

鐵路員工技術手冊第一卷第一冊

数 学

(下)

苏联鐵路員工技術手冊編纂委員會編

人 民 鐵 道 出 版 社



目 錄

上册 数学表

苏联标准 573 所載数学符号 (主要的)	1
幂, 根, 自然对数, 圓周長, 圓面積和倒数表	6
由 1 到 1000 的整数的常用对数的尾数 (即定值部分) 表	47
三角函数的真数值表	86
由度制到徑制 (即弧度制) 的变换表	131
由徑制 (即弧度制) 到度制的变换表	131
关于單位半徑的圓的弧長和弦長与弓形的高和面積表	132
指数函数和双曲函数表	136
貝塞尔函数表	140
某些常量表	142
平面圖形的周界長和面積表	144
物体的表面面積和体積表	151

下册 数学

算術和代数	159
几何学	206
三角学	226
微分学	249
积分学	269
無窮級数	320
微分方程	344
变分法	378
解析几何学	383
微分几何学	421
矢量分析	454
复变数函数的理論	468
或是率理論与最小二乘法	492
經驗公式	513
近似值計算	520
代数方程与超越方程的近似解法	530
有限差分学与內插法	549
数值分析法与作圖分析法	573
共轭圖 (即諾模圖)	594

数 学

算 術 和 代 数

代数运算和它們的性質

六种代数运算的表示法和相应的術語

运 算	已 知 数 值		結 果
	a	b	c
加 法 $a+b=c$	被加数 (或項)	被加数 (或項)	和
減 法 $a-b=c$	被減数	減 数	差
乘 法 $a \cdot b=c$	被乘数 (因子)	乘数 (因子)	(乘) 積
除 法 $a:b=c$	被除数	除 数	商
(乘) 幂 (或乘方) $a^b=c$	幂的底	幂的指数	幂
开 方 $\sqrt[b]{a}=c$	被开方数 (或根号下的数)	根指数	根

某些运算的結果与执行运算的次序有关。在沒有括弧的情形下，應該先進行乘方和开方，然后作乘法和除法，最后作加法和減法。通常是用括弧把应当較先進行的运算括在括弧內。

除了簡單的 (圓) 括弧以外，也利用方括弧 [] 和花括弧 { }。包括各种括弧的式子的計算依下列次序進行：开始計算所

有圓括弧里邊的運算，然後——計算方括弧里邊的，再則——計算花括弧里邊的，而最後完成遺留下的運算。

加法運算有下列的性質：

交換律（易位性）

$$a + b = b + a;$$

結合律（組合性）

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$$

乘法運算有下列的性質：

交換律

$$a \cdot b = b \cdot a;$$

結合律

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c;$$

分配律（分佈性）

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

除法運算具有下列的性質：

$$m : (abc) = [(m : a) : b] : c;$$

$$(abc) : m = (a : m)bc;$$

$$(am) : (bm) = a : b; (a : m) : (b : m) = a : b.$$

數的可約性

用一個數除已知數而無剩餘時，則此數叫作已知數的約數（或因子，在算術中因子亦稱因數）。

一個數，除掉1和它自己以外沒有別的任何約數時，叫做質數。質數共有無窮多個；由1到1013間的質數列於表1。

除掉1和自己以外還有別的約數的數，叫做合數或合成數。

每一個合數可以用唯一的形式表示為質因子的積（分解為質因子），只要把它的質因子按照質數的次序排列：2，3，5，7，11等等。

一個數如果同時是幾個數的約數，則此數叫做這些數的公約

数。

由 1 到 1013 間的質数

表 1.

2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	213	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	1009
59	139	233	337	439	557	653	769	883	1013

公約数中的最大者叫做**最大公約数**。

几个已知数的最大公約数的求法，是先把每一个已知数分解为質因子，再把个个已知数都包含的这一些質因子連乘起来即得。

沒有公約数（除掉 1）的諸数叫作是**互質的**。

如果数 a 能为另一数 b 所整除，則 a 叫做 b 的**倍数**。

一个数如果同时是几个已知数的倍数，則此数叫作諸已知数的**公倍数**。

几个已知数的公倍数中的最小的一个叫做这些已知数的**最小公倍数**。为求几个已知数的最小公倍数，應該先把諸已知数分解为質因子，再把其中是一个或多个已知数的約数的各質因子連乘起来即得。

数的可約性的判別法

約 數 n	可以用 n 除尽的数所具有的性质:
2	末位为2, 4, 6, 8, 0 (偶数);
3	各位数字之和可用3除尽;
4	末尾为两个零, 或它的最后两位数字所成的数可用4除尽;
5	末位为零或5;
6	同时可用2和3除尽;
7	由它所含十的个数 (即将它的个位数字划去后所成之数, 亦即它的十位以前之数) 与它的个位数字的两倍所得的差是可以用7除尽或等於零;
8	末尾为三个零, 或它的最后三位数字所成的数可用8除尽;
9	各位数字之和可用9除尽;
10	末尾为零;
11	奇数位置 (自右端开始) 的数字之和与偶数位置的数字之和的差是等於零或可用11除尽;
25	末尾为两个零, 或其后两位数字所成的数可用25除尽;
100	末尾为两个零;
1000	末尾为三个零。

簡 分 数

把一个单位分成若干等分 (份) 这样得出来的一份或若干份叫做分数。指示单位被分为多少等分的数叫做分数的分母, 指示取多少这样的份的数叫做分数的分子。分数的表示法: $\frac{a}{b}$, 此处 a 是分子, b 是分母。

当分子小于分母时 ($a < b$) 这分数叫作真分数; 当分子大于或等於分母时 ($a \geq b$) 这分数叫做假分数。

整数与真分数的和合叫做带分数。

用分母除分子得出整数部分之后, 假分数可以表示为带分数, 由这除法所得的余数就是真分数部分的分子:

$$\frac{a}{b} = n + \frac{c}{b},$$

此处 n ——整数部分, c ——用 b 除 a 所得的余数。

为了把帶分数化为假分数，先用分母乘整数部分，然后加上分数部分的分子，此結果就给出这假分数的分子，其分母仍是原来的帶分数的分母：

$$n + \frac{a}{b} = \frac{n \cdot b + a}{b}。$$

如果用同一个数除（或乘）分子和分母，分数之值不变：

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}。$$

前一个公式是用来作分数的約分的（ C 是 a 和 b 数的公約数），而后一个公式是用来作几个分数的通分的（即化每一个分数使其獲得公分母）。

几个分数的分母的最小公倍数叫做这些分数的公分母。为了把諸分数 $\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2} \dots$ 通分，应当把它们中每一个分数的分子和分母乘上一个与该分数对应的补充因子，此补充因子就是該分数的分母除公分母的商。

簡分数的运算

在作分数的运算时，整数也应当视为是分母等於 1 的分数。

作加法或減法时，对具有相同分母的分数只需把分子相加或相減，而分母同前。如果各分数的分母不同，則首先应当化成公分母（即通分）：

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}。$$

对帶分数作加法或減法时，整数部分与分数部分可以分別相加或相減。

諸分数相乘仍为分数，其分子等於諸分数的分子之積，而分母为諸分数的分母之積：

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}。$$

如果諸因子中（即這些分數中）有帶分數，則應當先把它化為假分數。

用分數除時，只需用除數的倒數來乘被除數：

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

如同在乘法的情形一樣，帶分數應當預先化為假分數。

小 數

小數——是分母為10的整數次方（10，100，1000和一般的為 10^n ）的分數。在寫小數時，先寫整數部份，然後寫小數點，再在點的后邊寫小數部份，小數部分的第一位數字表示含有單位的十分之一個數，第二位——百分之一的個數，第三位——千分之一的個數，等等。小數点后邊的數字叫作**小數數字**。如果某小數不包含整數部份，則小數點之前寫一個零。

如果在小數的右端之后添寫任意多個零或者棄去在其右尾處的連接的若干個零（在小數點之后的），該小數之值不變。

如果把小數點向右（左）移一位、二位、三位等等，則該小數就增大（減小）到10倍，100倍，1000倍等等。

對小數的**加法**和**減法**也按對整數的規律運算，這時把加數或減數寫在被加數或被減數的下面，使它們的個位對個位而小數數字的**第一位對第一位**等等。

小數的**乘法**也是按照整數的乘法規律去做。在乘積中定小數點的位置時應該使點后面的位數等於兩個因子中的小數點后面位數之和。

小數的**除法**應按下列方法進行：在除數中棄去小數點而同時在被除數中將小數點向右移，移的位數須恰與除數中原有的小數（數字的）位數相等；然後首先求出整數商，並在其后放入小數點，再進而求出商中的十分之一位（即其小數數字的第一位），百分之一位，千分之一位，等等：

$$125.469 : 2.7 = 1254.69 : 27 = 46.47。$$

为了要把簡分数化为小数，应当按小数除法的規律用分母除分子。

在作小数除法或化簡分数为小数的时候，可能得出这样的結果，即所得的商中的小数数字自某位开始而有無限次的週期性的重复，这样的小数叫**循环小数**。

如果自第一位有效数字起就开始重复，則該小数叫作**純循环小数**；否則叫作**混循环小数**。

为了把眞純循环小数（譯者註：整数部分为零的循环小数）化为簡分数，应当用它的一个週期（即一个循环節）作为分子，至於分母則看一个週期中有多少位数字就在分母中連寫多少个9，再看小数点与开始循环之間有多少位就在这些9之后寫上多个零。

例：

$$0.1212\cdots = 0.(12) = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}。$$

为了把眞混循环小数化为簡分数，应当把第二个循环以前的数与第一个循环以前的数之差作分子，而寫分母为99...900...0其中9的个数与一个循环節中的位数相同，而0的个数与由小数点到开始循环之間的位数相同。

例：

$$5.3222\cdots = 5.3(2) = 5 \frac{32-3}{90} = 5 \frac{29}{90}；$$

$$23.17236236\cdots = 23.17(236) = 23 \frac{17236-17}{99900} = 23 \frac{17219}{99900}。$$

百 分 法

一个数的百分之一部分取作單位时叫作該数的**百分之一**。百分之一这个單位用符号%表示。

一个数 a 用另一个数 b 的百分之一表示的式子为 $\frac{a}{b} \cdot 100\%$

（就是說 $a : b = \frac{\left(\frac{a}{b} \cdot 100\right)}{100}$ ，这分数叫做百分数或百分率）。

如果一个数 a 为另一个数 b 的 $p\%$ ，則

$$a = \frac{bp}{100} \text{ 而 } b = \frac{100a}{p}。$$

某数量 a 在一年中的变化，用百分数表示时，叫作它的年殖率或年率。如果每一年的增量总不影响下一年的增量，而在 t 年中数量 a 在年率为 $p\%$ 的情况下变为 A ，則可用下列等式去定 A （單殖公式，也叫做單利公式）：

$$A = a \left(1 + \frac{pt}{100} \right)。$$

在 t 年中数量 a 在复殖年率为 $p\%$ 的情况下变为数量 A 时，須用下列等式去定 A （复殖公式，也叫做复利公式）：

$$A = a \left(1 + \frac{p}{100} \right)^t。$$

如果增量 $p\%$ 是在一年中分作 m 次來加算（每次經過的时间），則

$$A = a \left(1 + \frac{p}{100m} \right)^{mt}。$$

比 和 比 例

用数 b 除数 a 所得之商叫作 a 对 b 之比（几何的）：

$$a : b \text{ 或 } \frac{a}{b}，$$

此时被除数 a 叫作比的前項而除数 b 叫作比的后項。

两个比的等式叫作比例：

$$a : b = c : d$$

或

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}，$$

此时 a 和 d 叫作比例的外項，而 b 和 c 叫作比例的內項。

比例的基本性質：比例的外項乘積等於其內項乘積。

$$ad = bc。$$

設已知比例的三項，則可求得未知的第四項 x ：如果 x 是外項，則它等於內項之積被已知的外項除，如果 x 是內項，則它等於外項之積被已知的內項除，即，如果已知比例

$$x : b = c : d \text{ 則 } x = \frac{bc}{d};$$

而如果已知 $a : x = c : d$ 則 $x = \frac{ad}{c}$ 。

在連比例（即具有兩個相等外項或相等內項的比例）

$$x : a = b : x \text{ 或 } a : x = x : b$$

中以下的等式成立：

$$x = \sqrt{ab}。$$

當兩個互相依賴的數量的比值保持不變時，則說它們成正比。它們的這個比值叫作比例係數。

如果有兩個互相依賴着的數量，而且當其中的一個量增加到 k 倍時另一個量就恰好減少到它自己原值的 k 分之一，則說它們成反比。

在比例中，內項或外項可以分別互換位置，也可以同時都這樣地換位置，即，以下的比例均同時正確：

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}。$$

除此以外，由基本的比例 $a : b = c : d$ ，可以得到一系列的所謂誘導比例：

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}; \quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}。$$

由某些比的等式：

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n},$$

就必有：

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}$$

如果有 n 个数: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, 則它們的算術平均值 x_{am} , 均方值 x_{qm} , 幾何平均值 x_{gm} 和調和平均值 x_{hm} 是由以下的等式定义:

$$x_{am} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n};$$

$$x_{qm} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2};$$

$$x_{gm} = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n};$$

$$\frac{1}{x_{hm}} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} \right).$$

特別是, 兩個数 x_1 和 x_2 的各种中值或平均值可由以下等式找到:

$$x_{am} = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$x_{qm} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$$

$$x_{gm} = \sqrt{x_1 x_2};$$

$$x_{hm} = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}.$$

級 数

算術級数是这样的一个数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ (級数的項), 其中每一个数都可以由其前一个数加上某一个定数 d 而得到, d 叫作这級数的公差。当 $d > 0$ 时, 級数的項隨其註标号数的增加而增加, 所以这級数叫作是遞增的; 当 $d < 0$ 时, 級数的項漸減, 而这級数叫作是遞降的。

算術級数的一般形式为:

$$\dots, a_1; a_1 + d; a_1 + 2d; a_1 + 3d; \dots,$$

此处 a_1 —— 是級数的首項而 d —— 是級数的公差。

算術級数的第 n 項之通式为

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

算術級數首 n 項之和為

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d].$$

幾何級數是這樣的一個數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ (級數的項), 其中每一個數都可由其前面的那個數乘上某一個定數 q 而得到. q 叫作這級數的公比.

當 $|q| > 1$ 時, 級數叫作是遞增的, 當 $|q| < 1$ 時, 級數叫作是遞降的.

幾何級數的一般形式為:

$$\div a_1; a_1q; a_1q^2; a_1q^3; \dots;$$

此處 a_1 —— 是級數的首項, 而 q —— 是級數的公比.

幾何級數的第 n 項的通式為:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

幾何級數首 n 項的和為:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

如果一個遞降幾何級數的項數無限的增多, 則 S_n 趨於極限 S :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

利用上面的這個公式可以把任意的循環小數表示為分數 (第 165 頁):

$$\begin{aligned} 0.121212\dots &= \frac{12}{100} + \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{100} + \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{100^2} + \\ &+ \dots + \frac{\frac{12}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}. \end{aligned}$$

幾個有限項的數項級數

$$1) 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n-1)}{2};$$

$$2) \quad p + (p+1) + (p+2) + \cdots + (p+n-2) + \\ + (p+n-1) = \frac{n(2p+n-1)}{2};$$

$$3) \quad 1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2;$$

$$4) \quad 2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n=n(n+1);$$

$$5) \quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$6) \quad 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3};$$

$$7) \quad 1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$8) \quad 1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1).$$

正負数的运算

数 a 的绝对值(模)(記作: $|a|$)等於 a (如果 a 为正的),或等於負 a (如 a 为負的)。绝对值常为正数(或零)。

两个具有同号数相加时, 把它们的模相加而在和的前面放上它們共同的符号。两个具有異号的数相加时, 由其中較大的模減去較小的模而放上具有較大模的数的符号。

減法可以用加法代替, 在这种情况下被減数的符号保持不动但必須將減数变号。

两个数相乘时, 先把它們的模相乘, 而如果两个因子的符号相同, 則須在乘積的前面放一个加号, 如果因子的符号相反, 則須放一个減号。

两个数相除时, 先用除数的模除被除数的模, 而如果除数和被除数同号, 則在商前面放一个加号; 如果它們異号, 則須在商前放一个減号。

两个数的和或差(代数和)的绝对值必然大於或等於該二数的绝对值的差並且小於或等於这两个绝对值的和:

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

恒等变换

一个代数量或多个代数量（文字或数）而由代数运算的符号和表示这种运算的程序的符号（括弧）联接起来，叫作代数式。用等号联接起来的两个代数式组成一个等式。

恒等式是这样的等式，即当用任何数代替其中的文字时，它永远成立。如果一个等式仅当用某些确定的值代替其中的文字时才成立，则该等式叫作**方程**。

由一个代数式得出另一个恒等于它的代数式，叫作**恒等变换**。

代数式的分类，是按照施行在作为基础的文字量上的一些什么运算。代数式分为：**有理整式**（其中在基本量上仅作加法，减法，乘法和正整数指数的乘方），**有理分式**（除上述的运算以外，尚有除法或负整数指数的乘方）和**无理式**（更有开方或分数指数的乘方）。

一个代数式，当其运算程序中的最后一个运算不是加法或减法时，叫作**单项式**。例如：

$$a; \quad a(2b-3c)。$$

一切不含有作为基本量的数字或文字的因子，叫作**系数**。

如果两个或多个单项式完全相同或仅有不同的系数，则说它们是**同类项**。例如 $3a^2b$ 和 $5a^2b$ 。

单项式的加法就是把它们的和化为更简单的形式。诸同类项的和仍是一个同类项，而它的表达式的系数等于各项的系数的和，这种变换叫作**同类项的合并**，例如：

$$5x^2y + 3x^2y - 2x^2y = 6x^2y。$$

如果系数是文字式的，则应该把公共因子提放括弧后面，例如：

$$axy^2 + bxy^2 - cxy^2 = (a+b-c)xy^2。$$

單項式相乘時，應該將係數連乘，將相同文字的指數相加，再將其它文字帶着它們原來的指數一併寫在乘積中，例如：

$$3x^2y \cdot (-5xz^2) = -15x^3yz^2.$$

用單項式除單項式時，應該將係數相除，並將相同文字的指數相減，例如：

$$24x^5y^4z : 6x^3z = 4x^2y^4.$$

幾個單項式的和差叫作**多項式**。多項式的相加和相減將得出一個新的多項式，其作法為在第一個多項式的後面連寫其餘諸項，這些項在相加時不變號而在相減時則須變號，寫全後在可能時歸併同類項。

例：

$$(5x^3y + 7x^2y^2 - 13xy^3) + (2x^3y - 7x^2y^2) - (5x^2y^2 - 12xy^3) = \\ = 7x^3y - 5x^2y^2 - xy^3.$$

當用單項式乘（或除）多項式時，應該用單項式依次乘（或除）多項式的每一項，然後把結果加起來。

例 1：

$$(8a^3b^2 - 9a^2b^3 + 6ab^4) \cdot 2ab^2 = 16a^4b^4 - 18a^3b^5 + 12a^2b^6.$$

例 2：

$$(8a^3b^2 - 9a^2b^3 + 6ab^4) : 2ab^2 = 4a^2 - \frac{9}{2}ab + 3b^2.$$

當多項式乘多項式時，應該用乘數的每一項乘被乘數的每一項，然後把結果加起來。

例：

$$(5a^2b - 3ab^2 + 2b^3)(a - 2b) = 5a^3b - 3a^2b^2 + 2ab^3 - 10a^2b^2 + 6ab^3 - 4b^4 = \\ = 5a^3b - 13a^2b^2 + 8ab^3 - 4b^4.$$

當用一個多項式除另一個多項式時，應該先按照某一文字的遞降指數把這兩個多項式排好，然後用除數的最高次項除被除數的最高次項，就得到商的最高次項，再用這一個項乘整個除數而由被除數內（譯者註：以後是由余式內）減去所得之積，然後再用除數的最高次項除這新得余式的最高次項，就得到商的第二項。照這樣做下去，一直到余式為零或余式的最高次項低於除數的最

高次項為止。后一種情形是帶剩余的除法。

例：

$$\begin{array}{r} 2x^3+5x^2+13x+4 \\ \underline{2x^3+4x^2+6x} \\ -x^2+7x+4 \\ \underline{-x^2+2x+3} \\ 5x+1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2+2x+3 \\ 2x+1 \end{array} \right.$$

所以

$$(2x^3+5x^2+13x+4):(x^2+2x+3)=2x+1+\frac{5x+1}{x^2+2x+3}.$$

在某些情況下，多項式的乘法和除法可以用所謂縮減乘法和除法的公式來作。

縮減乘法和縮減除法的公式

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc;$$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\cdots+2a_1a_n+2a_2a_3+\cdots+2a_{n-1}a_n;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3;$$

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1};$$

$$\frac{a^{2n}-b^{2n}}{a\pm b}=a^{2n-1}\mp a^{2n-2}b+a^{2n-3}b^2\mp \cdots+ab^{2n-2}\mp b^{2n-1};$$

$$\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}}{a+b}=a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n}.$$

有 理 代 数 式

我們來區別有理整式與有理分式（第171頁）。每一個有理整式可以化為多項式的形狀：

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$