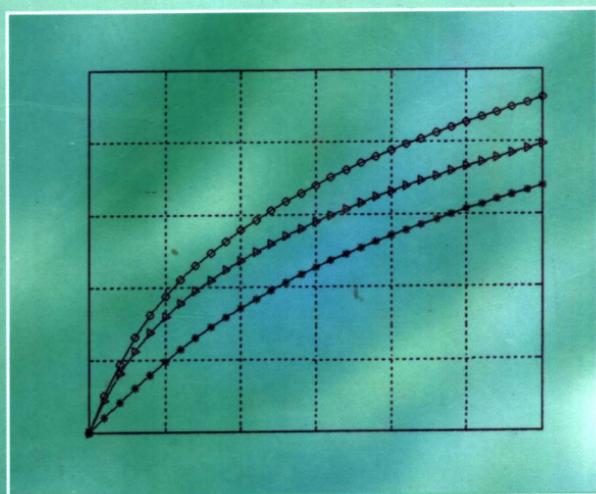


# 复合材料板的非线性弯曲

Nonlinear Bending of Composite Plates

杨加明 著



国防工业出版社  
National Defense Industry Press

# **复合材料板的非线性弯曲**

## **Nonlinear Bending of Composite Plates**

**杨加明 著**

**国防工业出版社**

**· 北京 ·**

图书在版编目(CIP)数据

复合材料板的非线性弯曲 / 杨加明著. —北京：国防工业出版社, 2006. 7  
ISBN 7 - 118 - 04529 - 2

I . 复... II . 杨... III . 复合材料—层板—非线性  
—弯曲—研究 IV . TB33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 044635 号

\*

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

\*

开本 850 × 1168 1/32 印张 6 3/4 字数 154 千字

2006 年 7 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2500 册 定价 28.00 元

---

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010) 68428422 发行邮购: (010) 68414474

发行传真: (010) 68411535 发行业务: (010) 68472764

## 致 读 者

**本书由国防科技图书出版基金资助出版。**

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技和武器装备建设事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，原国防科工委于 1988 年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会，扶持、审定出版国防科技优秀图书。

**国防科技图书出版基金资助的对象是：**

1. 在国防科学技术领域中，学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。
2. 学术思想新颖，内容具体、实用，对国防科技和武器装备发展具有较大推动作用的专著；密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的高新技术内容的专著。
3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的新工艺、新材料内容的专著。
4. 填补目前我国科技领域空白并具有军事应用前景的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在总装备部的领导下开展工作，负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由总装备部国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承

担负着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下，原国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技和武器装备建设战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

**国防科技图书出版基金  
评审委员会**

## 国防科技图书出版基金 第五届评审委员会组成人员

主任委员 刘成海

副主任委员 王 峰 张涵信 程洪彬

秘书长 程洪彬

副秘书长 彭华良 蔡 镛

委员 (按姓名笔画排序)

于景元 王小謨 甘茂治 刘世参

杨星豪 李德毅 吴有生 何新贵

佟玉民 宋家树 张立同 张鸿元

陈冀胜 周一宇 赵凤起 侯正明

常显奇 崔尔杰 韩祖南 傅惠民

舒长胜

## 前　　言

当前各种先进的复合材料已经大量用于航空航天、海洋工程、造船、交通运输和房屋建筑等工业领域中，复合材料与其他工程材料一样，都是在一定的环境条件下使用。常见的环境条件包括湿度、温度、腐蚀性介质、紫外线辐射、载荷等。对于有些复合材料，如航空航天用复合材料，其环境条件更为复杂，如高、低温交变及湿膨胀系数的急剧变化。因此，开展复合材料在湿热环境下的研究，对于合理有效地使用复合材料是很有必要的。

我们知道，C. Y. Chia 教授的《Nonlinear Analysis of Plates》是一本系统介绍板的非线性分析的名著，其涉及的边界条件大多为常见的四边简支或四边固定，没有考虑横向剪切变形和湿热环境的影响。对于复合材料层合板而言，横向剪切变形和湿热环境的影响很大。本书重点介绍复杂边界条件下的几何非线性弯曲问题，这些复杂边界条件包括：两邻边饺支两邻边夹紧、三边饺支一边夹紧、一边饺支三边夹紧、弹性转动约束等，并考虑了横向剪切变形和湿热环境对层合板弯曲行为的影响。

本书共分 6 章。第 1 章为绪论。概述了本研究领域国内外的发展过程及研究现状。第 2 章详细论述 Kirchhoff 假定条件下各种复杂边界条件的正交各向异性矩形板几何非线性弯曲问题。用 Galerkin 方法把控制方程转化为代数方程，用稳定化的双共轭梯度法求解线性方程组，用可调节参数的修正迭代法求解非线性代数方程组，并给出了各种边界条件下该问题的统一求解方法。第 3 章详细讨论了高阶剪切变形理论下复合材料层合板的几何非线

性弯曲问题。在附录 5 中详尽证明了主要公式的由来,对第 2 章的内容进行了相应的拓展。第 4 章探讨了湿热环境下复合材料层合板的几何非线性弯曲问题,考虑了湿膨胀系数和热膨胀系数对层板弯曲行为的影响。第 5 章分析弹性地基上的层合板在湿热环境作用下的几何非线性弯曲问题。第 6 章为几何非线性研究的总结并提出了后续工作的展望。

作者对总装备部国防科技图书出版基金、江西省自然科学基金、江西省材料科学与工程中心基金和南昌航空工业学院无损检测技术教育部重点实验室基金的资助表示感谢。特别感谢恩师孙良新教授在本书成稿过程中给予的细心指导和无私帮助。

由于作者水平有限,书中错误和不妥之处在所难免,恳请读者和专家批评指正。

杨加明

2006 年春于南昌航空工业学院

## 注 释 表

$A_{ij}$ , $B_{ij}$ , $D_{ij}$	层合板的拉伸刚度、耦合刚度和弯曲刚度
$a, b$	矩形板的长度和宽度
$C_{ij}$	各向异性板的折算刚度
$E_1, E_2$	正交各向异性板的主弹性模量
$e_1, e_2, e_{12}$	单层板正轴湿热应变
$e_x, e_y, e_{xy}$	单层板偏轴湿热应变
$G_{12}, G_{23}, G_{13}$	正交各向异性板的剪切模量
$H_i, H'_i$	梁函数的范数
$h$	板的厚度
$K_1, K_2$	弹性转动约束边界条件中的弹性系数
$L_n$	层合板的铺层总数
$M_x, M_y, M_{xy}$	直角坐标系中每单位长度上的弯矩和扭矩
$N_1$	可调节的正整数
$N_x, N_y, N_{xy}$	直角坐标系中每单位长度上的薄膜力
$Q_x, Q_y$	直角坐标系中每单位长度上的横向剪力
$q, q_0$	横向均布载荷集度
$u, v, w$	中面外一点分别沿 $x, y$ 和 $z$ 方向上的位移分量
$u^0, v^0, w^0$	中面内一点分别沿 $x, y$ 和 $z$ 方向上的位移分量
$\nu_{12}, \nu_{21}$	正交各向异性板的泊松比
$x, y, z$	笛卡儿直角坐标
$\alpha_i, \alpha'_i$	梁函数的系数
$\beta_1, \beta_2$	单层纵向与横向的湿膨胀系数

$\Delta c$	吸水含量
$\Delta T$	温度变化值
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$	直角坐标系中的正应变和剪应变
$\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0$	直角坐标系中的中面正应变和剪应变
$\zeta_1, \zeta_2$	Winkler 地基刚度系数和 Pasternak 地基刚度系数
$\theta_k$	层合板第 $k$ 层的纤维铺设角
$\lambda$	矩形板的长宽比
$\lambda_i, \lambda'_i$	梁函数的系数
$\rho_1, \rho_2$	单层纵向与横向的热膨胀系数
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$	直角坐标系中的总应力分量
$\sigma_x^b, \sigma_y^b, \sigma_{xy}^b$	直角坐标系中的弯曲应力分量
$\sigma_x^m, \sigma_y^m, \sigma_{xy}^m$	直角坐标系中的薄膜应力分量
$\tau_x, \tau_y$	曲线的切线矢量与 $x$ 轴和 $y$ 轴夹角的方向余弦
$\varphi_x, \varphi_y$	中面法线相对于 $y$ 轴和 $x$ 轴的夹角
$\chi$	一阶剪切变形理论和高阶剪切变形理论的位移场转换系数

# 目 录

<b>第1章 绪论 .....</b>	1
1.1 湿热环境下的复合材料概述 .....	1
1.2 几何非线性问题的发展过程和研究现状 .....	2
1.2.1 Kirchhoff 假定条件下的几何非线性分析 .....	3
1.2.2 Reissner - Mindlin 一阶剪切变形理论板的几何非线性 分析 .....	5
1.2.3 高阶剪切变形理论板的几何非线性分析 .....	6
1.2.4 湿热环境下复合材料层板的几何非线性分析 .....	9
1.3 研究本课题的意义 .....	10
<b>第2章 Kirchhoff 假定条件下正交各向异性板的几何非线性 分析 .....</b>	13
2.1 概述 .....	13
2.2 正交各向异性矩形板的几何非线性控制方程 .....	13
2.3 两邻边饺支两邻边夹紧正交各向异性矩形板的几何 非线性分析 .....	16
2.3.1 边界条件 .....	16
2.3.2 用 Galerkin 方法将控制方程转化为代数方程 .....	17
2.3.3 稳定化的双共轭梯度法求解线性方程组 .....	20
2.3.4 可调节参数的修正迭代法求解非线性代数方程组 .....	24
2.3.5 数值结果与分析 .....	25
2.4 三边饺支一边夹紧正交各向异性矩形板的几何非 线性分析 .....	29
2.4.1 边界条件 .....	29
2.4.2 将控制方程转化为代数方程 .....	29
2.4.3 数值结果与分析 .....	32

2.5	三边夹紧一边饺支正交各向异性矩形板的几何非线性分析	35
2.5.1	边界条件	35
2.5.2	用 Galerkin 方法将控制方程转化为代数方程	36
2.5.3	数值结果与分析	39
2.6	四边夹紧正交各向异性矩形板的几何非线性分析	43
2.6.1	边界条件	43
2.6.2	将控制方程转化为代数方程组	44
2.6.3	数值结果与分析	46
2.7	Karman 型正交各向异性矩形薄板弯曲的统一求解方法	49
2.7.1	边界条件	50
2.7.2	用 Galerkin 方法将控制方程转化为代数方程	51
2.7.3	数值结果与分析	54
2.8	小结	59
<b>第3章</b>	<b>高阶剪切变形理论下复合材料层合板的几何非线性分析</b>	<b>60</b>
3.1	概述	60
3.2	理论准备	60
3.2.1	Reddy 的高阶剪切变形理论	60
3.2.2	平衡方程和边界条件的推导	64
3.2.3	以位移形式表示的控制方程	67
3.3	三边夹紧一边饺支复合材料层合板的几何非线性分析	72
3.3.1	边界条件	72
3.3.2	将控制方程转化为代数方程	73
3.3.3	线性方程组的求解	75
3.3.4	非线性方程组的求解	80
3.3.5	数值结果与分析	81
3.4	两邻边饺支两邻边夹紧复合材料层合板的几何非	

线性分析 .....	84
3.4.1 边界条件 .....	84
3.4.2 将控制方程转化为代数方程 .....	84
3.4.3 数值结果与分析 .....	87
3.5 三边饺支一边夹紧复合材料层合板的几何非线性分析 .....	89
3.5.1 边界条件 .....	89
3.5.2 将控制方程转化为代数方程 .....	90
3.5.3 数值结果与分析 .....	93
3.6 弹性转动约束复合材料层合板的几何非线性分析 .....	95
3.6.1 边界条件 .....	95
3.6.2 位移函数的选择 .....	96
3.7 高阶剪切变形理论下复合材料层板几何非线性分析的统一求解方法 .....	99
3.7.1 边界条件 .....	99
3.7.2 求解过程 .....	100
3.7.3 数值结果与分析 .....	103
3.8 小结 .....	109
<b>第4章 湿热环境下复合材料层合板的几何非线性分析 .....</b>	<b>111</b>
4.1 概述 .....	111
4.2 考虑湿热环境时复合材料层合板的本构关系 .....	112
4.2.1 正交各向异性单层正轴由湿热膨胀系数产生的应变 .....	112
4.2.2 正交各向异性单层偏轴由湿热膨胀系数产生的应变 .....	113
4.2.3 考虑湿热应变的单层正轴应力—应变关系 .....	114
4.2.4 考虑湿热应变的单层偏轴应力—应变关系 .....	115
4.2.5 考虑湿热应变的层合板应力—应变关系 .....	116
4.3 考虑湿热环境时复合材料层合板的控制方程 .....	120
4.3.1 平衡方程和边界条件 .....	120
4.3.2 以位移形式表示的控制方程 .....	123

4.4 数值结果与分析 .....	126
4.5 小结 .....	131
<b>第5章 弹性地基上的层合板在湿热环境作用下的几何 非线性分析 .....</b>	<b>132</b>
5.1 概述 .....	132
5.2 考虑湿热环境时弹性地基上的复合材料 层合板的控制方程 .....	133
5.2.1 双参数基础模型 .....	133
5.2.2 以位移形式表示的控制方程 .....	133
5.3 位移函数的选择 .....	137
5.4 把控制方程转化为代数方程 .....	139
5.5 数值结果与分析 .....	140
5.6 小结 .....	144
<b>第6章 几何非线性研究的结论与展望 .....</b>	<b>145</b>
6.1 几何非线性研究的总结 .....	145
6.2 后续工作展望 .....	147
<b>附录 .....</b>	<b>148</b>
附录 1 式(2.42) ~ 式(2.44)中的系数 $H_{imn}$ 和 $P_i$ .....	148
附录 2 式(2.79) ~ 式(2.81)中的系数 $H_{imn}$ 、 $P_i$ 和 $Q_i$ .....	149
附录 3 式(2.109) ~ 式(2.111)中的系数 $H_{imn}$ 、 $P_i$ 和 $Q_i$ .....	150
附录 4 式(3.12)的详细积分过程 .....	151
附录 5 纵坐标向下时的格林公式和格林公式转化为 二维分部积分公式及其证明 .....	153
附录 6 利用格林公式对式(3.16)积分的详细过程 .....	158
附录 7 式(3.31) ~ 式(3.35)和式(3.84)中的材料常数 $\delta_i$ ( $i = 1, 2, 3, \dots, 56$ ) .....	162
附录 8 式(3.54) ~ 式(3.58)中的系数 $H_{imn}$ 、 $P_i$ 和 $Q_i$ .....	164
附录 9 式(3.100) ~ 式(3.104)中的系数 $H_{imn}$ 和 $P_i$ .....	166
附录 10 式(3.118) ~ 式(3.122)中的系数 $H_{imn}$ 、 $P_i$	

和 $Q_i$	.....	167
附录 11 式(5.9) ~ 式(5.13)中的 $\delta_i (i = 1, 2, 3, \dots, 53)$	.....	169
附录 12 式(5.24) ~ 式(5.28)中的系数 $H_{lmn}$ 、 $P_i$ 和 $Q_i$	.....	171
<b>参考文献</b>	.....	174

# **Contents**

<b>Chapter 1 Introduction .....</b>	<b>1</b>
1. 1 Summarization of Composite Materials under Hygrothermal Environments .....	1
1. 2 The Process of Development and the Status of Research on Geometrically Nonlinear Problems .....	2
1. 2. 1 Geometrically Nonlinear Analysis Based on the Kirchhoff's Supposition .....	3
1. 2. 2 Geometrically Nonlinear Analysis Based on Reissner- Mindlin's First-order Shear Deformation Theory .....	5
1. 2. 3 Geometrically Nonlinear Analysis Based on Higher-order Shear Deformation Theory .....	6
1. 2. 4 Geometrically Nonlinear Analysis of Laminated Composite Plates under Hygrothermal Environments .....	9
1. 3 Meaning of the Subject and Contents of This Book .....	10
<b>Chapter 2 Geometrically Nonlinear Analysis of Orthotropic     Plates Based on the Kirchhoff's Supposition .....</b>	<b>13</b>
2. 1 Introduction .....	13
2. 2 Geometrically Nonlinear Governing Equations of Orthotropic Rectangular Plates .....	13
2. 3 Geometrically Nonlinear Analysis of Orthotropic Rectangular Plates with Two Adjacent Edges Simply Supported and the Two Other Adjacent Edges Clamped .....	16
2. 3. 1 Boundary Conditions .....	16
2. 3. 2 Transformation of Governing Equations into Algebraic	

	Equations by Galerkin's Method .....	17
2.3.3	Solution of Linear Equations by Bi-conjugate Gradients	
	Stabilized Method .....	20
2.3.4	Solution of Nonlinear Algebraic Equations by Parameter-regulated Iterative Procedures .....	24
2.3.5	Numerical Results and Analysis .....	25
2.4	Geometrically Nonlinear Analysis of Orthotropic Rectangular Plates with Three Edges Simply Supported and One Edge Clamped .....	29
2.4.1	Boundary Conditions .....	29
2.4.2	Transformation of Governing Equations into Algebraic Equations .....	29
2.4.3	Numerical Results and Analysis .....	32
2.5	Geometrically Nonlinear Analysis of Orthotropic Rectangular Plates with One Edge Simply Supported and Three Edges Clamped .....	35
2.5.1	Boundary Conditions .....	35
2.5.2	Transformation of Governing Equations into Algebraic Equations by Galerkin's Method .....	36
2.5.3	Numerical Results and Analysis .....	39
2.6	Geometrically Nonlinear Analysis of Orthotropic Rectangular Plates with Four Edges Clamped .....	43
2.6.1	Boundary Conditions .....	43
2.6.2	Transformation of Governing Equations into Algebraic Equations .....	44
2.6.3	Numerical Results and Analysis .....	46
2.7	A General Method for the Bending of Karman-type Orthotropic Rectangular Plates .....	49
2.7.1	Boundary Conditions .....	50
2.7.2	Transformation of Governing Equations into Algebraic Equations by Galerkin's Method .....	51
2.7.3	Numerical Results and Analysis .....	54