己表述.

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点, 有且只有一个平面.

推论 2 过两条相交直线, 有且只有一个平面.

推论 3 过两条平行直线, 有且只有一个平面.

这条公理及其推论的作用是, 根据确定平面的条件作辅助平面, 使空间的点、线转化到同一平面内, 从而进行几何计算或几何论证.

[解题指导]

例 1 用集合的符号表示直线 l_1 和 l_2 相交于平面 α 内一点 P , 并画出图形.

解 $l_1 \cap l_2 = P$, 且 $P \in \alpha$.

这样的位置关系可能有三种情况: 两条直线同在一个平面内; 有一条直线在一个平面内, 另一条不在此平面内; 两条直线都不在此平面内, 如图 8.2 所示.

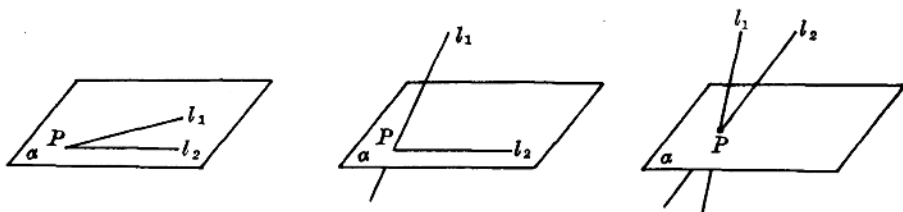


图 8.2

说明 直线与平面的位置关系, 可分为直线在平面内或不在平面内两类. 直线不在平面内, 有两种可能: $l \cap \alpha = P$ 或 $l \cap \alpha = \emptyset$.

例 2 如图 8.3 所示, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, E, F 分别是 BB_1, B_1C_1 的中点. 问: 直线 EF 和 BC 是否相交; 如果相交, 交点为 P , 那么点 P 在哪几个平面内.

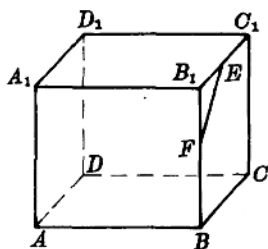


图 8.3

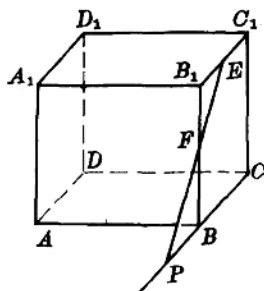


图 8.4

解 $\because EF$ 和 BC 都在平面 BC_1 内, 又 E, F 分别是 B_1C_1, BB_1 的中点, 故 $EF \parallel BC_1$, $\therefore EF$ 与 BC 相交, 设 $EF \cap BC = P$ (图 8.4).

$\because P \in BC$, 而 $BC \subset \text{平面 } BC_1$, $\therefore P \in \text{平面 } BC_1$;

又 $\because BC \subset \text{平面 } AC$, $\therefore P \in \text{平面 } AC$.

说明 因为一条直线在一个平面内, 所以这条直线上的所有的点在这个平面内, 这是证明点在一个平面的重要方法之一.

[疑难分析]

由于平面是可以无限伸展的, 所以 $BC \subset \text{平面 } AC$, $P \in BC$, 则 $P \in \text{平面 } AC$, 不要误认为点 P 不在平面 AC 内(图 8.4).

例 3 如图 8.5, 若平面 $\alpha \cap \text{平面 } \beta = a$, 平面 $\gamma \cap \text{平面 } \alpha = b$, 平面 $\beta \cap \text{平面 } \gamma = c$, 又 $a \cap b = P$.

求证: 直线 c 必过点 P .

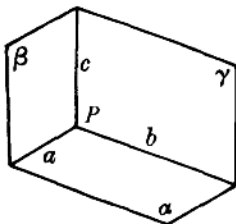


图 8.5

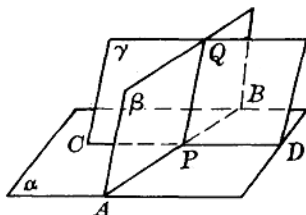


图 8.6

证明 $\because \alpha \cap \beta = a$, $\gamma \cap \alpha = b$, 又 $a \cap b = P$,

$\therefore P \in \beta$ 又 $P \in \gamma$.

而 $\beta \cap \gamma = c$, $\therefore P \in \text{直线 } c$, 即直线 c 必过点 P .

说明 直线 c 必过点 P , 也就是三直线 a, b, c 相交于一点. 这是在空间证明三线共点的重要方法之一.

[疑难分析]

怎样画三个平面有且只有一个公共点的立体示意图呢?

如图 8.6 所示, 可以先画 $\alpha \cap \beta = AB$, 在 AB 上取一点 P , 过点 P 在平面 α 内作交线 CD , 在平面 β 内作直线 PQ , 然后由 CD 和 PQ 可画出平面 γ .

[基础练习 1]

1. 探究

用铁丝按以下要求折出实际图形, 并画出空间图形.

三条直线两两相交, 最多能确定几个平面, 最少又能确定几个平面? 如果四条直线两两相交, 最多、最少能确定几个平面? 如果 n 条直线两两相交又有怎样的结论?

2. 用集合符号表示下列语句, 并画出图形.

(1) 直线 l 经过平面 α 外一点 M 和平面 α 内一点 N ;

(2) 平面 α 和平面 β 相交于点 P , 直线 a 在平面 α 内, 但点 P 不在直线 a 上.

3. 选择题*

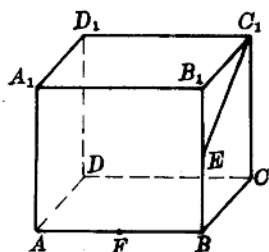
(1) 命题: “直线 a 上的两点 A, B 在平面 α 内”不等价的命题是()

* 本书中的选择题, 每小题都给出了代号为 A、B、C、D 的四个结论, 其中只有一个结论是正确的, 把你认为正确的结论的代号写在题后的括号内, 下同.

- (A) 直线 a 在平面 α 内. (B) 平面 α 通过直线 a .
 (C) 直线 a 上只有两个点在平面 α 内. (D) 直线 a 上的所有的点都在平面 α 内.

(2) 下列四个命题中,真命题为()

- (A) 两个平面 α, β 有一个公共点,就说平面 α, β 相交于过点 P 的任意一条直线.
 (B) 两个平面 α, β 有且只有一条公共直线 a ,就说平面 α, β 相交,记作 $\alpha \cap \beta = a$.
 (C) 两个平面 α, β 有一个公共点 P ,就说平面 α, β 相交于 P 点,记作 $\alpha \cap \beta = P$.
 (D) 平面 ABC 与平面 DBC 相交于线段 BC .

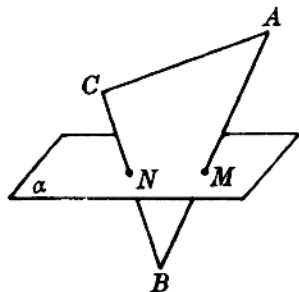


(第4题)

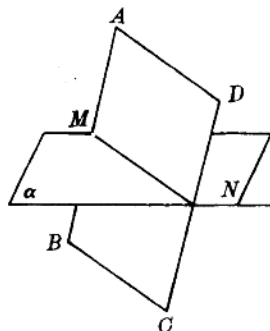
4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 BB_1 的中点,试证明:

- (1) 直线 C_1E 和 BC 的交点 P 必在平面 $ABCD$ 内;
 (2) 若 F 是 AB 的中点,则三点 D, F, P 在一直线上.

5. (1) 若 $AB \cap \text{平面 } \alpha = M, BC \cap \text{平面 } \alpha = N$,试画出直线 AC 与平面 α 的交点.



(1)



(2)

(第5题)

(2) 若平面 $AC \cap \alpha = MN$. 试画出 AC 与平面 α 的交点.

例4 试证: 如果两条平行线中的一条与一个平面相交,那么另一条也必与这个平面相交.

已知: $l_1 \parallel l_2, l_1 \cap \alpha = A$ (图 8.7).

求证: l_2 与平面 α 相交.

证明 $\because l_1 \parallel l_2, \therefore$ 过 l_1, l_2 可以确定一个平面,不妨设为 β .

$\because A \in l_1, \therefore A \in \beta$.

又 $\because A \in \alpha, \therefore$ 平面 α, β 必相交于过点 A 的一直线 l_3 .

即 l_1, l_2, l_3 都在平面 β 内.

$\because l_1 \parallel l_2, l_1 \cap l_3 = A,$

$\therefore l_2$ 与 l_3 必相交,交点为 B .

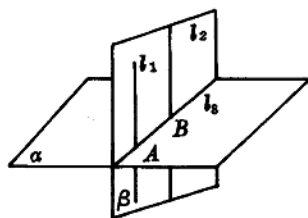


图 8.7

则 $B \in l_3, B \in \alpha, \therefore l_2 \cap \alpha = B$.

说明 本题欲证 l_2 与平面 α 相交, 转化为在同一平面内直线与直线相交的问题, 这种转化的思想是研究空间图形位置关系的常用方法.

例5 已知直线 l 上有三点 A, B, C , 过这三点分别作互相平行的直线 a, b, c (图 8.8).

求证 l, a, b, c 四条直线共面

证法1 $\because l \cap a = A, \therefore$ 过直线 l 和 a 可以确立一个平面, 设为 α .

$\because l \cap b = B, \therefore B \in \alpha$.

在平面 α 内过点 B 作直线 b' , 使 $b' \parallel a$.

根据过直线外一点有且只有一条直线与该直线平行的性质, 则直线 b' 和 b 必是重合的, 即 $b \subset \alpha$.

同理可证 $c \subset \alpha$.

$\therefore l, a, b, c$ 四条直线共面.

证法2 $\because a \parallel b, \therefore$ 过直线 a, b 可以确定一个平面 α , 则 $a \subset \alpha, b \subset \alpha$, 而 $A \in a, B \in b, \therefore A \in \alpha, B \in \alpha, \therefore l \subset \alpha$.

$\because a \parallel c$, 故由 a, c 可确定一个平面 β . 且有 $l \subset \beta$.

$\therefore$ 平面 α 和 β 都经过相交直线 l 和 a .

故平面 α 和 β 重合. 即直线 l, a, b, c 共面.

[疑难分析]

怎样证明若干直线共面?

证明若干直线共面的方法有两种: 其一, 先证两条直线可以确定一个平面, 再证其他直线均在这个平面内; 其二, 把若干直线, 按两两分为几组, 由各组确定一个平面, 再证明这若干个平面重合.

[基础练习2]

1. 探究

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 试画出 AC_1 和平面 A_1BCD_1 的交点 O . 想一想: 点 O 是否是正方体的对角线 AC_1 和 BD_1 的交点, 为什么?

2. 空间有五个点, 如果其中任意四点都不共面, 那么经过其中三个点的平面最多有_____个.

3. 一条直线和这条直线外的不在同一直线上的三点最多可以确定_____个平面.

4. 五条两两相交的直线, 如果其中任意三条直线都不共点, 那么经过其中两条直线的平面, 至少有_____个.

5. 选择题:

空间中有共面而不共线的四个点 A, B, C, D , 那么()

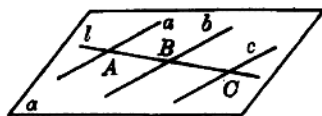
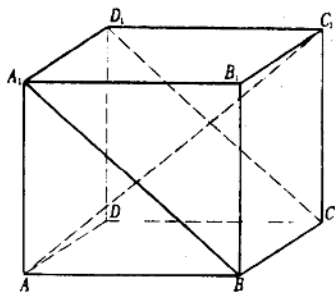


图 8.8



(第1题)

- (A) 四点中必有三点共线.
 (B) 四点中必有三点不共线.
 (C) AB, BC, CD 和 DA 四条直线中有两条互相平行.
 (D) AB, BC, CD 和 DA 四条直线中必有两条重合.

6. 证明: 空间不共点且两两相交的四条直线在同一平面内.

例6 如图 8.9 所示, 空间四边形 $ABCD$ 各边上的点分别是 M, N, P, Q .

(1) 求证: 当 M, N, P, Q 分别是各边的中点时, 则 M, N, P, Q 共面;

(2) 求证: 当 $MN \nparallel PQ$, 且 MN, PQ 共面时, 则直线 MN, BD, PQ 共点.

证明 (1) $\because M, N$ 分别是 AB, AD 的中点, $\therefore MN \parallel BD$.

同理 $PQ \parallel BD \therefore MN \parallel PQ$

$\therefore$ 由 MN, PQ 可确定一个平面.

故点 M, N, P, Q 共面.

(2) $\because MN, PQ$ 共面且 $MN \nparallel PQ$, $\therefore MN$ 和 PQ 相交, 设交点为 T .

$\therefore T \in$ 平面 ABD , 又 $T \in$ 平面 BCD .

故 $T \in BD =$ 平面 $ABD \cap$ 平面 BCD . 即直线 MN, BD, PQ 三线共点.

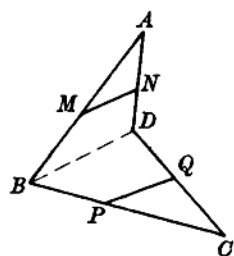


图 8.9

[疑难分析]

怎样证明三线共点?

证明三线共点的方法是, 先证明两条直线相交, 再证明第三条直线必经过这个交点. 而证明第三条直线必过这个交点, 往往运用平面性质 2.

例7 已知: 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, E, F 分别为 AB, BC 的中点(图 8.10), 试论述过点 E, F, D_1 的截面的形状, 并把它画出来.

分析 $\because$ 平面 $D_1EF \cap$ 平面 $AC = EF$. 在平面 $ABCD$ 内延长 EF , 分别交 DA, DC 直线于 K, L . 在平面 AD_1 内, 连结 KD_1 , 同样连结 D_1L .

D_1K 交 AA_1 于 P, D_1L 交 CC_1 于 Q .

分别连结 D_1P, PE, FQ, QD_1 , 则过点 E, F, D_1 的截面形状是五边形 D_1PEFQ .

作法 略.

[疑难分析]

怎样画出这一类过三点的截面呢?

解这一类问题的关键是逐一画出截面与被截面的交线, 也就是说, 本题关键是如何分别求得截面与平面 AD_1 、与平面 DC_1 、平面 A_1B 、平面 BC_1 的交线. 利用平面性质 2, 把它又转化为求两个平面的公共点.

注意 本题不要误认为所得的截面就是 $\triangle EFD_1$.

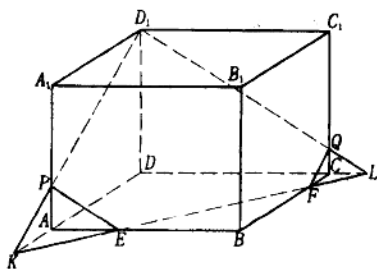


图 8.10

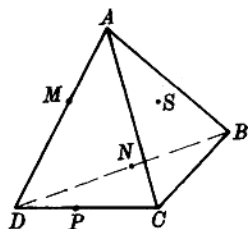
基本训练 8.1

一、选择题

- 已知点 P 不在直线 l 上, l 在平面 α 内, 则 P, l, α 之间的关系是()
 (A) $P \notin l$ 且 $l \in \alpha$. (B) $P \notin l$ 且 $l \subset \alpha$.
 (C) $P \notin l$ 且 $l \subset \alpha$. (D) $P \notin l$ 且 $l \not\subset \alpha$.
- 下面四个条件中, 能确定一个平面的是()
 (A) 空间任意三点. (B) 空间两条直线.
 (C) 两条平行直线. (D) 一条直线和一个点.
- 若三条直线两两相交, 则最多可确定平面的个数是()
 (A) 三个平面. (B) 四个平面. (C) 五个平面. (D) 六个平面.
- 一条直线和一个平面最多的公共点数是()
 (A) 一个. (B) 两个. (C) 三个. (D) 无数个.

二、填空题

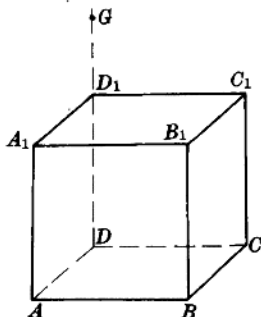
- 在空间四边形 $ABCD$ 中连结对角线 AC, BD , 组成四面体 $ABCD$ (如图), 已知 M, N, P 分别在棱 AD, BD, CD 上, S 在平面 ABC 内, 试分别画出:



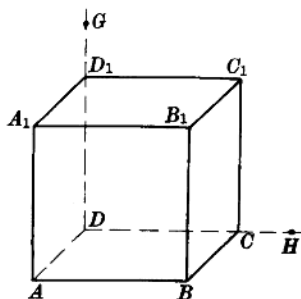
(第 1 题)

- (1) 过点 M, N, P 的平面截四面体 $ABCD$ 的截面;
 - (2) 过点 D, A, S 的平面截四面体 $ABCD$ 的截面;
 - (3) 画出平面 MPN 与平面 DAS 的交线;
 - (4) 画出直线 SD 和平面 MPN 的交点.
- 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 试过下列三点作出它的截面:

- (1) 过 A, C 及 DD_1 延长线上一点 G , 且 $D_1G = \frac{1}{2}DD_1$;
- (2) 过点 A 及 DD_1 延长线上一点 G , $D_1G = \frac{1}{3}DD_1$, 且过 DC 延长线上的一点 H , $CH = \frac{1}{3}DC$.



(1)



(2)

(第 2 题)

3. 四条直线相交于一点,那么它最多可确定平面的个数是_____.
4. 两个平面重合的条件是它们有_____个公共点.
5. 设 E, F 是空间四边形 $ABCD$ 的边 AD, BC 的中点,那么 EF _____ $\frac{1}{2}(AB+CD)$. (填“>”、“<”、“=”)
6. 若 A, B, C 三点都是两个不重合的平面的公共点,则 A, B, C 三点必定_____,依据是_____.

三、(1) 有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等; (2) 两组对边分别相等的四边形是平行四边形; (3) 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形; (4) 四边相等的四边形是菱形;

试问上述四个平面几何中的定理在立体几何中是否仍成立? 对于不成立的请举出反例.

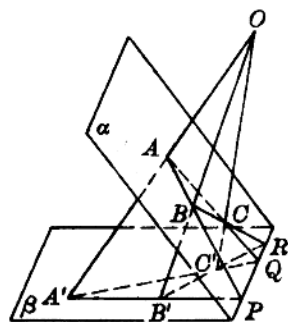
四、求证: 与同一条直线都相交的三条平行直线可确定一个平面.

五、两个平面把空间分成几个部分? 画图表示各种情况.

六、三个平面把空间分成几个部分? 画图表示各种情况.

七、三条不共面的直线 OA, OB, OC 分别与两个平面 α 和 β 交于 A, B, C 和 A', B', C' , AB 与 $A'B'$, BC 与 $B'C'$, AC 与 $A'C'$ 分别相交于 P, Q, R .

求证: P, Q, R 三点共线.



(第七题)

二、空间的两条直线

8.2 直线与直线的平行

[学习要求]

1. 理解平行线的概念及公理 4.
2. 掌握等角定理及其推论.
3. 会过一点作一直线的平行线,并利用平行的传递性证明两直线平行.

[知识要点]

1. 平行线的有关概念

(1) 两条直线平行的定义: 在同一平面内, 两条不相交的直线叫平行线.

(2) 平行线的基本性质:

① 过直线外一点, 有且只有一条直线与其平行.

② **公理 4** 平行于同一条直线的两条直线互相平行. 即若 $l_1 \parallel l_2$, 又 $l_2 \parallel l_3$, 则 $l_1 \parallel l_3$.

此公理既是论证等角定理的依据, 又是判定两条直线平行的依据.

2. 等角定理及其推论

等角定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行且方向相同或相反, 那么这两个角相等.

推论 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行, 那么由这两组直线所成的锐角

(或直角)相等.

推论揭示了在空间两条相交直线所成的锐角(或直角)经平行变换后角的大小的不变性. 这是研究和计算空间两条直线所成角的一种重要方法——平移法. 这一推论是平移法的理论依据.

[解题指导]

例1 如图 8-11 所示, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是 AA_1 上的一点, Q 是 AB 上一点. 试分别过点 P 、点 Q 画侧面 BCC_1B_1 的对角线 BC_1 的平行线, 并说明理由.

解 (1) 连结 AD_1 在平面 AD_1 内, 作 $PT \parallel AD_1$, 则 PT 就是平行于 BC_1 的直线.

理由: $\because$ 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

$$AB \parallel D_1C_1,$$

$\therefore$ 四边形 ABC_1D_1 是平行四边形.

$$\therefore AD_1 \parallel BC_1.$$

根据作法, $PT \parallel AD_1$, $\therefore PT \parallel BC_1$.

(2) $\because Q$ 是 BC_1 外一点, $\therefore$ 过 Q 、 BC_1 可以确定一个平面, 而这个平面就是由直线 AB 和 D_1C_1 所确定的平面 ABC_1D_1 .

在平面 ABC_1D_1 中, 过点 Q 作 $QG \parallel BC_1$, 则 QG 就是所作的直线.

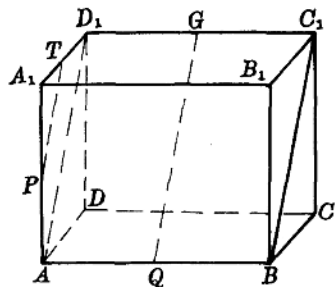


图 8-11

[疑难分析]

在空间如何过直线外一点, 作该直线的平行线?

如图 8-12 所示, 点 A 在直线 l 外, 可先过点 A 和直线 l 作平面 α , 然后在平面 α 内, 过点 A 作直线 $a \parallel l$. 由此将空间问题转化为平面问题来解决.

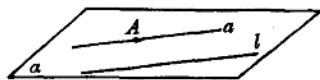


图 8-12

这个平面 α 称为作图中的辅助平面, 有时可以不直接画出来, 但实际上必须先有辅助面, 再作平行线.

例2 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中(图 8-13), 已知 E , F 分别是正方形 BB_1C_1C 和正方形 DD_1C_1C 的中心, G , H 分别是 CB 和 CD 的三等分点, 求证: $GH \parallel EF$.

证法1 分别连结 B_1C , D_1C 和 DB .

$\because E, F$ 分别是正方形 BB_1C_1C 和正方形 DD_1C_1C 的中心, $\therefore EF \parallel D_1B_1$.

又 $\because CH = \frac{1}{3}CD$, $CG = \frac{1}{3}CB$, $\therefore GH \parallel DB$.

又 $\because$ 四边形 DD_1B_1B 是平行四边形, $\therefore DB \parallel D_1B_1$.

$$\therefore EF \parallel GH.$$

证法2 分别取 BC , CD 的中点 N , M (图 8-14).

连结 EN , FM , 则 $NE \parallel \frac{1}{2}BB_1$, $MF \parallel \frac{1}{2}DD_1$, 而 $BB_1 \parallel DD_1$.

$\therefore NE \parallel MF$. $\therefore$ 四边形 $MFEN$ 是平行四边形, $\therefore MN \parallel FE$.

$\because HG \parallel MN$, $\therefore HG \parallel FE$.

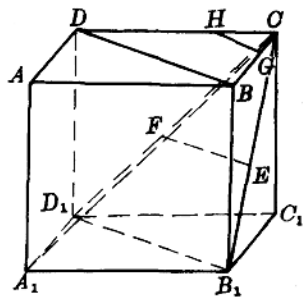


图 8-13