



北京朗曼教学与研究中心

# Peculiar

北京朗曼教学与研究中心

宋伯涛 总主编

# 非常讲解

朱占奎 毕纯霞 主编

Explanations

初三代数  
教材全解全析

天津人民出版社

北京朗曼教学与研究中心教研成果

PECULIAR EXPLANATIONS

# 非常讲解

初三代数教材全解全析

主编 朱占奎 毕纯霞

天津人民出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

非常讲解. 数学. 初三/朱占奎、毕纯霞主编. - 天津:天津人民出版社,2002  
ISBN 7-201-04101-0

I. 非… II. 朱、毕… III. 数学课-初中-教学参考资料 IV. G634  
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 028528 号

# 非常讲解 初三代数教材全解全析

主编 朱占奎 毕纯霞

天津人民出版社出版

出版人: 刘晓津

(天津市张自忠路 189 号 邮政编码: 300020)

北京市昌平长城印刷厂印刷 新华书店发行

\*

2004 年 5 月第 3 版 2004 年 5 月第 1 次印刷

890×1240 毫米 32 开本 14.75 印张

字数:484 千字 印数:1-20,000

定价:17.00 元

ISBN 7-201-04101-0

## 再版前言

国家基础教育课程改革启动至今已有三年,义务教育《课程标准》的实施范围正在逐步扩大,新的教育理念被越来越多的教育工作者和社会人士所接受,我国基础教育事业正经历着一次深刻的变革。这个变革的核心,对于教师来说,就是改变角色定位;对于学生来说,就是变革学习方式。本着这样的精神,同时为了适应课程改革深入发展的需要,今年再版时,我们在广泛征求专家、教师、学生和家長意见的基础上,作了较大程度的修改。

本书按照源于新教材又高于新教材的原则进行修改,对它的各个知识点以及能力要求进行全面的讲解,分析和指导,每节设如下栏目:**大纲考纲要求、教材解析、方法指引、巩固练习**等。其中教材解析为本书各节的重点,它在新教材的基础上,对章节的各知识点逐个进行详细的讲解和分析,着重知识和技能的拓展与培养和规律方法的揭示与总结,通过典型常规题,创新开放题及实践应用题等让学生对新教材的知识点进行探究和体验,并按以下三点进行设计:

1.对典型例题进行全面剖析,并设以下四个栏目:①**思路点拨**:点拨解题思路,提供解题策略。②**解答**:按照解题方案,给出规范解答。③**误点剖析**:指出解题常见错误,并点击错误产生的原因,进行防错提示。④**评注**:总结解题过程的注意点,剖析解题技巧的关键处。开设以上小栏目,其目的是,开启学生思路,着眼规律方法总结。

2.试解变式题(或相关题)。从不同角度提出与上述典型题相关或相近的问题,供学生在练习中通过模仿,达到融会贯通,举一反三的目的。

3.每道典型题都针对教材中某一知识点,旨在通过对例题的探索,获得对教材相关内容的实践与体验。

作者在编写过程中,力求讲解教材全部内容,信息量大,做到精讲精析精选,讲解透彻且具有深度,辨析清晰细致,讲解分析方法新颖独到,与众不同,别具一格,不落窠臼。

《非常讲解》系列丛书讲解细致,分析透彻,层次分明,条理清晰,内容丰富,对掌握教材重点、难点、疑点以及各知识点,对培养并提高理解、分析、判断、领悟、思考以及解决问题能力具有极强的实用性和指导性,是朗曼中心继《中学1+1》系列丛书后又一成功力作,两者堪称姊妹篇。其侧重点各不相同,前者偏重于对教材的讲解与分析,后者偏重于对重点及疑难问题的讲解与测试,它们既是一个整体,又互为补充,相得益彰。

学习《课程标准》,更新教育观念,有一个不断深入的过程;课程改革的实施,也需要不断地探索和积累。本书此次修订正是学习《课程标准》,改革教学内容和方法的一个具体的落实。希望我们的努力能给老师和同学们的教学活动带来切实而有效的帮助,虽然我们兢兢业业,勉力为之,但因水平有限,难免有错漏之处,诚望批评指正,以利再版时修改和完善。

凡需要本书以及本系列其他图书的读者可与本中心联系。联系电话:010-64925885,64925887,64943723,64948723;通信地址:北京市朝阳区亚运村邮局89号信箱;邮编:100101。

宋伯涛

2004年5月于北师大

# 目录 CONTENTS

<b>第十二章 一元二次方程</b>	1	<b>12.5 二次三项式的</b>	
<b>一 一元二次方程</b>	1	<b>因式分解(用公式法)</b>	59
<b>12.1 用公式解一元二次方程</b>	1	大纲考纲要求	60
大纲考纲要求	1	教材解析	60
教材解析	1	方法指引	64
方法指引	11	巩固练习	66
巩固练习	12	巩固练习解答	68
巩固练习解答	13	<b>12.6 一元二次方程的应用</b>	69
<b>12.2 用因式分解法</b>		大纲考纲要求	69
<b>解一元二次方程</b>	14	教材解析	69
大纲考纲要求	14	方法指引	75
教材解析	15	巩固练习	78
方法指引	16	巩固练习解答	80
巩固练习	23	<b>12.7 可化为一元二次方程的</b>	
巩固练习解答	25	<b>分式方程</b>	82
<b>12.3 一元二次方程的</b>		大纲考纲要求	82
<b>根的判别式</b>	26	教材解析	82
大纲考纲要求	26	方法指引	93
教材解析	26	巩固练习	95
方法指引	31	巩固练习解答	98
巩固练习	37	<b>二 简单的二元二次方程组</b>	100
巩固练习解答	38	<b>12.8 由一个二元一次方程和</b>	
<b>*12.4 一元二次方程的</b>		<b>一个二元二次方程组成</b>	
<b>根与系数的关系</b>	39	<b>的方程组</b>	100
大纲考纲要求	39	大纲考纲要求	100
教材解析	39	教材解析	100
方法指引	51	方法指引	105
巩固练习	56	巩固练习	112
巩固练习解答	58	巩固练习解答	115

<b>*12.9</b> 由一个二元二次方程 和一个可以分解为两个二元一次方程的方程组成的方程组	116
大纲考纲要求	116
教材解析	116
方法指引	120
巩固练习	125
巩固练习解答	127
<b>本章小结</b>	128
知识网络梳理	129
公式定理	129
思想方法	130
注意事项	130
解题方法指引	131
<b>本章测试</b>	139
<b>本章测试解答</b>	142

### 第十三章 函数及其图象 145

<b>13.1</b> 平面直角坐标系	145
大纲考纲要求	145
教材解析	146
方法指引	154
巩固练习	158
巩固练习解答	160
<b>13.2</b> 函数	162
大纲考纲要求	163
教材解析	163
方法指引	170
巩固练习	174
巩固练习解答	177
<b>13.3</b> 函数的图象	179
大纲考纲要求	179
教材解析	179

方法指引	184
巩固练习	188
巩固练习解答	191
<b>13.4</b> 一次函数	192
大纲考纲要求	192
教材解析	192
方法指引	197
巩固练习	201
巩固练习解答	204
<b>13.5</b> 一次函数的图象和性质	205
大纲考纲要求	205
教材解析	205
方法指引	218
巩固练习	237
巩固练习解答	241
<b>13.6</b> 二次函数 $y=ax^2$ 的图象	244
大纲考纲要求	244
教材解析	244
方法指引	251
巩固练习	254
巩固练习解答	257
<b>13.7</b> 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象	258
大纲考纲要求	259
教材解析	259
方法指引	280
巩固练习	296
巩固练习解答	302
<b>13.8</b> 反比例函数及其图象	307
大纲考纲要求	307
教材解析	307
方法指引	315
巩固练习	325
巩固练习解答	329

本章小结	330
知识网络梳理	330
思想方法	333
注意事项	333
解题方法指引	334
本章测试	355
本章测试解答	359

## 第十四章 统计初步 366

<b>14.1 平均数</b>	366
大纲考纲要求	366
教材解析	367
方法指引	371
巩固练习	372
巩固练习解答	375
<b>14.2 众数与中位数</b>	377
大纲考纲要求	377
教材解析	377
方法指引	380
巩固练习	381
巩固练习解答	384
<b>14.3 方差</b>	385
大纲考纲要求	385
教材解析	385
方法指引	392
巩固练习	394
巩固练习解答	397
<b>14.4 用计算器求平均数、标准差与方差</b>	399
大纲考纲要求	399
教材解析	400
<b>14.5 频率分布</b>	402
大纲考纲要求	402
教材解析	402

巩固练习	410
巩固练习解答	414
<b>14.6 实习作业</b>	416
大纲考纲要求	416
教材解析	416
巩固练习	418
本章小结	418
知识网络梳理	418
思想方法	419
注意事项	419
解题方法指引	420
本章测试	427
本章测试解答	432

## 教科书习题参考答案 434





## 第十二章 一元二次方程

本章内容包括一元二次方程及其解法；一元二次方程根的判别式及根与系数的关系；用一元二次方程解应用题；可化为一元二次方程的分式方程的解法；简单的二元二次方程组的解法等。

一元二次方程概念与解法是学习的重点。要熟练掌握解一元二次方程的方法：直接开方法、配方法、求根公式法及因式分解法；还要熟练掌握一元二次方程根的判别式及根与系数的关系；会应用一元二次方程解决一些实际问题，用求根公式解二次三项式，在熟练解分式方程的基础上还要了解增根产生的原因，会对其中增根进行检验。熟练掌握用加减消元法、代入消元法、因式分解法、换元法解简单的二元二次方程组。

### 一 一元二次方程

#### 12.1 用公式解一元二次方程

在前面的学习中，我们已经学过一元一次方程的解法及其应用。在实际生活中，我们还常遇到所列出的方程是一元二次方程的情形。这就需要我们掌握一元二次方程的解法才能解决相应的实际问题。从本节开始，我们将逐步研究一元二次方程的各种解法，并要求灵活运用各种解法解决实际问题。



#### 大纲考纲要求

1. 理解整式方程、一元二次方程的定义以及一元二次方程的一般形式，会把非一般形式的一元二次方程转化为一般形式，并能正确写出一般形式中的二次项系数、一次项系数、常数项，搞清各项与各项系数之间的区别与联系。
2. 会推导一元二次方程的求根公式。
3. 能灵活运用直接开平方法、配方法和公式法解一元二次方程。



#### 教材解析

##### 1. 一元二次方程定义

###### (1) 整式方程定义

如果方程的两边都是关于未知数的整式，那么这样的方程叫做整式方程。

###### (2) 一元二次方程定义

经过化简后的整式方程中，如果只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为



2, 这样的整式方程叫做一元二次方程.

**【例 1】** 下列方程中是一元二次方程的为 ( )

(1)  $ax^2 = bx$

(2)  $-\frac{3}{2}x^2 - 2x = \frac{1}{3}$

(3)  $(x-2)(2x-1)=0$

(4)  $x^2 + \frac{1}{x} - 2 = 0$

(5)  $y^2 - \sqrt{1-y} = 1$

(6)  $(x-3)(x+1) = x^2 - 8$ .

A. (1)(2)(4)(6).

B. (2).

C. (1)(2)(3)(4)(5)(6).

D. (2)(3).

### 思路点拨

紧扣定义判断: ①是否整式方程; ②是否只含有一个未知数; ③未知数的最高次数是否为 2. 只有同时满足以上三个条件的方程, 才是一元二次方程.

解: (1) 当字母  $a$  为 0 时,  $ax^2 = 0$ , 方程中未知数的最高次数不为 2, 所以(1)不是;

(2) 符合一元二次方程的三个条件, 所以(2)是;

(3) 去括号后容易看出符合一元二次方程的三个条件, 所以(3)是;

(4) 此方程是分式方程, 不是整式方程, 所以(4)不是;

(5) 此方程中, 根号下含有未知数, 不是整式方程, 所以(5)不是;

(6) 此方程化简整理后, 未知数的最高次数不是 2, 所以(6)不是;

综上, 本题应选 D.

### 误区剖析

若对一元二次方程的三要素, 不充分认识, 就可能出错. 比如: 方程(1)、(4)、(5)、(6)就可能被误认为是一元二次方程. 判断时, 不能只看方程的表面现象, 要抓住“三要素”这个本质. 特别是(1)、(6). 对于(1)要考虑  $x^2$  的系数  $a$  的取值范围. 对于(6)要化简整理后再根据定义判断.

评注: 判断一个方程是否为一元二次方程, 一般都要先将方程化简整理, 然后再分析是否符合一元二次方程的三要素, 这三要素缺一不可.

### 试解相关题

1-1 下列各方程中属于一元二次方程的是 ( )

(1)  $\frac{y}{4} - y^2 = 1$  (2)  $t^2 = 2$  (3)  $\frac{1}{x^2} = 3$  (4)  $\sqrt{x^2 - x} = 0$

(5)  $x^3 - x^2 = 5$  (6)  $(x^2 + 1)^2 + x - 2 = 0$

A. (1)(2)(3).

B. (2)(3)(4).

C. (1)(2)(6).

D. (1)(2).

答案: 选 D.

### 2. 一元二次方程的一般形式

(1) 方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的形式, 叫做一元二次方程的一般形式;

(2) 一元二次方程的一般形式  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  中,  $ax^2$  叫二次项,  $bx$  叫

$$(x-1)^2 - 3x^2 + 6x = 2x + k + 1$$

$$(x-1)^2 - 3x^2 + 6x - 2x = k + 1$$

$$(x-2)^2 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$$

非常讲解

一次项,  $c$  叫常数项,  $a$  叫二次项系数,  $b$  叫一次项系数,  $a$  是不等于零的实数,  $b$  和  $c$  是任何实数.

**【例2】** 把方程  $(x-1)^2 - 3x(x-2) = 2(x+2) + 1$  化成一般形式, 并写出它的二次项系数, 一次项系数和常数项.

### 思路点拨

正确应用各种运算法则, 将方程中的同类项合并成一项, 通过移项把方程右边变为 0, 并把方程左边按字母  $x$  降幂排列, 再写出各项的系数.

解: 去括号, 得  $x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 6x = 2x + 4 + 1$ .

移项, 合并同类项得方程的一般形式:  $-2x^2 + 2x - 4 = 0$ .

即  $x^2 - x + 2 = 0$ .

二次项系数是 1, 一次项系数为 -1, 常数项为 2.

### 误区剖析

通常在将方程化为  $-2x^2 + 2x - 4 = 0$  后, 各项含有公因式, 需要进一步化简得  $x^2 - x + 2 = 0$ , 作为所求的一般形式, 这样可为后面学习一元二次方程的解法打下基础. 本题的一次项系数不能写成“1”, 而是“-1”.

评注: ①一元二次方程一般形式的特点是方程左边是按未知数降幂排列的整式, 右边是 0, 并且左边在通常情况下, 各项不含有公因式. ②在写出各项系数时, 必须带上各项前面的符号.

### 试解相关题

2-1 把下列方程先化成一元二次方程的一般形式, 再写出它的二次项系数、一次项系数和常数项:

(1)  $4x^2 + 6x = 9x^2 - 15x + 4$ ;

(2)  $(3x-1)(x+2) = -x^2 + 5x + 1$ ;

(3)  $(2t+3)^2 - 2(t-5)^2 = -41$ .

答案:

题号	一般形式	二次项系数	一次项系数	常数项
(1)	$5x^2 - 21x + 4 = 0$	5	-21	4
(2)	$4x^2 - 3 = 0$	4	0	-3
(3)	$t^2 + 16t = 0$	1	16	0

**【例3】** 当  $m$  为什么数时, 关于  $x$  的方程  $(m-2)x^2 - mx + 2 = m - x^2$  是关于  $x$  的一元二次方程? 写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

### 思路点拨

先将方程看作关于未知数  $x$  的一元二次方程, 把它化为一般形式, 再由二次项系数不为 0, 求出  $m$  的取值, 然后写出方程各项的系数.

解: 原方程化简整理, 得  $(m-1)x^2 - mx + 2 - m = 0$ .

由二次项系数  $m-1 \neq 0$  得:  $m \neq 1$ .



∴ 当  $m \neq 1$  时, 原方程为一元二次方程.

二次项系数为  $m-1$ , 一次项系数为  $-m$ , 常数项为  $2-m$ .

### 误区剖析

本题易误认为当  $m \neq 2$  时, 原方程为一元二次方程, 这是没有先把原方程化为一般形式就求  $m$  范围而造成的错误. 本题还易出现把常数项写成 2 的错误. 对含字母系数的方程概念理解不透. 在方程中,  $x$  是未知数,  $m$  应看作已知数, 所以常数项应是  $2-m$ .

评注: (1) 对含字母系数的一元二次方程, 应首先搞清已知数是什么, 未知数是什么, 然后化为一般形式. (2) 由一元二次方程定义, 可求出使原方程为一元二次方程的待定系数的取值范围.

### 试解相关题

3-1 当  $a$  为什么值时, 方程  $(a-3)x^2 - 3ax = ax - 2x^2 + 3a$  为一元二次方程? 写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

3-2 写出下列方程中的二次项系数、一次项系数和常数项:

(1)  $(p-q)x^2 + q \cdot x - p = q - px + x^2$  ( $p-q-1 \neq 0$ );

(2)  $mx - nx^2 - x^2 = 2m - 2nx$  ( $n+1 \neq 0$ ).

答案:

题号		二次项系数	一次项系数	常数项
3-1	$a \neq 1$ 时, 为一元二次方程	$a-1$	$-4a$	$-3a$
3-2(1)		$p-q-1$	$q+p$	$-p-q$
3-2(2)		$n+1$	$-m-2n$	$2m$

### 3. 直接开平方法

(1) 定义: 利用平方根定义直接开平方求一元二次方程的根的方法叫直接开平方法.

(2) 直接开平方法的理论依据是平方根的定义. 直接开平方法适用于解形如  $(x-a)^2 = b$  ( $b \geq 0$ ) 的一元二次方程. 根据平方根的定义可知,  $x-a$  是  $b$  的平方根. 当  $b \geq 0$  时,  $x-a = \pm\sqrt{b}$ ,  $x = a \pm \sqrt{b}$ ; 当  $b < 0$  时, 方程没有实数根.

【例 4】解方程  $(x-2)^2 = 5$ .

### 思路点拨

根据平方根的定义,  $x-2$  就是 5 的平方根. 因此, 只要运用直接开平方法求出  $x-2$  的值, 再求出  $x$ .

解: ∵  $x-2$  是 5 的平方根.

$$\therefore x-2 = \pm\sqrt{5}.$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{5}.$$



$$\therefore x_1 = 2 + \sqrt{5}, x_2 = 2 - \sqrt{5}.$$

### 误点剖析

5 的平方根应该有两个,它们互为相反数,不能漏掉  $x-2 = -\sqrt{5}$  这种情况.

**评注:**用直接开平方法求一元二次方程的根,一定要正确运用平方根的性质,即正数的平方根有两个,它们互为相反数,零的平方根是零,负数没有平方根.

### 试解相关题

4-1 用直接开平方法解下列方程:

$$(1) x^2 = 225; \quad (2) y^2 - 144 = 0.$$

4-2 解下列方程:

$$(1) (x-1)^2 = 9; \quad (2) (2x+1)^2 = 3; \quad (3) (6x-1)^2 - 25 = 0.$$

**答案:** 4-1 (1)  $x_1 = 15, x_2 = -15$

$$(2) y_1 = 12, y_2 = -12$$

$$4-2 (1) x_1 = 4, x_2 = -2$$

$$(2) x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$(3) x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{3}$$

**【例 5】**解方程  $81(x-2)^2 = 16$ .

### 思路点拨

先把方程转化为  $(x-a)^2 = b$  的形式,再运用直接开平方法求出方程的根.

**解:**原方程可化为  $(x-2)^2 = \frac{16}{81}$ ,

$$\therefore x-2 = \pm \frac{4}{9}, x = 2 \pm \frac{4}{9}.$$

$$\therefore x_1 = \frac{22}{9}, x_2 = \frac{14}{9}.$$

### 误点剖析

若不先把方程转化为  $(x-a)^2 = b$  的形式,而将左边写成完全平方形式,再直接开平方也是可以的,但要注意不能出现  $81(x-2) = \pm 4$  的错误.

**评注:**解形如  $c(x+a)^2 = d$  的一元二次方程,一般情况下,总是先把方程转化为  $(x+a)^2 = b$  的形式,再判断  $b$  的符号,若  $b \geq 0$ ,则运用直接开平方法求出方程的解.若  $b < 0$ ,因为负数没有平方根,所以原方程没有实数根.

### 试解相关题

5-1 用直接开平方法解下列方程:

$$(1) 5(2y-1)^2 = 180; \quad (2) \frac{1}{4}(3x+1)^2 = 64;$$

$$(3) 6(x+2)^2 = 1; \quad (4) (ax-c)^2 = b(b \geq 0, a \neq 0).$$



答案: (1)  $y_1 = \frac{7}{2}, y_2 = -\frac{5}{2}$

(2)  $x_1 = 5, x_2 = -\frac{17}{3}$

(3)  $x_1 = -2 + \frac{\sqrt{6}}{6}, x_2 = -2 - \frac{\sqrt{6}}{6}$

(4)  $x_1 = \frac{c+\sqrt{b}}{a}, x_2 = \frac{c-\sqrt{b}}{a}$

#### 4. 配方法

(1) 定义: 先把方程中的常数项移到方程右边, 再把左边配成完全平方式, 如果右边是非负数, 就可以用直接开平方法求出一元二次方程的根. 这种解一元二次方程的方法叫做配方法.

(2) 配方法是数学解题中的一种重要方法, 它不仅在解一元二次方程方面有所应用, 而且在其它数学问题方面的运用也极为广泛.

(3) 用配方法解一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的一般步骤:

① 先把二次项系数化为 1; 方程左右两边同时除以二次项的系数;

② 移项: 把常数项移到方程右边;

③ 配方: 方程左右两边同时加上一次项系数一半的平方, 把原方程化成  $(x+m)^2 = n$  的形式;

④ 当  $n \geq 0$  时, 用直接开平方法解变形后的方程.

【例 6】用配方法解方程  $x^2 - 3x - 2 = 0$ .

#### 思路点拨

二次项系数是 1 时, 只要先把常数项移到右边, 然后左、右两边同时加上一次项系数一半的平方把左边配成完全平方, 再求出方程的解.

解: 移项, 得  $x^2 - 3x = 2$ .

配方, 得  $x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$ ,

即  $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$ .

$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$ ,

$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$ ,

$\therefore x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$ .

#### 误区剖析

进行配方时, 方程左右两边要同时加上一次项系数一半的平方, 一次项系数的符号决定了左边的完全平方式中是两数差的平方还是两数和的平方. 本题左边易



出现  $(x + \frac{3}{2})^2$  的错误, 在变形中易出现  $x^2 - 3x + (\frac{3}{2})^2 = 2$ .

$\therefore (x - \frac{3}{2})^2 = 2$  的错误.

评注: 凡二次项系数是 1 的一元二次方程, 只要移项、配方、求解三步就可以.

### 试解相关题

6-1 填空

$$(1) x^2 + 8x + (4^2) = (x + 4)^2.$$

$$(2) x^2 - \frac{2}{3}x + (\frac{1}{3})^2 = (x - \frac{1}{3})^2.$$

$$(3) y^2 - \frac{b}{a}y + (\frac{b}{2a})^2 = (y - \frac{b}{2a})^2.$$

6-2 用配方法解下列方程:

$$(1) x^2 + x - 3 = 0; \quad (2) x^2 - 6x + 1 = 0.$$

答案: 6-1 (1) 16, 4 (2)  $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}$  (3)  $\frac{b^2}{4a^2}, \frac{b}{2a}$

$$6-2 (1) x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}, x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$(2) x_1 = 3 + 2\sqrt{2}, x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

【例 7】用配方法解方程  $3x^2 - 6x - 1 = 0$ .

### 思路点拨

先化二次项系数为 1, 再移项、配方、求解.

解: 化二次项系数为 1, 得

$$x^2 - 2x - \frac{1}{3} = 0.$$

移项, 得  $x^2 - 2x = \frac{1}{3}$ .

配方, 得  $x^2 - 2x + 1^2 = \frac{1}{3} + 1^2$ ,

$$(x-1)^2 = \frac{4}{3}.$$

$$x-1 = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore x = 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore x_1 = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, x_2 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

### 误区剖析

化二次项系数为 1 时, 方程中的各项都要除以 3, 本题易出现常数项 -1 漏除

$$3x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$3x^2 - 6x + 3^2 = 10$$



以 3 的错误.

评注:用配方法解一元二次方程时,化二次项系数为 1 是关键的第一步,在进行配方步骤时,必须方程左右两边同时加上一次项系数一半的平方.

### 试解相关题

7-1 用配方法解下列方程:

$$(1) 2x^2 - 4 = 5x; \quad (2) 3t^2 + 12t - 2 = 0.$$

答案: (1)  $x_1 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4}, x_2 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4}$

$$(2) t_1 = -2 + \frac{1}{3}\sqrt{42}, t_2 = -2 - \frac{1}{3}\sqrt{42}$$

### 5. 公式法

(1) 用求根公式求出一元二次方程的根的方法,叫做公式法.这也是解一元二次方程的一般方法.

(2) 一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的求根公式:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} (b^2 - 4ac \geq 0).$$

(3) 一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  的求根公式的推导:(就是用配方法解此方程)

解:  $\because a \neq 0,$

$\therefore$  两边可都除以  $a$ , 得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

移项, 得  $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$

配方, 得  $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$

即  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$

$\because a \neq 0,$

$\therefore 4a^2 > 0.$

$\therefore$  当  $b^2 - 4ac \geq 0$  时,  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  是非负数.

根据平方根的定义, 得

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

即  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$





(4)用公式法解一元二次方程的一般步骤:

①把一元二次方程化为一般形式;

②确定  $a, b, c$  的值;

③求出  $b^2 - 4ac$  的值;

④判断  $b^2 - 4ac$  的符号,当  $b^2 - 4ac \geq 0$  时,则把  $a, b, c$  及  $b^2 - 4ac$  的值代入求根公式,求出  $x_1, x_2$ . 当  $b^2 - 4ac < 0$  时,则原方程没有实数根.

**【例 8】** 用公式法解方程:

$$(1) x^2 - 3x = 5;$$

$$(2) x^2 + 2 = 4\sqrt{2}x;$$

$$(3) 3x^2 + 2x + 1 = 0;$$

$$(4) t^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t + \frac{1}{8} = 0.$$



### 思路点拨

方程(1)、(2)应先移项,将方程化为一般形式,再确定  $a, b, c$  的值,并求出  $b^2 - 4ac$  的值,然后代入求根公式,即可求出方程的解. 方程(3)是一般式,可直接确定  $a, b, c$  的值,然后按公式法的一般步骤求解. 方程(4)先将系数中的分母化去,再解方程较简便.

**解:**(1)将原方程化为一般形式,得

$$x^2 - 3x - 5 = 0.$$

$$\therefore a = 1, b = -3, c = -5.$$

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 9 + 20 = 29 > 0.$$

$$\therefore x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{29}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

$$\therefore x_1 = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{29}}{2};$$

(2)将原方程化为一般形式,得

$$x^2 - 4\sqrt{2}x + 2 = 0.$$

$$\therefore a = 1, b = -4\sqrt{2}, c = 2.$$

$$\therefore b^2 - 4ac = (-4\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2 = 32 - 8 = 24 > 0.$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{-(-4\sqrt{2}) \pm \sqrt{24}}{2 \times 1} = \frac{4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{6}}{2} \\ &= 2\sqrt{2} \pm \sqrt{6}. \end{aligned}$$

$$\therefore x_1 = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}, x_2 = 2\sqrt{2} - \sqrt{6};$$

$$(3) \therefore a = 3, b = 2, c = 1.$$

$$b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times 1 = -8 < 0.$$

$\therefore$  原方程没有实数根.

$$(4)将原方程分母化去得  $8t^2 - 4\sqrt{2}t + 1 = 0.$$$

$$\therefore a = 8, b = -4\sqrt{2}, c = 1.$$