

小学教师进修中等师范教材

几 何

复习指导

XIAO JIAO JINXIUZHONGSHI JIAOCAI



彭 京 鹏

河南大学出版社



小学教师进修中等师范教材

几 何
复 习 指 导

彭 京 鹏

河 南 大 学 出 版 社

几 何
复 习 指 导

编 著 彭京鹏
责任编辑 程 庆

河南大学出版社出版
兰考县印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 6.75 字数: 140千字

1986年7月第1版 1986年7月第1次印刷

印数: 1—20,000

统一书号: 7435·013 定价: 1.00元

说 明

由五省、市协编的一套小学教师进修中师教材已为广大小学教师进修学习所采用。本书是这套教材中《几何》一书的复习指导，目的是帮助进修教师全面系统地复习掌握教材内容，以达到小学教师进修中师大纲的要求。

本书内容编排与原教材各章次序一致，本着加强基础知识、突出重点、解决疑难、提高能力的原则，将各章内容进行了归纳整理，各章均包括复习要求、内容提要、重点与难点解析、例题分析和习题五部分，书末附有各章习题的答案与提示，以供参考。

“复习要求”扼要地指明了各章复习的目的和要求。

“内容提要”是每章知识的概括，并阐述了每章各部分之间的内在联系，指出复习中应注意的关键之处。

“重点与疑难解析”是针对教材的重点与难点作了一些较深入的辅导，尽量使读者了解基本概念产生的背景，明确基本概念的涵义，掌握定理的证明思路。

“例题分析”是从内容与方法上精选了一些有代表性的例题，作出解答和证明，总结解题规律，使读者能够触类旁通，举一反三，提高分析问题和解决问题的能力。

限于水平，本书难免存在不当之处，祈请读者批评指正。

编 者

一九八六年四月

目 录

第一章 直线和平面	(1)
一、复习要求	(1)
二、内容提要	(1)
1. 平面	(2)
2. 空间两条直线	(4)
3. 空间直线和平面	(5)
4. 空间两个平面	(9)
三、重点与疑难解析	(12)
1. 平面	(12)
2. 异面直线	(14)
3. 直线和平面平行的判定与性质	(17)
4. 直线和平面垂直的判定与性质	(18)
5. 三垂线定理及其逆定理	(21)
6. 二面角	(23)
7. 平面和平面垂直的判定与性质	(24)
8. 空间图形的画法	(26)
四、例题分析	(28)
习题一	(43)
第二章 多面体和旋转体	(46)
一、复习要求	(46)
二、内容提要	(46)
1. 多面体的概念和性质	(47)
2. 棱柱、棱锥、棱台的概念和性质	(47)

3. 圆柱、圆锥、圆台、球的概念和性质	(49)
4. 柱、锥、台、球的表面积和体积	(52)
三、重点与疑难解析	(54)
1. 多面体的概念和性质	(54)
2. 棱柱、棱锥、棱台的概念和性质	(55)
3. 正多面体的概念	(58)
4. 圆柱、圆锥、圆台、球的概念和性质	(59)
5. 柱、锥、台、球的表面积和体积	(60)
四、例题分析	(66)
习题二	(82)
第三章 逻辑知识初步	(84)
一、复习要求	(84)
二、内容提要	(84)
1. 概念	(84)
2. 命题	(87)
3. 充分条件和必要条件	(88)
4. 推理和证明	(89)
5. 逻辑思维的基本规律	(91)
三、重点与疑难解析	(93)
1. 思维与思维形式	(93)
2. 概念的内涵与外延	(94)
3. 概念间的关系	(95)
4. 给概念下定义	(96)
5. 概念的分类	(98)
6. 命题	(99)
7. 充分条件与必要条件	(101)
8. 推理	(102)
9. 证明	(104)

10. 逻辑思维的基本规律	(108)
四、例题分析	(110)
习题三	(116)
第四章 直角坐标系、曲线和方程	(118)
一、复习要求	(118)
二、内容提要	(118)
1. 直角坐标系	(118)
2. 曲线和方程	(120)
三、重点与疑难解析	(122)
1. 有向线段	(122)
2. 坐标平面内的点和有序实数对的一一映射关系	(123)
3. 两点间的距离	(124)
4. 线段的定比分点	(125)
5. 曲线和方程	(127)
四、例题分析	(130)
习题四	(134)
第五章 直 线	(137)
一、复习要求	(137)
二、内容提要	(137)
1. 直线的斜率和直线方程	(137)
2. 两条直线的位置关系	(140)
三、重点与疑难解析	(142)
1. 直线的倾斜角和斜率	(142)
2. 直线方程的几种形式	(143)
3. 两条直线平行与垂直的充要条件	(145)
4. 两条直线的夹角	(146)
5. 两条直线的交点	(148)

6. 点到直线的距离	(150)
四、例题分析	(151)
习题五	(157)
第六章 圆锥曲线	(159)
一、复习要求	(159)
二、内容提要	(159)
1. 圆	(159)
2. 椭圆	(161)
3. 双曲线	(162)
4. 抛物线	(164)
三、重点与疑难解析	(167)
1. 圆的标准方程和一般方程	(167)
2. 两曲线的交点	(168)
3. 椭圆、双曲线、抛物线的标准方程	(170)
4. 椭圆、双曲线、抛物线的几何性质	(172)
四、例题分析	(176)
习题六	(193)
习题答案与提示	(196)

第一章 直线和平面

一、复习要求

1 正确理解平面概念,掌握平面的基本性质和水平放置的平面图形的画法。

2 明确空间中两条不重合的直线的三种位置关系,正确理解异面直线、异面直线所成的角和异面直线间的距离等概念,并能运用它们解决有关问题。

3 明确直线和平面的三种位置关系并掌握它们的画法;掌握直线和平面平行、垂直的判定定理和性质定理的证明方法及应用;正确理解斜线的射影、直线和平面所成角的概念;熟练掌握三垂线定理及其逆定理,并能运用它们解决有关问题。

4 明确两个不重合的平面的两种位置关系并掌握它们的画法;掌握平面平行、垂直的判定定理和性质定理的证明方法及应用;正确理解二面角以及二面角的平面角的概念。

5 进一步提高绘制空间图形的能力,发展空间想象力。

二、内容提要

本章内容可分为四部分:第一部分包括平面的基本性质、水平放置的平面图形的画法;第二部分包括空间两直线

的位置关系、平行直线、异面直线和异面直线所成的角；第三部分包括直线和平面的位置关系、直线和平面平行的判定与性质、直线和平面垂直的判定和性质、斜线与它在平面内的射影、直线和平面所成的角、三垂线定理；第四部分包括两个平面的位置关系、平面平行的判定和性质、二面角、多面角、平面垂直的判定和性质。

1. 平面

(1) 平面的概念

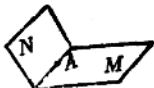
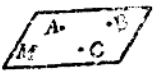
平面是不予定义的基本数学概念之一。常见的桌面、黑板面、镜面以及平静的水面等，都给人们以平面的形象，但这样的平面不过是几何里所说平面的一部分，几何中所说的平面，是在空间中无限伸展着的。

通常画平行四边形表示平面。但应注意，平行四边形的边并不是平面的“边”，平面具有无限性。

(2) 平面的基本性质

平面的基本性质用下面三个公理描述（表1—1）。

表1—1

公理 1	如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。	
公理 2	如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这条点的一条直线。	
公理 3	经过不在同一条直线上的三点，可以作而且只可以作一个平面。	

注意：公理3中“不在同一条直线上”的条件不能少，否则，这样的平面不止一个。

由上述公理可以得到下面三个推论：

推论 1 一条直线和这条直线外的一点确定一个平面。

推论 2 两条相交直线确定一个平面。

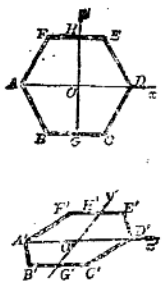
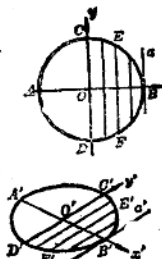
推论 3 两条平行直线确定一个平面。

这里所说的“确定”，即“可以作而且只可以作”的意思。

公理3以及三个推论都是确定平面的条件。

(3) 水平放置的平面图形的直观图的画法 (表1—2)

表1—2

斜二轴测 投影法 (简称斜 二测)	(i) 在图形上取互相垂直的x轴、y轴，把它们画成对应的x'轴、y'轴，使$\angle x'o'y' = 45^\circ$ (或135°)； (ii) 图形上平行于x轴或y轴的线段，分别画成平行于x'轴或y'轴； (iii) 平行于x轴的线段，长度不变，平行于y轴的线段，长度取原长的一半。	
正等轴测 投影法 (简称正 等测)	(i) 与“斜二测”(i)相同，但$\angle x'o'y' = 60^\circ$ (或120°)； (ii) 与“斜二测”(ii)相同； (iii) 平行于x轴或y轴的线段，长度都不变。	

注意：画含有圆的图形时，常用“正等测”，这时水平放置的圆应画成椭圆。画椭圆也可采用近似画法。（画法可参看原教材）。

2. 空间两条直线

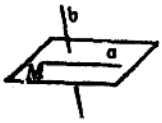
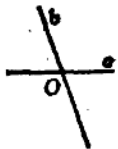
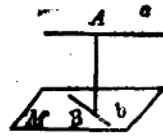
(1) 空间中两条不重合直线的位置关系

共面直线 $\begin{cases} \text{相交：只有一个公共点。} \\ \text{平行：没有公共点。} \end{cases}$

异面直线：没有公共点，不在同一平面内。

(2) 有关异面直线的概念（表1—3）

表1—3

异面直线 定义	不在同一平面内的两条直线，叫异面直线。	
异面直线 所成的角	a, b 是两条异面直线，经过空间中任意一点 O，作 $a' // a$, $b' // b$，则直线 a' 和 b' 所夹的锐角叫异面直线 a 和 b 所成的角。 若 a' 和 b' 所成的角是直角，则说 a 和 b 互相垂直。	 
异面直线 间的距离	与二异面直线都垂直相交的直线称为这二异面直线的公垂线。公垂线在这二异面直线间的线段的长，叫这二异面直线之间的距离。	

注意：(i) 把空间中的直线分类，第一步分类的标准是“共面或异面”，若共面，进一步分类的标准是“公共点的个数”。如果两直线不重合，则根据公共点是零个、1个而再分为平行、相交两类。

(ii) 二异面直线所成角的大小与空间中点的选取无关。为简便起见，常把这点选在二异面直线中的某一条上。

(iii) 空间中两条直线互相垂直，可以相交也可以不相交。异面直线的公垂线必须与二异面直线都相交且垂直。

3. 空间直线和平面

(1) 一条直线和一个平面的位置关系有且只有下列三种情况：

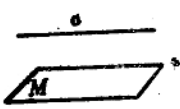
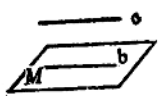
(i) 直线和平面平行——没有公共点；

(ii) 直线和平面相交——只有一个公共点；

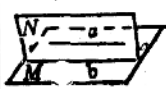
(iii) 直线在平面内——有多于一个公共点（从而有无数个公共点）。

(2) 直线和平面平行的定义、判定定理和性质定理(表1—4)

表1—4

定 义	如果一条直线和一个平面没有公共点，则说这条直线和这个平面平行。	
判 定 定 理	如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行（线线平行，则线面平行）。	

续表1—4

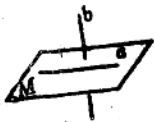
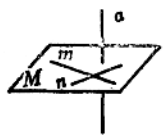
性 质 定 理	如果一条直线和一个平面平行，并且经过这条直线的一个平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行（线面平行，则线线平行）。	
------------	---	---

注意：(i) 直线与平面平行的判定定理中的“平面外的…”这一条件不可少。否则，虽有“线线平行”，也不能保证结论成立。

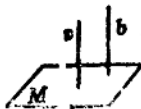
(ii) 直线 a 平行于平面 M 时，不能说直线 a 平行于平面 M 内的任意直线。因为平行直线必共面，故只有 M 内与 a 共面的那些直线才与 a 平行。

(3) 直线和平面垂直的定义、判定定理和性质定理(表1—5)

表1—5

定 义	如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，则说这条直线和这个平面互相垂直。	
判 定 定 理	(i) 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面。 (ii) 两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面。	

续表1—5

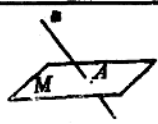
性 质 定 理	垂直于同一平面的两条直线 互相平行。	
------------	-----------------------	---

注意：(i) 直线与平面垂直的判定定理中的“…两条相交直线…”的条件不能少。若改为“…两条平行直线”，则不能保证结论成立。

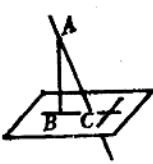
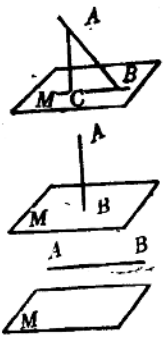
(ii) 空间中，垂直于同一直线的两条直线不一定平行。但两条平行直线中的一条垂直于一条直线，另一条也必垂直于这条直线。

(4) 有关平面的斜线及其射影的一些概念和重要定理
(表1—6)

表1—6

平面的斜 线	如果一条直线和一个平面相交，但不和平面垂直，那么这条直线就叫做这个平面的斜线。	
点与直线 在平面内 的射影	从平面外一点到一个平面引垂线，垂足叫做这点在这个平面内的射影。一条直线上所有点在平面内的射影的集合，叫做这条直线在这个平面内的射影。	

续表1—6

三垂线定理及其逆定理	在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。 在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直。	
直线与平面所成的角	(i) 平面的斜线和它在平面内的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角。 (ii) 如果直线垂直于平面，则说直线与这个平面所成的角是直角。 (iii) 如果直线与平面平行，或直线在平面内，则说直线与平面所成的角是0°的角。	

注意：(i) 由直线在平面内的射影的定义，容易推出平面的斜线或平行直线(或线段)在平面内的射影仍是直线(或线段)。但平面的垂线(或垂线段)在平面内的射影却是一个点。

(ii) 三垂线定理及其逆定理表明，平面M内的直线a与斜线及其射影之一垂直，也必与另一条垂直，直线a可以过斜足，也可以不过斜足。

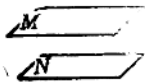
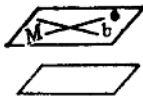
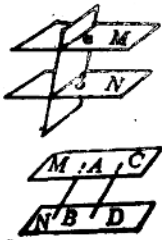
(iii) 直线与平面所成的角 α 由这直线和平面唯一确定，且 $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ 。

4. 空间两个平面

(1) 两个不重合的平面的位置关系有且仅有下列两种情况,

- (i) 平行——没有公共点;
- (ii) 相交——有一条公共直线.

(2) 两个平面平行的定义、判定定理、性质定理(表1—7)
表1—7

定 义	如果两个平面没有公共点, 则说这两个平面互相平行.	
判 定 定 理	如果两条相交直线分别和一个平面平行, 那么过这两条相交直线的平面也和这个平面平行.	
性 质 定 理	(i) 如果两个平行平面分别和第三个平面相交, 那么它们的交线平行. (ii) 夹在两个平行平面之间的平行线段的长相等.	

注意: (i) 一个平面内的两条直线都平行于另一个平面, 这两个平面不一定平行. 这两条直线是“相交”的条件不能少.

(ii) 两个平面平行, 分别在这两个平面内的直线不一定平行. 因为平行直线必共面, 所以分别在这两个平面内的直线也都在第三个平面内时, 这两直线才平行.