庆祝复旦附中建校55周年

谢应平　主编

復旦大學附属中学
数学教学讲稿选辑

学林出版社

High School Affiliated To Fudan University

庆祝复旦附中建校55周年

谢应平 主编

复旦大学附属中学
数学教学讲稿选辑

复旦附中数学组集体编写

总主编 谢应平 郑胤飞

学林出版社

High School Affiliated To Fudan University

图书在版编目(CIP)数据

数学教学讲稿选辑 / 谢应平主编. —上海:学林出版社,2005.7
(复旦附中校庆 55 周年教学丛书 / 谢应平、郑胤飞主编)
IBSN 7-80668-903-6

Ⅰ.数… Ⅱ.谢… Ⅲ.数学课—教学研究—中学
Ⅳ.G633.602
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 060432 号

庆祝复旦附中建校 55 周年

数学教学讲稿选辑

主　　编 —— 谢应平
责任编辑 —— 吴伦仲
封面设计 —— 钱永宁　朱卫平
责任监制 —— 应黎声
出　　版 —— 上海世纪出版集团
学林出版社(上海钦州南路 81 号 3 楼)
电话:64515005　传真:64515005
发　　行 —— 新华书店上海发行所
学林图书发行部(上海钦州南路 81 号 1 楼)
电话:64515012　传真:64844088
印　　刷 —— 上海印刷十厂有限公司
开　　本 —— 787×1092　1/16
印　　张 —— 8.5
字　　数 —— 17 万
版　　次 —— 2005 年 7 月第 1 版
2005 年 7 月第 1 次印刷
印　　数 —— 3000 册
书　　号 —— ISBN 7-80668-903-6/G·310
定　　价 —— 12.00 元

编者的话

复旦附中数学教研组经过几代教师共同努力，在创业、壮大的过程中逐渐形成了自己扎实、严谨的教学风格，创造了一个又一个的辉煌。她的教学的优良传统和特色已为人们所公认。

站在前辈教师的累累硕果前，我们深感自己肩上的责任重大。承上启下，继往开来，继承前辈教师扎实严谨的治学作风、豁达淡泊的人格魅力及其甘于奉献的敬业精神，这是我们再创辉煌的基础。

课堂教学是展现我们教学风格与特点的主要舞台。因此，我们编写《复旦大学附属中学数学教学讲稿选辑》，对55年来附中数学教研组的课堂教学进行总结，以便于同行互相之间的切磋和提高，并向55周年校庆献上一份贺礼。

在编写过程中，我们有幸得到了学校领导的大力支持，特别是曾容老师作了大量的指导工作，在此表示衷心的感谢。

复旦大学附属中学
数学教研组
2005年1月

序

复旦附中走过了辉煌的55年历程，她的教育教学质量始终处于时代的前茅，与时俱进，长盛不衰。其中的原因究竟何在？为了使学校可持续发展，我们经常在思考这个问题。在创建实验性示范性学校的过程中，我们也必须回答这个问题。办好一所学校，教师的敬业精神、专业水平和教学特色是最重要的。现在，我们抓住这个关键，编辑一套教师教学文辑，对内是示范与促进，对外是展示与交流。

复旦附中的数学教学，得到了数学家苏步青、谷超豪、胡和生、李大潜等院士的直接关心和指导.在以特级教师曾容为代表的历任教师的扎实有效的努力下，形成了“过程教学法”的特色.如果说，早先完成的市级科研课题“数学教学应是过程教学”和出版的书籍《返璞归真、滋兰树蕙》是总结了曾容老师个人的教学特色，那么，本书则是反映了全体数学教师的教学现状，他们正在继承和发扬复旦附中的优秀传统，从中可以看到复旦附中引导学生应该学什么和如何学的轨迹。

“长江后浪推前浪”，一所名校必须有名师。复旦附中之所以能取得令人瞩目的成绩，培养出一批又一批的精英人物，说到底，就是因为有一代又一代的名师。在本书出版之际，我衷心祝愿年轻一代教师能坚持附中的教学特色和教学个性，争取把自己修炼成为新一代的名师。

我们不但要把复旦附中的教学搞得更出色，而且要为提高整个中学教学水平作出贡献。

是为序。

谢应平

2005年1月4日

目　录

集　合

张敏峰

所谓集合，就是全体的意思.

在日常生活和科学研究中，我们经常需要研究关于全体的问题，研究全体的情况. 例如我们研究今年高一新生的素质水平(包括政治思想、学习基础、健康水平等)，与往年作比较；或者还要分别研究其中男生全体、女生全体的情况等等.

象这样，研究某些确定的对象的全体所共有的性质是科学研究中的一个重要方面. 用数学语言来讲，就是要研究集合及其性质.

集合是指具有某些确定对象的全体. 什么对象的全体就是什么对象的集合. 其中每个对象称为该集合的元素. 全体包含两层意思，其一是“在的都是”，其二是“是的都在”. 例如，要讲教室里的学生是高一(6)班学生的全体，就必须满足两个条件，一是在教室里的学生都是高一(6)班的学生，没有混进别班的学生，即不能多出来. 二是不在这个教室的学生都不是高一(6)班学生，也就是说是高一(6)班学生都在这个教室里，即不能遗漏.

集合的元素具有两个特征：一是集合的性质是确定的，所说的“某个性质”是要能用它来判别任何事物要么具有这个性质，要么不具有这个性质，两者必居其一，不能模棱两可，含糊不清；二是集合中的元素是各不相同的，也就是说集合中的任何两个元素都是不同的对象，即集合中的元素不重复出现.

【例 1】考虑下面每个说法的含义：

1. 非负整数集合(记为 $\mathbf{N}$)
2. 正整数集合(记为 $\mathbf{N}^*$)
3. 整数集合(记为 $\mathbf{Z}$)
4. 有理数集合(记为 $\mathbf{Q}$)
5. 实数集合(记为 $\mathbf{R}$)
6. 正有理数集合(记为 $\mathbf{Q}^+$)
7. 负有理数集合(记为 $\mathbf{Q}^-$)
8. 正实数集合(记为 $\mathbf{R}^+$)
9. 负实数集合(记为 $\mathbf{R}^-$)

习惯上常用大写字母表示集合，例如集合 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 等；用小写的字母表示元素，例如 a、b、c 等. 如果 a 是集合 $\mathbf{A}$ 中的元素，就记作 $a\in\mathbf{A}$，读作“a 属于 $\mathbf{A}$”；如果 a 不是集合 $\mathbf{A}$ 中元素，就记为 $a\notin\mathbf{A}$，读作“a 不属于 $\mathbf{A}$”.

【例 2】将下列各集合表示出来：(通过例题来引出集合的表示法)

1. 小于 10 的正奇数集合
2. 小于 10 的质数集合
3. 正奇数集合
4. 正偶数集合
5. 不等式 $3x+2>0$ 的解的集合(解集)
6. 直角坐标平面上的第一象限的点的集合

集合的表示常用列举法和描述法. 将集合中的元素一一列举出来(不考虑元素的顺序)，并且写在大括号内，这种表示集合的方法叫列举法. 在大括号内先写出这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线后面写上集合中元素所共同具有的特性，即形如 $\{x\mid x$ 满足的性质 $p\}$，这种表示集合的方法叫做描述法.

若对象只有一个，设它为 a，则 a 的全体也就是 a 的集合记为 $\{a\}$，a 是 $\{a\}$ 中的唯一元素，

$a\in\{a\}$.(注 $a\neq\{a\}$)

若某种对象不存在,就说这种不存在的对象的全体为空集,记为 ϕ. 规定任何空集都是同一个集,任何对象都不是 ϕ 中的元素,ϕ 中没有元素(或定义空集是一个集,它不含任何元素). 注意 $\phi\neq\{\phi\}$.

【例 3】用列举法表示下列集合:

1. $\left\{x\mid\frac{14}{x}\in\mathbf{Z},\text{且 }x\in\mathbf{Z}\right\}$
2. $\{(x,y)\mid x\in\{0,1\},y\in\{0,1\}\}$

解:1. $\{1,2,7,14,-1,-2,-7,-14\}$

2. $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

命题及其四种形式

李朝晖

命题是用陈述句表示对事物判断. 简单的说,命题即为判断:是或者不是. 判断要有依据(条件)和被判断的对象(结论),因此我们所讨论的命题都是由条件和结论组成的.

【例】1. 凸四边形内接于圆,则对角互补;

2. 互为补角的两个角不相等;

3. $\{1\}$不是$\{1,2,3\}$的真子集.

一般的,如果由命题条件 α 可以证出命题结论 β 成立,就说由 α 可以证出 β,并用记号 $\alpha\Rightarrow\beta$ 表示.

命题的四种形式

将任一命题的条件和结论的肯定和否定重新配置,构成无矛盾的另三种形式,共四种形式

例如,对凸四边形就关于"内接于圆"(简记为 P)和"对角互补"(简记为 Q)的是和否作为条件和结论组成命题(判断),有如下四种形式:

(1) 若内接于圆,则对角互补　　(若 P 则 Q)(原命题)

(2) 若对角互补,则内接于圆　　(若 Q 则 P)(逆命题)

(3) 若不内接于圆,则对角不互补　　(若 $\overline{P}$ 则 $\overline{Q}$)(否命题)

(4) 若不对角互补,则不内接于圆　　(若 $\overline{Q}$ 则 $\overline{P}$)(逆否命题)

又如,设以 P 表示"三角形全等",以 Q 表示"三角形面积相等". 同样可以写出命题的四种形式.

1. 若 P 则 Q;　2. 若 Q 则 P;　3. 若 $\overline{P}$ 则 $\overline{Q}$;　4. 若 $\overline{Q}$ 则 $\overline{P}$

四种形式中,

1 与 2,3 与 4 是互逆的;

1 与 3,2 与 4 是互否的;

1 与 4,2 与 3 是互为逆否的.

四种形式之间的关系可用图 1 表示：

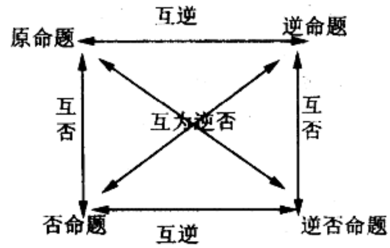

图 1

在上面所举的例子中，容易看出，第一个四种形式都成立；第二个有两种形式成立，两种不成立. 也很容易举出四种形式都不成立的例子. 但有没有四种形式中，只成立一种，而不成立三种；或者成立三种，而不成立一种的例子呢？肯定没有，因为原命题与逆否命题是同一回事，命题经过逆与否就还原为原来的，当然这只是直觉的，需要加以证明.

定理：已知成立"若 P 则 Q"($P\Rightarrow Q$)，求证：成立"若 $\overline{Q}$ 则 $\overline{P}$"($\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$)

证明：反证法. 已知成立 $P\Rightarrow Q$，若不成立 $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$，则成立 $\overline{Q}\Rightarrow P$，

而已知 $P\Rightarrow Q$，从而 $\overline{Q}\Rightarrow Q$，矛盾！所以 $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$ 是成立的.

同样可以证明，若成立 $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$，则成立 $P\Rightarrow Q$.

定义：若两个命题 A 和 B 是可以互相推证的：$A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，则称 A、B 为等价命题，简记为$A\Leftrightarrow B$

由前面的证明可以知道，原命题和逆否命题是等价命题；同样逆命题和否命题是等价命题.

命题是否只有上面的四种形成，为什么？

设 A、B 为两个命题，连同它们的否定 $\overline{A}$、$\overline{B}$，共四个，分别作为条件和结论，写成(若，则)形式，所有可能的写法只有 12 个.

(1) (A,B)，	(2) $(A,\overline{A})$，	(3) $(A,\overline{B})$，
(4) (B,A)，	(5) $(B,\overline{A})$，	(6) $(B,\overline{B})$，
(7) $(\overline{A},A)$，	(8) $(\overline{A},B)$，	(9) $(\overline{A},\overline{B})$，
(10) $(\overline{B},A)$，	(11) $(\overline{B},B)$，	(12) $(\overline{B},\overline{A})$.

其中(2)、(6)、(7)、(11)是矛盾的，不能成立；而(3)与(1)矛盾，取(1)舍(3)，又(5)与(1)矛盾，(10)与(1)矛盾，(8)与(4)矛盾，取(4)舍(8)，只留下四个(1)、(4)、(9)、(12)，并且是可以实现的.

充分条件和必要条件

李朝辉

这节课我们学习充分条件和必要条件. 我们做事情都需要具备条件. 例如：

1. 做一件衬衫，需要布料，到布店去买，店员说买 3 米就足够了. 这就产生了 3 米布料与做一件衬衫够不够的关系.

2. 一人病重，呼吸困难，急诊住院接氧气，这就产生了接氧气和活命与否的关系.

下面我们来讨论条件与事件的两种关系.

像例 1 的条件足够使事件完成，我们就说这种条件是充分条件.

充分条件：若条件 A 足以使事件 B 成立，则称条件 A 为事件 B 成立的充分条件，简称 A 是 B 的充分条件.（充分为足够之意，保证能由 A 证得 B，$A\Rightarrow B$）

像例2的条件，未必能使事件完成，但要活命，接氧气使必不可少的，少则没命.我们称这种条件为必要条件.

必要条件：若没有条件 A，则事件 B 不能成立，就称条件 A 为事件 B 成立的必要条件，简称 A 是 B 的必要条件.（必要为不可缺少之意，少则不成. $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$）

由于逆否命题与原命题等价（$B\Rightarrow A$ 与 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$ 等价），故若由 B 能证得 A，亦即 A 是 B 的必要条件.

充分条件可能会有多余浪费，必要条件可能还不够使事件成立，既是必要条件又是充分条件称为**充要条件**（不多不少）

【例1】记必要不充分条件为(A)，充分不必要条件为(B)，充要条件为(C)，既非充分又非必要条件为(D)，判断下列各题中条件与事件的关系.

1. $a<0$.是 $a^2>0$ 的________
2. 三角形两边相等是它成为直角三角形的________
3. 凸四边形的两条对角线长相等是它成为矩形的________
4. 凸四边形对角互补是它内接于圆的________
5. 若 a、b、c 都是实数，则 $a>b$ 是 $ac^2>bc^2$ 的________

答案：1. B 2. D 3. A 4. C 5. A

一般说来，现实生活中，做一件事情，没有单一的充分条件使它成立；破坏一件事情，也没有单一的必要条件.

前面我们已经学习过命题的四种形式：原命题 $A\Rightarrow B$，逆命题 $B\Rightarrow A$，否命题 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$，逆否命题 $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$；我们又知道 $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$ 等价于 $A\Rightarrow B$；$\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$ 等价于 $B\Rightarrow A$.若等价命题只算做一个，则命题的四种形式，基本上就是两种形式 $A\Rightarrow B$ 与 $B\Rightarrow A$.

若将 A 看作条件，B 看作事件，则 $A\Rightarrow B$ 表示 A 是 B 的充分条件，而 $B\Rightarrow A$ 表示 A 是 B 的必要条件；若将 A 看作事件，B 看作条件，情况相反.

由此，前面学习的命题的四种形式在表面上看没有什么应用，但在实质上它可归结为充要条件，有着广泛的应用.

【例2】若 $\alpha\Rightarrow\overline{\beta}$，$\overline{\gamma}\Rightarrow\beta$，则 γ 是 α 的什么条件.

解：∵$\overline{\gamma}\Rightarrow\beta$ 等价于 $\overline{\beta}\Rightarrow\gamma$（逆否命题），

∴有 $\alpha\Rightarrow\overline{\beta}$，$\overline{\beta}\Rightarrow\gamma$ 得到 $\alpha\Rightarrow\gamma$，即：$\overline{\gamma}\Rightarrow\overline{\alpha}$

∴γ 是 α 的必要条件.

二次函数图像的应用

张敏峰

【教学目的】

1. 引导学生掌握二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 与和它对应的一元二次方程 $f(x)=0$ 的关系，并利用这些关系来讨论方程的解.

2. 使学生能灵活运用二次函数的图像来讨论二次方程根的分布的问题，确定方程中有关参数的范围.

【教学方法】启发式，数形结合的思想方法.

【教学重点、难点】怎样把数和形有机的结合起来，如何对已知条件进行转化.

【教学过程】

二次函数与二次方程、二次不等式有着密切的联系，解二次方程实质上就是求二次函数的零点，反映在图像上就是求抛物线与 x 轴交点的横坐标；当二次函数的值不为零时，就成为二次不等式，因此解二次不等式，可借助于二次函数的图像.

如下表：(二次函数与二次方程的简单的关系)

$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$	$\Delta=b^2-4ac$	$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$
与 x 轴有两个交点	$\Delta>0$	有两个不相等的实数根
与 x 轴有一个交点	$\Delta=0$	有两个相等的实数根
与 x 轴没有交点	$\Delta<0$	没有实数根

【例 1】已知二次方程 $x^2+2kx+2k+1=0$，当 k 为何值时

1. 方程有两个不相等的实数根、两个相等的实数根、没有实数根？
2. 方程有一根大于 4，一根小于 4？
3. 方程的两根在 -4 和 0 之间？

解：1. $\Delta=4k^2-4(2k+1)=4(k^2-2k-1)$

方程有两个不相等的实数根，$\Delta>0$，$k>1+\sqrt{2}$ 或 $k<1-\sqrt{2}$；

方程有两个相等的实数根，$\Delta=0$，$k=1\pm\sqrt{2}$

方程没有实数根，$\Delta<0$，$1-\sqrt{2}<k<1+\sqrt{2}$.

2. 法 1：(用韦达定理)

$$\begin{cases}\Delta>0,\\(x_1-4)(x_2-4)<0,\end{cases}\quad 即\quad\begin{cases}k>1+\sqrt{2}\text{ 或 }k<1-\sqrt{2}\\2k+1+8k+16<0\end{cases}$$

$$\therefore\qquad k<-\frac{17}{10}.$$

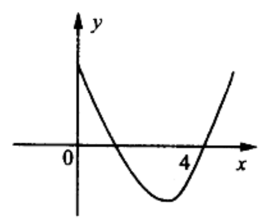

图 1

法 2：如图 1，即要求所对应的二次函数的图像与 x 轴的两个交点在点 $(4,0)$ 的两侧.

令 $f(x)=x^2+2kx+2k+1=(x+k)^2-k^2+2k+1$，则

$f(4)<0$，即 $\qquad 16+8k+2k+1<0$，

$$\therefore\qquad k<-\frac{17}{10}.$$

3. 分析：此题用韦达定理做比较困难，但若转化为它所对应的二次函数的图像与 x 轴交点的情况，则问题就显得容易了.

如图 2：

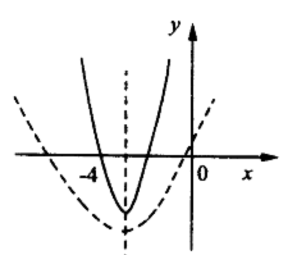

图 2

易知 $\begin{cases}\Delta>0\\-4<-k<0\end{cases}$

但这些条件是否就足够了？是否就能保证图像与 x 轴的两个交点在 $(-4,0)$ 和 $(0,0)$ 之间？如图虚线，说明还不够.

$$\because\quad \begin{cases} f(-4)>0, \\ f(0)>0, \\ \Delta\geqslant 0, \\ -4<-k<0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 17-6k>0, \\ 2k+1>0, \\ k\geqslant 1+\sqrt{2}\text{ 或 }k\leqslant 1-\sqrt{2}, \\ -4<-k<0. \end{cases}$$

$$\therefore\quad 1+\sqrt{2}\leqslant k<\frac{17}{6}.$$

题后评：要注意不要遗漏条件，自己所给的条件是否满足，可以通过移动对称轴，看是否有满足条件而不满足结论的，或上下移动图像，看是否有别的情况.

【例 2】证明：若 $a<b<c$，则二次方程 $(x-a)(x-c)+(x-b)^2=0$ 有两个不同的实根，并且一个根在 a 与 b 之间，另一个根在 b 与 c 之间.

分析：本题形式上是一个二次方程的问题，但实际上需利用二次函数的图像性质来作出证明，如图 3.

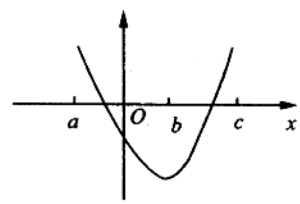

图 3

证明：设 $f(x)=(x-a)(x-c)+(x-b)^2$，

$\because\quad a<b<c,$

$\therefore\quad f(a)=(a-b)^2>0,$

$f(b)=(b-a)(b-c)<0,$

$f(c)=(c-b)^2>0.$

$\therefore$ 二次函数 $f(x)=(x-a)(x-c)+(x-b)^2$ 的图像与 x 轴的两个交点分别在 a 与 b 之间、b 与 c 之间，

$\therefore$ 原二次方程有两个实根 α、β，使得 $a<\alpha<b$，$b<\beta<c$.

【例 3】 方程 $x^2+2ax+k=0$ 与 $x^2+2ax+(a-4)=0$ 中，第一个方程的根总在第二个方程的两根之间，求实数 a、k 应满足的条件.

分析：此题也很难从方程的角度来求解，考虑到它们所对应的函数 $f(x)=x^2+2ax+k=(x+a)^2+k-a^2$，$g(x)=x^2+2ax+(a-4)=(x+a)^2+a-4-a^2$，发现它们的对称轴重合，开口方向一致，形状相同，所以只要第一条抛物线的顶点在第二条抛物线的顶点上方时即满足条件.

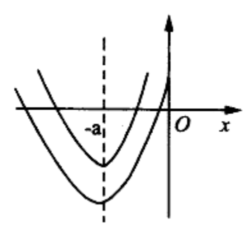

图 4

解：如图 4：$a-4-a^2<k-a^2\leqslant 0$

$\therefore a-4<k\leqslant a^2.$

（注：其中 $k-a^2\leqslant 0$ 是保证这两个方程有解）

小结：本节主要讲述的是如何来判断二次方程的根的分布，而这些仅仅靠判别式和韦达定理很难解决，但若从它所对应的函数来看，问题就转化为二次函数图像与 x 轴的交点问题，这样我们就可以利用数形结合找出问题的解.

基本不等式

张建国

一、基本不等式的引出及其推广

前面我们研究了不等式的性质及其解法，但是有一些不等式在以后研究问题时经常用得

到，今天这节课我们就来研究几个重要不等式及其应用．我们知道对于任意实数 a 和 b 都有 $(a-b)^2\geqslant 0$，即任意一个实数的平方都是非负的，当 $a\neq b$ 时，$(a-b)^2>0$，当 $a=b$ 时，$(a-b)^2=0$，变形后有

$a^2+b^2-2ab\geqslant 0$，从而 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，称之为基本不等式．

基本不等式 1：对于任意 $a,b\in\mathbf{R}$，有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立．

问题：这个结论上面我们已证过，现在，大家从这个基本不等式出发，通过类比联想，能否联想出类似的结论或者把上述结论加以推广？

分析：上述不等式的左端是两项的平方和，如果项数多一些，结果会怎样？

有同学可能会猜出：$a^2+b^2+c^2\geqslant 2ab+2bc+2ac$，这对吗？结论是否正确必须有严格的证明．

证明：由 $a^2+b^2\geqslant 2ab, b^2+c^2\geqslant 2bc, a^2+c^2\geqslant 2ac$ 三个不等式累加可以得到：

$2a^2+2b^2+2c^2\geqslant 2ab+2bc+2ac$，两边同除以 2 便得到：

推论 1：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$，$(a,b,c\in\mathbf{R})$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立．

这样，上述猜想不对，这里可以提问学生：$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 中的 2 来源于哪里？实际上这个基本不等式就是 $a^2+b^2\geqslant ab+ba$，这个规律和推论 1 是一致的，按照这个规律，我们可以得到以下推论：

推论 2：$a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant ab+bc+cd+da$，$(a,b,c,d\in\mathbf{R})$，当且仅当 $a=b=c=d$ 时等号成立．

证明：由 $a^2+b^2\geqslant 2bc, b^2+c^2\geqslant 2bc, c^2+d^2\geqslant 2cd, d^2+a^2\geqslant 2ad$ 相加便得到．

推论 3：$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2\geqslant a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_na_1$，$(a_1,a_2,\cdots a_n\in\mathbf{R})$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立．

证明过程与上面同．

以上我们猜想的思路是把项数增加，而次数不变，那么请同学再考虑一下有没有其它的猜想呢？如果次数升高呢？相应地项数会怎么样呢？

有同学会想到：$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，但猜想正确与否，要给出证明．

证明：（比较两个数大小最基本的方法就是做差）

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3-3abc&=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc\\&=(a+b+c)[(a+b)^2+c^2-(a+b)c]-3ab(a+b+c)\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\end{aligned}$$

上述式子是非负的吗？如果不是应加什么条件？（提问学生）

上述式子要在 $a+b+c>0$ 时才是非负的，所以上述猜想应加条件：

$a,b,c\in\mathbf{R}^+$，由此得到：

推论 4：$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$，$(a,b,c\in\mathbf{R}^+)$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立．

按照上述规律我们可以得到：

推论 5：$a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4abcd$　$(a,b,c,d\in\mathbf{R}^+)$，当且仅当 $a=b=c=d$ 时等号成立．

推论 6：$a_1^n+a_2^n+a_3^n+\cdots+a_n^n\geqslant na_1a_2\cdots a_n$ $(a_1,a_2\cdots a_n\in\mathbf{R}^+)$ 当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立．

推论 6 的证明在现在所学的知识范围内还不能证明，暂时承认是正确的．

上面的六个推论是我们根据基本不等式 1 经过类比联想而得到的，并且给出了证明. 上面的猜想有一个共同特点，即都是升次，那么可以降次吗？如果降次的话，会有什么结论呢？（让学生猜想）

实际上，要降次的话，就是代换思想的运用，比如对于基本不等式 1：$a^2+b^2\geqslant 2ab$，令 $A=a^2, B=b^2(A>0,B>0)$，取 $a=\sqrt{A}, b=\sqrt{B}$，代入到原不等式中，得到 $A+B\geqslant 2\sqrt{AB}(A,B\in\mathbf{R}^+)$，这种代换就是把未知的问题转化为已知的问题，由此得到：

基本不等式 2：$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},(a,b\in\mathbf{R}^+)$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

把上面的推论 4 到推论 6 按照上面的方法依次代换，又可以得到以下推论：

推论 4′ $\dfrac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}\quad(a,b,c\in\mathbf{R}^+)$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

推论 5′ $\dfrac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}\quad(a,b,c,d\in\mathbf{R}^+)$，当且仅当 $a=b=c=d$ 时等号成立.

推论 6′ $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\quad(a_1,a_2\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+)$，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

这里利用的是数学中的代换思想，从而把未知转化为已知，这里要向学生强调这种研究问题的方法.

有关概念：设 $a_1,a_2,\cdots a_n\in\mathbf{R}^+$，则称 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 为这 n 个正数的算术平均数，$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 称为这 n 个正数的几何平均数，由前面的推论知，n 个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

二、基本不等式的应用

对于不等式 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\,(a_1,a_2\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+)$，有它的变形式：$a_1a_2\cdots a_n\leqslant\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n,(a_1,a_2\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+)$，注意这里等号成立条件：（提问学生），由于这是前面不等式的变形形式，所以等号成立的条件相同，即当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.

根据上面不等式及其变形形式，基本不等式有两方面的应用：

(1) 根据 $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 可以求 n 个正数 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 和的最小值，这里要引导学生考虑取得最小值的条件：①乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 为定值（提问学生为什么）②等号能成立，即 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 可以取得到.

(2) 根据 $a_1a_2\cdots a_n\leqslant\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n$ 可以求乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值，这里也要引导学生考虑取得最大值的条件：①和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 为定值（提问学生为什么）②等号能成立，即 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 可以取得到.

（注：以上两方面的应用在讲完函数的有关概念后再练习）

【例 1】已知 $a>0,b>0$，求证：$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2$，并指出等号成立的条件.

解：由基本不等式 2 知：$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=2$，当且仅当 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$ 时等号成立，即 $a=b$ 时等号成立.

偶函数、奇函数

姚　莉

【教学目的】

让学生了解我们为什么要研究函数的奇偶性这一基本性质，我们又如何去研究它，引导学生发现、探索函数奇偶性的需要、可能，以及研究方法，使之顺应知识的发生、发展的自然过程，在传授知识的同时，培养学生探求未知、解决问题的能力.

【教学过程】

1. 提出问题

在讨论了二次函数的基础上，大家知道 $f(x)=x^2$ 的图像关于 y 轴对称，那么，怎样的函数的图像关于 y 轴对称？又如何来判断一个函数的图像关于 y 轴对称？

我们从如果一个函数 $y=f(x)$ 的图像 C 关于 y 轴对称出发，找找看函数会有怎样的特征？

2. 分析问题

在 C 上任取点 $P(a,b)$，则 $b=f(a)$，设点 P 关于 y 轴的对称点为 $P'(-a,b)$，

$\because C$ 关于 y 轴，　$\therefore P'$是 C 上的点

$\therefore b=f(-a)$，　$\therefore f(-a)=f(a)$.

由点 P 的任意性可得，任意 $x\in \mathbf{D}$，有 $f(-x)=f(x)$，也就得到、即已证得：

（一）如果函数 $y=f(x)$ 的图像 C 关于 y 轴成轴对称图形，那么对于任意 $x\in \mathbf{D}$ 有 $f(-x)=f(x)$.

（提出问题：是否就此找到了判别函数图像关于 y 对称的方法？也就是原命题成立，它的逆命题是否成立？再证明.）

（二）如果函数 $y=f(x)$ 对于任意 $x\in \mathbf{D}$，有 $f(-x)=f(x)$，那么函数图像 C 关于 y 轴成轴对称图形.

证明：在 C 上任取点 $P(a,b)$，则 $b=f(a)$，

设点 P 关于 y 轴的对称点 $P'(-a,b)$，

$\because a\in \mathbf{D}, f(-a)=f(a)$，

$\therefore f(-a)=b$，即点 $P'(-a,b)$是 C 上的点，由点 P 任意性可得，C 关于 y 轴对称.

到此我们解决了前面提出的问题，也就是得到判断函数图像关于 y 轴成轴对称的充要条件.

3. 解决问题

定理一：函数图像关于 y 轴成轴对称的充要条件是：对于任意 $x\in \mathbf{D}$，都有 $f(-x)=f(x)$.

$y=x^2, y=x^4, y=x^6, \cdots, y=x^{2n}(n\in \mathbf{N}^*)$的图像都关于 y 轴对称，我们给这类函数一个名称：

定义(一)：如果函数 $y=f(x)$，对于任意 $x\in \mathbf{D}$，都有 $f(-x)=f(x)$成立，那么我们称函数 $y=f(x)$为偶函数.

当然并不仅仅只有 $y=x^2$、$y=x^4$、$y=x^6$、$\cdots$，$y=x^{2n}(n\in \mathbf{N}^*)$这类函数是偶函数，如

$y=|x|$，∵任意 $x\in \mathbf{D}$，$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$，∴它是偶函数.

让学生判断函数 $y=|x|(x\in[-1,2])$是否是偶函数，∵$-2\notin[-1,2]$，∴不是偶函数，提出函数定义域关于原点对称的必要性.

4. 拓展问题

启发学生找出他们熟悉的函数 $y=x$、$y=\frac{1}{x}$，提出这些函数的图像具有什么对称性的问题？关于原点成中心对称.

完全类似地得到函数 $y=f(x)$的图像关于原点成中心对称的充要条件.

定理二：函数 $y=f(x)$ 的图像关于原点成中心对称的充要条件是：对于任意 $x\in\mathbf{D}$，都有$f(-x)=-f(x)$.

（证明完全类似定理一，请学生课后自己证明.）

定义(二)：如果函数 $y=f(x)$，对于任意 $x\in\mathbf{D}$，都有 $f(-x)=-f(x)$成立，那么我们称函数$y=f(x)$为奇函数.

当然也同样不只是 $y=x$、$y=x^3$、$y=x^5$、…，$y=x^{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$是奇函数，

如 $y=\begin{cases}x^2.(x>0)\\0.(x=0)\\-x^2.(x<0)\end{cases}$ 是奇函数.

5. 例题：

【例 1】 判断下列函数的奇偶性：

1. $y=x^3-\frac{1}{x}$　　2. $y=\frac{(x+1)x^2}{x+1}$　　3. $y=x+1$

解：1. 任意 $x\in\mathbf{D}=\{x|x\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$，

$$\because f(-x)=(-x)^3-\frac{1}{(-x)}=-x^3+\frac{1}{x}=-(x^3-\frac{1}{x})=-f(x)$$

∴此函数为奇函数.

2. ∵$D=\{x|x\neq 1$ 且 $x\in\mathbf{R}\}$，$1\in\mathbf{D}$ 但$-1\notin\mathbf{D}$，

∴此函数既不是奇函数也不是偶函数.

3. 取 $x=1$，∵$f(-1)=0$，$f(1)=2$，

∴$f(-1)\neq f(1)$且 $f(-1)\neq -f(1)$，

∴此函数既不是偶函数也不是奇函数.

6. 思考问题

1. 函数图像有关于 y 轴对称、原点成中心对称、有没有关于 x 轴对称？
2. 我们在课上讨论了偶函数、奇函数，还有既不是偶函数也不是奇函数的函数，那么是否有既是偶函数又是奇函数的函数？

函数的单调性

李朝晖

前面学习了函数，在初中学习的具体函数的基础上，我们给函数下了一个严格、确切的定