王卓 主编

布尔代数与自动机

BUER DAISHU YU ZIDONGJI

甘肃科学技术出版社

主　编：王　卓
副主编：黄景廉
编　著：王文康
纪金水
李春蔚

布尔代数与自动机

BUER DAISHU YU ZIDONG JI

甘肃科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

布尔代数与自动机/王卓主编. —兰州:甘肃科学技术出版社,2006. 4

ISBN 7-5424-1043-1

Ⅰ. 布... Ⅱ. 王... Ⅲ. ①布尔代数②自动机理论 Ⅳ. ①O153. 2②TP301. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 029939 号

责任编辑 陈学祥(0931 - 8773274 gstpchen@ sina. com)
封面设计 左文绚(0931 - 8773275)
出版发行 甘肃科学技术出版社(兰州市南滨河东路 520 号 0931 - 8773237)
印　　刷 甘肃天河印刷有限责任公司(兰州市雁滩工业城南二区 16 号)
开　　本 787mm × 1092mm 1/16
印　　张 14
字　　数 323 000
版　　次 2006 年 4 月第 1 版 2006 年 4 月第 1 次印刷
印　　数 1 ~ 1000
定　　价 28. 00 元

前　　言

布尔代数理论、自动机理论是计算机科学中的基础理论，在计算机科学发展中有重要作用。它们在可计算理论、计算复杂性理论、并行计算、密码学、人工智能、形式语言理论、逻辑设计、编译理论等计算机科学的许多分支学科中有重要应用。在群与半群理论、逻辑学、组合理论、图论、模糊数学、经济学、管理科学等学科中也有很多重要应用。

布尔代数理论、自动机理论有着相互联系和相互间的应用。如利用布尔函数解决有穷自动机的最小化问题，利用布尔矩阵确定有穷自动机状态等价的数量估计，自动机与格和布尔代数的关系，布尔电路模拟图灵机，利用自动机简化布尔编码的识别和构造等。

随着信息科学的发展，信息安全的重要性日益突出，解决信息安全问题的密码学理论显得十分重要。作为密码学重要的研究工具，布尔代数理论、自动机理论在促进密码学发展方面的作用越来越受到关注。

因此，向计算机专业的大学生、研究生和科技工作者介绍更多一点的布尔代数、自动机的知识是适宜的、需要的。本书所介绍的布尔代数、自动机的内容，除了为适应系统性要求而包含有基础知识外，还有布尔代数和自动机的较为深入的知识和较为广泛的应用。这既有益于增加计算机专业大学生、研究生读者对布尔代数理论、自动机理论相关知识的了解，增加对布尔代数理论、自动机理论对计算机科学的发展和研究的意义的认识，也有利于读者根据各自研究的需要进入到相应领域，更进一步地了解和学习布尔代数和自动机的更深入、更前沿的知识。本书写作中参阅了很多优秀的文献。书后介绍了一些参考文献，需要深入了解更多内容的读者，可根据参考文献进行查阅或进一步学习。

作者水平有限，书中缺点错误在所难免，望读者批评指正。

作者

2005 年 12 月

目　　录

第一篇　布尔代数、向量布尔代数及其应用

第二篇　自动机理论及其应用

第三篇 形式语言与自动机

第四篇 布尔矩阵

第一篇

布尔代数、向量布尔代数及其应用

第一章 引 论

第一节 集 合

一、集合的基本概念

1. 集合的概念

集合是具有某种特点的对象组成的整体，集合中的每一个对象称为这个集合的元素。如一些笔记本电脑构成一个笔记本电脑的集合，其中每一台笔记本电脑都是该集合的元素。又如自然数的全体构成自然数集合，每一个自然数都是这个集合的元素。

通常用大写英文字母 A，B，C，……代表集合，用小写英文字母 a，b，c……代表集合中的元素。如果 a 是集合 A 中的元素，称为 a 属于 A，并记作 $a\in A$。如果 a 不是集合 A 中的元素，称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$。

不含任何元素的集合称为空集，记作 ϕ。

2. 常用的集合

N：正整数或自然数集合 $\{1, 2, 3, \cdots\}$。

E：整数集合 $\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$。

Q：有理数集合。

R：实数集合。

C：复数集合。

3. 集合的表示方法

①列举法：将集合中所有元素一一列出，元素之间用逗号隔开，并用花括号括起来。如 $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{a, b\}$。

②描述法：以某个小写英文字母统一表示该集合的元素，并指出这类元素的共同特征。如 $c=\{x \mid x$ 是偶数，且 $0<x\leq 10\}$。

4. 集合的基数

集合 A 中不同元素的数目，称为集合 A 的基数，记为 $|A|$。当集合 A 具有有限数目的元素，即 $|A|$ 有限时，称 A 为有限集，否则称 A 为无限集。

二、集合的运算

1. 集合的包含　设有集合 A，B，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素（即如果 $a\in A$，则必有 $a\in B$），则称 A 是 B 的子集，或说 A 包含于 B（或 B 包含 A），记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。而如果 A 不是 B 的子集，则记作 $A\not\supseteq B$ 或 $B\not\supseteq A$。

2. 集合包含的性质

①$\phi \subseteq A$；

②$A \subseteq A$；

③若 $A \subseteq B$， $B \subseteq C$， 则 $A \subseteq C$。

3. 集合的相等 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

4. 真子集 $A \subseteq B$ 但 $A \neq B$，则称 A 为 B 的真子集，记为 $A \subset B$。

5. ϕ 惟一。

6. 幂集

①定义：由集合 A 的所有子集为元素而构成的集合，称为 A 的幂集。记为 $P(A)$（或 2^A），有 $P(\phi) = \{\phi\}$。

②定理：设 A 为有限集，则

$|P(A)| = 2^{|A|}$

证明：设 $|A| = n$，则 $|P(A)| = c_n^0 + c_n^1 + \cdots + c_n^n = 2^n = 2^{|A|}$。

7. 全集合 U：如果一个集合包含了某个问题中所讨论的一切集合，则称它为该问题的全集合，记作 U。

一般，我们总是取一个对问题的讨论较为方便的集合为 U。例如，如果我们讨论的问题在实数范围内，则可将实数集 R 取作全集合 U。以后的讨论中，所涉及的集合均看做对应的全集合的子集。

8. 并集 $A \cup B$：集合 A 与集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$，即：$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$

9. 交集 $A \cap B$：属于集合 A 同时又属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$，即：$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$

10. 差集 $B - A$：由属于集合 B 而不属于集合 A 的所有元素组成的集合，称为 B 与 A 的差集，记为 $B - A$，即：

$B - A = \{x \mid x \in B, x \notin A\}$

11. 补集：集合 A 的补集 $\overline{A}$ 为：

$\overline{A} = U - A = \{x \mid x \in U$，但 $x \notin A\}$

12. 集合运算定律：对于全集合 U 的任意子集 A，B，C，有：

①交换律

$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$

②结合律

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

③分配律

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

④同一律

$A \cup \varnothing = A$；$A \cap U = A$

⑤互补律

$A\cup\overline{A}=U$；$A\cap\overline{A}=\varnothing$

⑥对合律

$\overline{\overline{A}}=A$

⑦等幂律

$A\cup A=A$；$A\cap A=A$

⑧零一律

$A\cup U=U$；$A\cap\varnothing=\varnothing$

⑨吸收律

$A\cup(A\cap B)=A$；$A\cap(A\cup B)=A$

稍作证明：

$A\cup(A\cap B)$	$=(A\cap U)\cup(A\cap B)$	由同一律
	$=A\cap(U\cup B)$	由分配律
	$=A\cap(B\cup U)$	由交换律
	$=A\cap U$	由零一律
	$=A$	由同一律
$A\cap(A\cup B)$	$=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)$	由同一律
	$=A\cup(\varnothing\cap B)$	由分配律
	$=A\cup(B\cap\varnothing)$	由交换律
	$=A\cup\varnothing$	由零一律
	$=A$	由同一律

⑩德·摩根律

$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$；　$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

从上面的每一定律的两个式子以及证明中，可以看到集合定律的两个公式和证明中的“$\cup$”和“$\cap$”运算有一种对偶关系。

三、集合的分划

定义1. 1. 3. 1

设$\pi=\{A_i\}_{i\in k}$是非空集合A的幂集$P(A)$的子集，如果：

(1) $A_i\neq\varnothing$

(2) $\bigcup\limits_{i\in k}A_i=A$

(3) $A_i\cap A_j=\varnothing$

当$i\neq j$时

则称集合π是集合A的一个分划，每个A_i称为这个分划的一个分划块。

例：设$A=\{a, b, c\}$，则

$\pi_1=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$，　$\pi_2=\{\{a\}, \{b, c\}\}$，　$\pi_3=\{\{a, b\}, \{c\}\}$，

$\pi_4=\{\{a, c\}, \{b\}\}$，　$\pi_5=\{\{a, b, c\}\}$ 都是A的分划。可知一个集合的分划一般不是惟一的。

第二节 关　　系

一、笛卡尔积和关系

1. 定义 1. 2. 1. 1

设 $A1$，$A2$，…，A_n 为任意集合，由 A_i（$i=1$，…，n）的所有元素的组合构成的

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1, a_2, \cdots, a_n)\mid a_i\in A_i, i=1, 2, \cdots, n\}$

称为 A_1，A_2，…，A_n 的笛卡尔积（或直乘积），其中（a_1，a_2，…a_n）称为有序 n 元组，特别当 $n=2$ 时，（a_1，a_2）又称为序偶。

若 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，$\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n个}$记为 A^n

例：$A=\{a, b\}$，$B=\{1, 2, 3\}$

则$A\times B=\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

$B\times A=\{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$A\times A=\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

可知 $A\times B\neq B\times A$

下面，只具体讲二元关系，这是我们主要讨论的问题，而 n 元关系可以类推。

2. 定义 1. 2. 1. 2

设 A、B 为任意集合，直乘积 $A\times B$ 的一个子集 ρ，称为 A 到 B 的一个二元关系。特别当 $A=B$ 时，$A\times A$ 的一个子集 ρ 称为 A 上的一个二元关系，简称为 A 上的一个关系。

若（x，y）$\in\rho$，则称 x，y 有关系 ρ，记为 $x\rho y$，若，（x，y）$\overline{\in}\rho$，则称 x，y 没有关系 ρ，记为 $x\,\overline{\rho}\,y$。

例：定义在实数集 R 上的“等于”、“大于”、“小于”关系

$\rho_1=\{(x, y)\mid (x, y)\in R^2, x=y\}$

$\rho_2=\{(x, y)\mid (x, y)\in R^2, x>y\}$

$\rho_3=\{(x, y)\mid (x, y)\in R^2, x<y\}$

例：

（1）空关系$\varnothing$：即 $A\times A$ 的空子集$\varnothing$

（2）全域关系 E_A：$E_A=A\times A=\{(x_i, y_j)\mid x_i, y_j\in A\}$

（3）恒等关系 I_A：$I_A=\{(x, x)\mid x\in A\}$

二、关系的性质与等价关系

1. 定义 1. 2. 2. 1

设 ρ 为集合 A 上的关系，若对任意 $X\in A$ 都有 $x\rho x$，则称 ρ 有反身性（或自反性）。

若 $x\rho y$ 则有 $y\rho x$，（其中 x，$y\in A$），则称 ρ 具有对称性。

若 $x\rho y$，$y\rho z$ 则有 $x\rho z$，（其中 x，y，$z\in A$），则称 ρ 具有传递性。

若 $x\rho y$，$y\rho x$ 则有 $x=y$，（其中 x，$y\in A$），则称 ρ 具有反对称性。

注意区分自反关系与恒等关系，集合 A 上的恒等关系一定是自反的，但自反关系

并不一定是恒等关系，如“≤”是自反的但不恒等。

例：R 上的关系

$\rho=\{(x,y)\mid x\leq y\}$

具有反身性，传递性和反对称性，但无对称性。

2. 定义 1. 2. 2. 2

非空集合 A 上的关系 ρ，如果 ρ 具有反身性，对称性和传递性，则称 ρ 是 A 上的等价关系。等价关系通常用符号“~”表示。也就是说，具有以下性质的关系 ρ 称为等价关系。

(1) 反身性：对所有 $x\in A$，有 $x\rho x$。

(2) 对称性：对所有 x，$y\in A$，若 $x\rho y$ 则 $y\rho x$。

(3) 传递性：对所有 x，y，$z\in A$，若 $x\rho y$ 和 $y\rho z$ 则 $x\rho z$。

3. 定义 1. 2. 2. 3

设 ~ 是非空集合 A 上的等价关系，则 A 中等价于 $x\in A$ 的全体元素的集合 M 称为 x 所生成的等价类（或在 ~ 下的，或相对于 ~ 的一个等价类）。即

(1) 若 $x\in M$，$y\in M$，则 $x\sim y$。

(2) 若 $x\in M$，$y\in A$，且满足 $x\sim y$，则 $y\in M$。

定理 1. 2. 2. 1

设 ~ 是非空集合 A 上的等价关系，则等价类存在。

证明：任取 $a\in A$，令

$M=\{x\mid x\sim a,\ x\in A\}$，

则可证明 M 是由 a 生成的等价类。

因 ~ 是 A 上的等价关系。$a\in A$，由反身性，有 $a\sim a$，即 $a\in M$，故 M 非空。

设 x_1，$x_2\in M$，则 $x_1\sim a$，$x_2\sim a$，由对称性，有 $a\sim x_2$，再由传递性，有 $x_1\sim x_2$，即 M 中元素均有等价关系 ~。

任取 $x_1\in M$，又设 $x_2\in A$ 且满足 $x_1\sim x_2$，则由于 $x_1\in M$，$x_1\sim a$，故由传递性也有 $x_2\sim a$，故 $x_2\in M$。即 A 中凡与 M 中元素有等价关系的元素均为 M 中的元素。

故 M 是等价类。

定理 1. 2. 2. 2

设 ~ 是集合 A 上的等价关系，则相对于等价关系 ~ 的等价类的集合 M_i $(i\in I)$ 构成 A 的一个分划。

证明：(1) M_i 非空是显然的。

(2) 取 M_i，M_j $(i\neq j,\ i,\ j\in N)$ 且 $M_i\neq M_j$。若 $M_i\cap M_j\neq\phi$，则设 $x\in M_i\cap M_j$，则任取 $a\in M_i$，$b\in M_j$，有 $a\sim x$，$x\sim b$，所以 $a\sim b$，所以 $a\in M_j$，故 $M_i\subseteq M_j$。

同理可证，故 $M_j\subseteq M_i$，故 $M_j=M_i$，这与等价类 $M_i\neq M_j$ 矛盾。因而 $i\neq j$ 时，$M_i\cap M_j=\phi$。

(3) 任取 $a\in A$，令

$M=\{x\mid x\in A,\ x\sim a\}$，

则 M 是一个等价类。即有 $i\in N$，使 $M=M_i$。

又因 $a\in M\subseteq\bigcup_{i\in N}M_i$，所以 $A\subseteq\bigcup_{i\in N}M_i$，而显然 $\bigcup_{i\in N}M_i\subseteq A$，所以 $A=\bigcup_{i\in N}M_i$。

三、偏序关系与全序关系

这里主要是证明偏序关系与全序关系的区别。

定义 1. 2. 3. 1

设 ρ 是非空集合 A 上的一个关系，如果 ρ 具有反身性，反对称性和传递性，则称 ρ 是 A 上的一个偏序关系。偏序关系通常写成符号“$\leqslant$”，读作“小于或等于”。而集合 A 连同 A 上的偏序关系 $\leqslant$ 组成的二元偶（A，$\leqslant$）称为偏序集合（或简称 A 为偏序集合）。

定义 1. 2. 3. 2

设（A，$\leqslant$）是偏序集合，若对任意 a，$b\in A$，都有 $a\leqslant b$ 或 $b\leqslant a$ 成立，则称 $\leqslant$ 为 A 上的全序关系，称（A，$\leqslant$）为全序集合。显然，全序集合中存在一个链 $a_0\leqslant a_1$，$\leqslant\cdots\leqslant$，a_n，故全序集合也称作链。

偏序集与全序集的区别是显然的。对于偏序集（A，$\leqslant$）中的任意两元素 a，b，或者有 $a\leqslant b$，或者有 $b\leqslant a$，或者 a，b 不可比。而对于全序集合中（A，$\leqslant$）的任两元素 a，b 均可比。均有 $a\leqslant b$，或 $b\leqslant a$。即全序。

例：令“$\leqslant$”是实数集 R 上的小于等于关系，则“$\leqslant$”是实数集 R 上的偏序关系，也是全序关系。

例：（P（A），$\subseteq$）中，$A=\{a, b, c\}$，则 $P(A)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$，则显然（$P$（$A$），$\subseteq$）是偏序集。但 $\{a\}$ 与 $\{b, c\}$ 不可比，故不是全序集。

第三节　代数系统

一、运算与代数系统

定义 1. 3. 1. 1

设有非空集合 A，映射 f：$A^n\to A$ 称为 A 上的一个 n 元运算；n 称为这个运算的阶。

若映射 $f:A^2\to A$ 称为 A 上的二元运算。若 $f:A\to A$，则 f 是 A 上的的一元运算。这是我们常见也常用的两种运算。相应地，可记为 $f(a,b)=c,(a,b)\in A^2,c\in A$，及 $f(x)=y,x\in A,y\in A$。但由于代数运算是一种特殊的映射，所以也可以把映射符号记得特殊一点。如“$\bigcirc$”、“$\triangle$”、“$*$”、“$\sim$”。并且可把 $f(a,b)=c$ 记为 $a\bigcirc b=c$。

定义 1. 3. 1. 2

一个非空集合 S 和定义在该集合上的一个或多个运算 $\bigcirc_1$，$\bigcirc_2$，…，$\bigcirc_n$ 所组成的系统称为一个代数系统。记为（S；$\bigcirc_1$，$\bigcirc_2$，…，$\bigcirc_n$）。非空集 S 称为这个代数系统的域。当 S 是有限集时（S；$\bigcirc_1$，$\bigcirc_2$，…，$\bigcirc_n$）称为有限代数系统。

二、同态与同构

定义 1. 3. 2. 1

设 $v_1=$（S_1；$\bigcirc$，$\triangle$，$*$）和 $v_2=$（S_2；$\overline{\bigcirc}$，$\overline{\triangle}$，$\overline{*}$ 是两个同类型的代数系统，

$\bigcirc$，$\overline{\bigcirc}$，$\triangle$，$\overline{\triangle}$是二元运算，$*$，$\overline{*}$是一元运算。ϕ 是一个从 S_1 到 S_2 的映射。若对于任意（x_1，x_2）$\in S_1^2$ 有

$$\phi(x_1 \bigcirc x_2) = \phi(x_1)\ \overline{\bigcirc}\ \phi(x_2)$$

$$\phi(x_1 \triangle x_2) = \phi(x_1)\ \overline{\triangle}\ \phi(x_2)$$

对任意的 $x \in S_1$，有

$$\phi(*x) = \overline{*}\phi(x)$$

则称 ϕ 是 v_1 到 v_2 的一个同态，或 S_1 到 S_2 的一个同态映射。称 v_2 是 v_1 在 ϕ 下的同态像。

定义 1. 3. 2. 2

对定义 1. 3. 2. 1 中的 ϕ，若 ϕ 还是由 S_1 到 S_2 的满射，则这时称 ϕ 为同态满射。并说对 v_1 和 v_2 的代数运算来说，S_1 与 S_2 同态。

定义 1. 3. 2. 3

对定义 1. 3. 2. 1 中的 ϕ，若 ϕ 是由 S_1 到 S_2 的双射，则这时称 ϕ 为 S_1 与 S_2 间的同构映射（简称同构）。并说对 v_1 和 v_2 的代数运算来说，S_1 与 S_2 同构。

第四节 数据结构与栈

一、数据结构

数据结构是计算机科学的基础内容。现在计算机加工处理的对象，不仅有数值，更多地还有字符、表格、图象等各种具有一定结构的数据。为了编写出一个“好”程序，必须分析待处理对象的特性及各处理对象之间存在的关系，这就需要学习、了解数据结构。

但本书只能对数据结构的一些基本概念作些简单介绍。

数据：是对客观事物的符号表示，在计算机科学中是指所有能输入到计算机中并被计算机程序处理的符号的总称。例如，一个编译程序或文字处理程序的处理对象是字符串。这个串就是一个数据。对计算机科学而言，数据的含义极为广泛，图象、声音、字符等都可以通过编码而归之于数据的范畴。

数据元素：数据的基本单位。在计算机程序中通常作为一个整体进行考虑和处理。例如对学生学籍进行管理时，每个学生的信息构成一个数据元素。而该数据元素的一些项，如姓名、年龄、籍贯、学号、年级、专业等，称为一个数据项。数据项是数据的不可分割的最小单位。

数据对象：性质相同的数据元素的集合，是数据的一个子集。如字母字符数据对象是集合 $C = \{$‘A’、‘B’，……，‘Z’$\}$。

数据结构：相互间存在一种或多种特定关系的数据元素的集合。在要研究并由计算机处理的问题中，数据元素之间都存在着某种关系，这种数据元素相互之间的关系称为结构。数据元素之间关系，根据其不同特性，通常有下列四类基本结构：（1）集合。结构中的数据元素之间除了“同属于一个集合”的关系外，再无其他关系；（2）线性

结构。结构中的数据元素之间存在一个对一个的关系；（3）树形结构。结构中的数据元素之间存在一个对多个的关系；（4）网状结构或图状结构。结构中的数据元素之间存在多个对多个的关系。下面给出这四类基本结构关系示意图，以便于对它的理解。

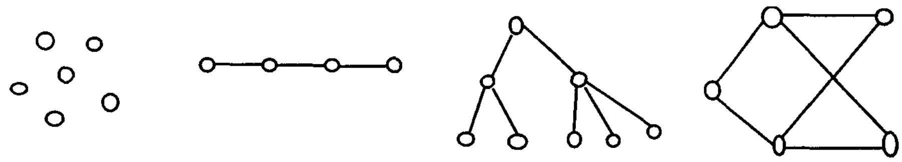

图 1-1 四类基本结构关系图

于是，可给出数据结构的形式定义：数据结构是一个二元组（D，S），其中，D 是数据元素的有限集，S 是 D 上关系的有限集。例如，一个课题组组长带 3 名教师，每个教师各带 2 名研究生。则定义数据结构为

$tree=(P, R)$

其中：$P=\{T, G_1, G_2, \cdots\cdots, G_i, S_{11}, \cdots\cdots, S_{ij}\}$ $\qquad 1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 2$

$R=\{R_1, R_2\}$

$R_1=\{\langle T, G_i\rangle \mid 1\leqslant i\leqslant 3\}$

$R_2=\{\langle G_1, S_{ij}\rangle \mid 1\leqslant i\leqslant 3, 1\leqslant j\leqslant 2\}$

图示为：

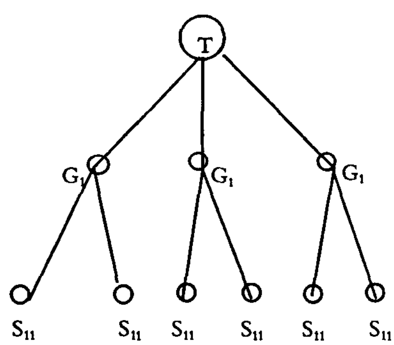

图 1-2 上例的示意图

在计算机科学中所讨论的数据结构有线性表，栈和队列、串、数组和广义表，树和二叉树，图等。但本书在下面只简单地介绍一下栈这种数据结构。要较深入了解数据结构的内容，读者可参看有关数据结构的专门书籍。

二、栈

栈是一种重要的数据结构。从数据结构的角度看，栈也是线性表，但它是操作受限制的线性表，它的基本操作是线性表操作的子集。在数据结构中要对栈进行专门的讨论。

栈是限定仅在表尾进行插入或删除操作的线性表。因之，栈的修改是按后进先出的原则进行的。故而栈又称为后进先出的线性表。对栈来说，表尾端有其特殊含义，称为栈顶（*Top*），相应地，表头端称为栈底（*Bottom*）。不含元素的空表称为空栈。

假设栈 $S=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$，则称 a_1 为栈底元素，a_n 为栈顶元素。栈中元素按 a_1，a_2，……，a_n 的次序进栈，退栈的第一个元素为栈顶元素，因而上面栈中元素退栈时，按 a_n，a_{n-1}，……，a_2，a_1 的次序退栈。

通常，栈这种线性有序表用随机存储器实现。若栈顶单元地址比栈底小，称为向下生长的栈，反之称为向上生长的栈。下面用向下生长栈表示栈 $S=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$。

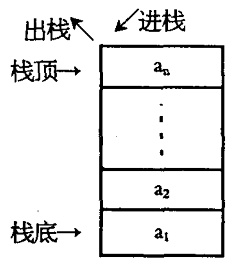

图 1-3 向下生长栈示意图