离散数学

李新社　编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

0158
106

离散数学

李新社　编著

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书介绍计算机和信息类专业最需要的离散数学基础知识，内容包括数理逻辑、集合论、二元关系、函数、无限集合、代数、格与布尔代数、图论和数学基础知识，并含有较多的习题和例题。

本书可作为高等理工科院校计算机科学与技术、信息安全、应用数学等专业的教材，也可供相关专业教师、研究生、高年级学生和有关工程技术人员作参考。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学／李新社编著．—北京：国防工业出版社，2006.6

ISBN 7-118-04464-4

Ⅰ．离… Ⅱ．李… Ⅲ．离散数学 Ⅳ．O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 021612 号

※

国防工業出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044）

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 7¾ 字数 200 千字

2006 年 6 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—3000 册 定价 14.00 元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

离散数学是研究离散对象及其相互关系的一门数学学科，是研究离散结构的数学分支。当今正值数字化高速发展的时代，无论在科学研究中还是在经济建设中，信息的发送、传输、接收以及计算机分析、处理、控制，都在向数字化迈进，而离散数学是数字化应用的基础，是学习计算机和信息类专业的重要数学基础，能否较好地掌握其基本内容、思维方式和体系规律对于后继专业基础课程或专业课程的学习有着直接的影响。

离散数学主要包括数理逻辑、集合论、图论和代数系统，是学习计算机科学与技术理论的主要数学基础。随着信息时代的来临，计算机应用的日益普及，人们越来越重视离散量的研究与应用。通过本课程的学习，可以培养学生抽象思维和逻辑推理的能力，并使他们掌握处理离散结构所必须的描述工具和方法。其中，图论和集合论为数据结构和数据表示理论奠定了数学基础，也为许多问题从算法角度如何加以解决提供了进行抽象和描述的重要方法；数理逻辑是研究推理的学科，在人工智能、数据库理论等的研究中有着重要的应用；代数系统是深入研究和学习计算机科学理论的数学工具。

长期的教学经验使我们认识到对于绝大多数同学来讲离散数学难以掌握。根本原因是概念多、性质多、内容抽象、涉及范围广，而学时又短。

本教材根据理工科学生对离散数学知识的需求，结合目前教学学时的实际状况，充分考虑国内外离散数学教材的特点，讲思想、讲来源、讲方法、讲应用，尽力做到内容详略得当、重点突出，而且习题予以精选，至于一些晦涩难懂而应用极少的内容、一些非常简单的内容、一些用以反复解释同一问题的内容，均不予以编入。相反对培养学生思维有益、知识结构有影响、理解离散数学主体思想体系息息相关的内容以及作者多年的一些教学和研究体会却尽量予以编入。考虑到目前的高等教育现状，一般认为非核心的离散数学内容均标有*，教师可根据具体情况实施在平时的教学当中或留给学生课外予以讨论自学。

全书共7章，内容包括数理逻辑、集合论、二元关系、函数、无限集合、代数、格与布尔代数、图论和数学基础知识，并含有较多的习题和例题。适合于高等理工科院校计算机科学与技术、信息安全、应用数学等专业作教材，也可供教师、研究生、高年级学生和有关工程技术人员作参考。

作 者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第1章 数理逻辑

在我国,逻辑学旧称“名学”,也称为“论理学”,是研究人类推理过程的科学,而数理逻辑则是用数学的方法进行这一研究的一个数学学科,其显著特征是符号化和形式化,即把逻辑所涉及的“概念、判断、推理”用符号来表示,用公理体系来刻画,并基于符号串形式的演算来描述推理过程的一般规律。因此数理逻辑又称符号逻辑、现代逻辑。

1.1 命题与联结词

1.1.1 命题定义

命题是推理的基本要素。自然语言将命题表述为具有确定真假意义的陈述句。若该语句表述的意义符合事实,则称其为真命题。若该语句表述的意义不符合事实,则称其为假命题。我们用 0 或 F 表示假命题;用 1 或 T 表示真命题。判断一个句子是否为命题,应首先判断它是否为陈述句,再判断它是否有惟一的真值。

例如,考察下列语句:

“雪是黑的”、“北京是中国的首都”是陈述句,都有确定的真假意义,是命题。前者为假命题,后者为真命题。

“21 世纪时有人住在月球上”是陈述句,今后若干年,可以证明它要么是真,要么是假,故是命题。

“你是谁?”不是命题,它是疑问句,不是陈述句。

“$x+y<7$”不是命题,因为它的真假意义不确定。如 $x=100$, $y=-84$,则“$x+y<7$”为假;而 $x=-91, y=78$,则“$x+y<7$”为真。

以上所举各陈述句都是简单陈述句,它们不能再分解成更简单的句子,如果其是命题,则就是原子命题(简单命题)。由若干个原子命题通过联结词构成的命题就是复合命题。注意通常人们总是用大写字母表示命题(也可用小写字母表示)。

1.1.2 联结词定义

(1)“$\neg$”否定联结词,P 是命题,$\neg P$ 是 P 的否命题。是由联结词“$\neg$”和命题 P 组成的复合命题。

例如 P:猩猩是人。

$\neg P$:猩猩不是人。

P:上海是中国最大的城市。

$\neg P$:上海不是中国最大的城市。

P 与 $\neg P$ 的真假是相互对立的,P 为真,则 $\neg P$ 为假;反之 P 为假,则 $\neg P$ 为真。

(2)“$\wedge$”合取联结词,P、Q 是命题,$P \wedge Q$ 是 P、Q 的合取式,是联结词“$\wedge$”和命题 P、Q 组成的复合命题。“$\wedge$”在语句中相当于“不但…而且…”,“既…又…”。$P \wedge Q$ 取值 1,当且仅当 P、Q 均取 1;$P \wedge Q$ 取值为 0,只要 P、Q 之一取 0。

例如,丘玉学习很好,而且非常努力。就可以符号化为 P:“丘玉学习很好”,Q:“丘玉学习非常努力”,记作 $P \wedge Q$。

(3)“$\vee$”析取联结词,“$\bar{\vee}$”不可兼析取(异或)联结词,P、Q 是命题,$P \vee Q$ 是 P、Q 的析取式,是联结词“$\vee$”和命题 P、Q 组成的复合命题。$P \bar{\vee} Q$ 是 P、Q 的不可兼析取式,是联结词“$\bar{\vee}$”和命题 P、Q 组成的复合命题。联结词“$\vee$”或“$\bar{\vee}$”在一个语句中都表示“或”的含义,可以表示相容或,也可以表示排斥或。“$\bar{\vee}$”表示不相容的或。即 $P \bar{\vee} Q \leftrightarrow \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q$。

例如,赵志宏学习俄语或英语,是相容或,记 P:赵志宏学习俄语,Q:赵志宏学习英语,命题符号化为 $P \vee Q$。

又如,李宏生于 1978 年或 1980 年,是排斥或,即不可兼或,记

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

P:李宏生于 1978 年,Q:李宏生于 1980 年,命题符号化为 $P\ \bar{\vee}\ Q$。

$P \vee Q$ 取值为 1,只要 P、Q 之一取值为 1,只有 P、Q 均取值为 0 时,$P \vee Q$ 取值为 0。

$P\ \bar{\vee}\ Q$ 取值为 1 当且仅当 P、Q 取值不同;$P\ \bar{\vee}\ Q$ 取值为 0 当且仅当 P、Q 取值相同。

(4)"$\leftrightarrow$" 等价联结词,P、Q 是命题,$P \leftrightarrow Q$ 是 P、Q 的等价式,是联结词"$\leftrightarrow$"和命题 P,Q 组成的复合命题。"$\leftrightarrow$"在语句中相当于"…当且仅当…",$P \leftrightarrow Q$ 取值 1 当且仅当 P,Q 取值相同。

例如,长城是中国古代的伟大建筑,长江是中国最长的河流。它们的真值是相同的,可记作 P:长城是中国古代的伟大建筑,Q:长江是中国最长的河流,有 $P \leftrightarrow Q$ 真值是 1。

又如,A:$3 \times 5 = 12$,B:石家庄是河南省会,有 $A \leftrightarrow B$ 真值是 1。

再如,P_1:北京的 1 月份最冷,P_2:北方的 7 月份最热,有 $P_1 \leftrightarrow P_2$ 真值为 0。

(5)"$\rightarrow$"蕴涵联结词,P、Q 是命题,$P \rightarrow Q$ 是 P、Q 的蕴涵式,是联结词"$\rightarrow$"和命题 P、Q 组成的复合命题。$P \rightarrow Q$ 取值为 0,只有 P 取值为 1,Q 取值为 0 时;其余各种情况,均有 $P \rightarrow Q$ 取值为 1。

注意:在语句中,$P \rightarrow Q$,有时也解释为"若 P,则 Q"。似乎 $P \rightarrow Q$ 是"因果关系",但是不一定总有因果关系。只要 P、Q 是命题(即有真值),那么 $P \rightarrow Q$ 就是命题(即有真值)。不管 P、Q 是否有无因果关系。

例如:P:某国军事力量很强大,Q:这个国家会在世界上称王称霸。$P \rightarrow Q$ 表示如果某国军事力量很强大,那么这个国家就会在世界上称王称霸。它的真值是 1。

例如,P:今晚开会,Q:今晚我到校。有 $P \rightarrow Q$,如果今晚开会,我今晚到校(有因果关系)。它的真值是 1。

又如,A:雪是白的,B:太阳从西边出来。有 $A \rightarrow B$,如果雪是白的,那么太阳从西边出来(没有因果关系)。它的真值是 0。

复合命题与简单命题之间的真值关系可用表 1-1 给出,其中 0 代表假,1 代表真。实际上表 1-1 也是上面几个联结词的定义。

表 1-1

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \bar{\vee} q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

1.1.3 命题公式

命题常元：把表示具体命题及表示常命题的 p、q、r、s 等与 F、T 统称为命题常元。

命题变元：以"真、假"或"1,0"为取值范围的变元。

命题逻辑公式由以下子句归纳定义：

(1) 归纳基：命题常量或命题变量是命题逻辑公式，称为命题逻辑公式的原子项。

(2) 归纳步：如果 A、B 是逻辑公式，则 $(\neg A)$、$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \to B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 也是命题逻辑公式。

(3) 最小化：所有的命题逻辑公式都通过 1 和 2 得到。

根据定义，含有 n 个命题变元的命题公式其数量是无限的，但这无限多个命题公式中含有多少个不同的真值表呢？这里先给出结论，有 2^{2^n} 个，后边学习时再讨论。

运算次序：联结词的结合能力强弱依次为 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\leftrightarrow$。

真值表：命题公式的真值只与命题公式中所出现的命题变量的真值赋值有关，如果命题公式中含有 n 个命题变量，则对这些命题变量的真值赋值共有 2^n 种不同情况，可通过一个表，列出在这所有情况下命题公式的真值，这种表称为该命题公式的真值表。

例 1 判定公式 $P \to Q$ 与 $\neg P \vee Q$ 是否等值。

解：列公式 $P \to Q$ 与 $\neg P \vee Q$ 的真值表，如表 1-2。

表 1-2

P	Q	$P\to Q$	$\neg P$	$\neg P\vee Q$	$P\to Q\leftrightarrow\neg P\vee Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

由表 1-2 可知,公式 $P\to Q$ 与公式 $\neg P\vee Q$ 是等值的。

1.1.4 语句的形式化

例2 将下列语句形式化,并表示为命题公式。

(1) 我和他既是兄弟又是同学。

可表示为 $p\wedge q$,其中 p:我和他是兄弟,q:我和他是同学。

(2) 我和他之间至少有一个要去边疆。

可表示为 $p\vee q$,其中 p:我去边疆,q:他去边疆。

(3) 狗急跳墙。

可表示为 $p\to q$,其中 p:狗急了,q:狗跳墙。

(4) 除非他来,否则我不同他和解。

可表示为 $p\leftrightarrow q$,或 $(p\to q)\wedge(\neg p\to\neg q)$,其中 p:他来,q:我与他和解。

(5) 如果他不来,那么他或者是生病了,或者是不在本地。

可表示为 $\neg p\to(q\vee\neg r)$,其中 p:他来,q:他生病,r:他在本地。

(6) 如果你和他不都是傻子,那么你们俩都不会去自讨没趣。

可表示为 $\neg(p\wedge q)\to(\neg r\wedge\neg s)$,其中 p:你是傻子,q:他是傻子,r:你会去自讨没趣,s:他会去自讨没趣。

(7) 风雨无阻,我去上学。

可表示为 $(p\wedge q\to r)\wedge(p\wedge\neg q\to r)\wedge(\neg p\wedge q\to r)\wedge(\neg p\wedge$

$\neg q \to r$) 其中 p:天刮风,q:天下雨,r:我去上学。也可直接表示为 r,因为我始终是要去学校的。

例3 设 p 表示"α 是偶数",q 表示"α 是奇数",r 表示"α 是质数",s 表示"$\alpha = 2$",那么,可如下理解各命题公式。

(1) $p \vee q$(α 是偶数或 α 是奇数)。

(2) $p \wedge r \to s$(若 α 是偶质数,则 $\alpha = 2$)。

(3) $r \wedge \neg s \to q$(若 α 是不等于 2 的质数,则 α 为奇数)。

(4) $\neg q \wedge \neg s \to \neg r$(若 α 不是奇数且 $\alpha \neq 2$,则 α 不是质数)。

(5) $\neg (q \vee s) \to \neg r$(若"$\alpha$ 是奇数与 $\alpha = 2$ 之一真"不能成立,则 α 不是质数)。

(6) $r \leftrightarrow q \vee s$($\alpha$ 是质数当且仅当 α 是奇数或 $\alpha = 2$)。

例4 A 国的人只有两种,一种永远说真话,一种永远说假话。你来到 A 国,并在一个二叉路口不知如何走才能到达首都。守卫路口的士兵只准你问一个问题,而且他只答"是"或"不是"。你应该如何发问,才能从士兵处获知去首都的道路。

1.2 永真性的判定或命题公式的分类

定义 1-1 命题公式 A 称为重言式(tautology),如果对 A 中命题变元的一切指派均弄真 A。A 称为可满足式,如果至少有一个指派弄真 A,否则称 A 为不可满足式或永假式、矛盾式。命题公式的永真性包括判定命题公式是永真的(重言式)、永假的(矛盾式)。对于任给一个公式,列出该公式的真值表,观察真值表的最后一列是否全为1(或全为0),若真值表的最后一列全为1,则该公式为永真式;若真值表的最后一列全为0,则该公式是永假式;若真值表的最后一列既非全为1,又非全为0,则该公式是可满足式。

例5 用真值表证明 $(p \vee q) \wedge \neg p \to q$ 为重言式。

解: 表 1-3 说明命题成立。

表 1-3

p	q	$p\vee q$	$\neg p$	$(p\vee q)\wedge\neg p$	$(p\vee q)\wedge\neg p\to q$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

定义 1-2　$A\leftrightarrow B$ 为永真式，则称 A 与 B 逻辑等价，记作 $A\Leftrightarrow B$。

定理 1-1　设 A、B、C 是任意的命题公式，有：

(1) 双重否定律：　$A\Leftrightarrow(\neg(\neg A))$

(2) 等幂律：　$A\Leftrightarrow(A\vee A)$　　$A\Leftrightarrow(A\wedge A)$

(3) 交换律：　$(A\vee B)\Leftrightarrow(B\vee A)$　　$(A\wedge B)\Leftrightarrow(B\wedge A)$

(4) 结合律：　$((A\vee B)\vee C)\Leftrightarrow(A\vee(B\vee C))$　　$((A\wedge B)\wedge C)\Leftrightarrow(A\wedge(B\wedge C))$

(5) 分配律：　$(A\vee(B\wedge C))\Leftrightarrow((A\vee B)\wedge(A\vee C))$　　$(A\wedge(B\vee C))\Leftrightarrow((A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

(6) 德·摩根律：　$(\neg(A\vee B))\Leftrightarrow((\neg A)\wedge(\neg B))$　　$(\neg(A\wedge B))\Leftrightarrow((\neg A)\vee(\neg B))$

(7) 吸收律：　$(A\vee(A\wedge B))\Leftrightarrow A$　　$A\wedge(A\vee B))\Leftrightarrow A$

(8) 零律：　$(A\vee 1)\Leftrightarrow 1$　　$(A\wedge 0)\Leftrightarrow 0$

(9) 同一律：　$(A\vee 0)\Leftrightarrow A$　　$(A\wedge 1)\Leftrightarrow A$

(10) 排中律：　$(A\vee(\neg A))\Leftrightarrow 1$

(11) 矛盾律：　$(A\wedge(\neg A))\Leftrightarrow 0$

(12) 蕴涵等值式：　$(A\to B)\Leftrightarrow((\neg A)\vee B)$

(13) 等值等价式：　$(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A))$

(14) 假言易位：　$(A\rightarrow B)\Leftrightarrow((\neg B)\rightarrow(\neg A))$

(15) 等值等价否定式：　$(A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow((\neg A)\leftrightarrow(\neg B))$

(16) 归谬论：　$((A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow(\neg B)))\Leftrightarrow(\neg A)$

对给定公式按照上面定律进行等值推导,若该公式的真值为1,则该公式是永真式;若该公式的真值为0,则该公式为永假式。

替换规则　设有 $B\Leftrightarrow C$,而 A' 是命题公式 A 通过使用 C 替换 A 中出现的某些 B(不需要替换所有的 B)而得到的命题公式,则有 $A\Leftrightarrow A'$。

例 6　证明:$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow P\wedge Q\rightarrow R$。

证明:

$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$

$\Leftrightarrow P\rightarrow(\neg Q\vee R)$　　(等值蕴涵式)

$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee R)$　　(等值蕴涵式)

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)\vee R$　　(结合律)

$\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee R$　　(德·摩根律)

$\Leftrightarrow P\wedge Q\rightarrow R$　　(等值蕴涵式)

所以,$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$

例 7　用等值演算法判定公式 $P\,\bar{\vee}\,(Q\wedge R)\rightarrow P\vee Q\vee R$ 是永真式还是永假式?

解:

$P\,\bar{\vee}\,(Q\wedge R)\rightarrow P\vee Q\vee R$

$\Leftrightarrow\neg(P\,\bar{\vee}\,(Q\wedge R)\vee(P\vee Q\vee R)$

$\Leftrightarrow\neg(P\wedge\neg(Q\wedge R)\vee\neg P\wedge(Q\wedge R))\vee(P\vee Q\vee R)$

$\Leftrightarrow\neg((P\wedge\neg(Q\wedge R))\vee(\neg P\wedge Q\wedge R))\vee(P\vee Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg(P\wedge\neg(Q\wedge R))\wedge\neg(\neg P\wedge Q\wedge R))\vee(P\vee Q\vee R)$

$\Leftrightarrow((\neg P\vee(Q\wedge R))\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R))\vee(P\vee Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee(Q\wedge R))\vee P\vee Q\vee R)\wedge((P\vee\neg Q\vee\neg R)\vee P\vee Q\vee R)$

$\Leftrightarrow 1\wedge 1$

$\Leftrightarrow 1$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com