新课标

五星级题库

难题解析

高中数学

主编 潘国权

上海科技教育出版社

世纪集团

新课标五星级题库

难题解析

ISBN 7-5428-3822-9

9 787542 838223 >

易文网：www.ewen.cc

ISBN 7-5428-3822-9/O·430

定价: 22.50 元

新课标

五星级题库

Super Star

难题解析

高中数学

主编 潘国权

上海科技教育出版社

新课标五星级题库难题解析
高中数学

主　　编： 潘国权
出版发行： 世 纪 出 版 集 团
上海科技教育出版社
（上海市冠生园路 393 号　邮政编码 200235）
网　　址： www.ewen.cc
www.sste.com
经　　销： 各地新华书店
印　　刷： 常熟市华顺印刷有限公司印刷
开　　本： 787×1092　1/16
字　　数： 400 000
印　　张： 16.75
版　　次： 2005 年 7 月第 1 版
印　　次： 2005 年 7 月第 1 次印刷
印　　数： 1－5 000
书　　号： ISBN 7－5428－3822－9/O・430
定　　价： 22.50 元

★★★★★

前　言
FORWORD

《新课标五星级题库》自出版以来，因其内容严格遵照国家新课标要求，题型涵盖升学考试的各种形式，深受广大读者的欢迎，一版再版。同时，我们也收到了大量的读者来信，希望能有一本指导他们解答《新课标五星级题库》中的难题、帮助他们尽快提高解题能力的书籍。为此，我们组织编写了这套《新课标五星级题库难题解析》，分数学、物理、化学3册。

《新课标五星级题库难题解析》从《题库》的"阶梯训练"部分中按高考各知识点的比例和难易程度精心选择了具有代表性和创新性的题目数百道。每题或以分析解题思路为主，提示多种解题方法；或用说明形式以点带面总结同类型题目的解题方法，帮助学生提高解题能力，起到举一反三的作用。

《新课标五星级题库难题解析》是《题库》的配套书，其中所选题目的序号与《题库》中相同，不另编序号，便于读者查阅。

本书由潘国权老师组织编写。一由周伯其老师编写，二、三由胡飞英老师编写，四、十二由赵一平老师编写，五、十一由斯理炯老师编写，六由许诚老师编写，七由蒋立光老师编写，八、十三由王哲平老师编写，九、十由洪立松老师编写。最后的统稿工作由潘国权老师完成。

目　　录

一、函　　数

集合与简易逻辑

横 向 拓 展

★★★1. 已知集合 $A\subseteq\{0,1,2,3\}$，且 A 中至少有一个奇数，则这样的集合共有(　　).【3】

(A) 11 个　　(B) 12 个　　(C) 15 个　　(D) 16 个

略解　(1) 若 A 中只有一个奇数，则这样的 A 共有 $C_2^1\cdot 2^2=8$(个)；

(2) 若 A 中有两个奇数，则这样的 A 共有 $C_2^2\cdot 2^2=4$(个).

综合(1)、(2)，共有 $8+4=12$(个).

∴　正确选项为 B.

★★★2. 已知 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-4}{x-2}=3\right.\right\}$，$B=\{(x,y)\mid y=3x-2\}$，则 $\complement_U A\cap B$ 是(　　).【3】

(A) $\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-4}{x-2}=3\right.\right\}$　　(B) $\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-4}{x-2}\neq 3\right.\right\}$

(C) $\varnothing$　　(D) $\{(2,4)\}$

略解　由集合 A：$\dfrac{y-4}{x-2}=3$，

∴　$y=3x-2(x\neq 2)$，　∴　$\complement_U A=\{(x,y)\mid y\neq 3x-2$ 或 $x=2\}$，

∴　$\complement_U A\cap B=\{(x,y)\mid y=3x-2$ 且 $x=2\}=\{(2,4)\}$.　∴　正确选项为 D.

★★★3. 定义集合 A 与 B 的"差集"为：$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$，若集合 $M=\{1,2,3,4,5\}$，$N=\{2,3,6\}$，则 $M-N$ 为(　　).【3】

(A) M　　(B) N　　(C) $\{1,4,5\}$　　(D) $\{6\}$

略解　$A-B$ 表示的是所有在 A 中且不在 B 中的元素的集合，即为在集合 A 中除去集合 A 与集合 B 的公共元素后剩余的元素组成的集合.

∵　$M\cap N=\{2,3\}$，　∴　$M-N=\{1,4,5\}$.

∴　正确选项为 C.

★★★4. 若 $a\in\mathbf{R}$，$b\in\mathbf{R}$，$c\in\mathbf{R}$，且 $abc\neq 0$，$\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{|abc|}{abc}$ 的值的集合为(　　).【3】

(A) $\{4,-4\}$　　(B) $\{0,4\}$　　(C) $\{-4,0\}$　　(D) $\{-4,0,4\}$

略解　分以下四种情况讨论：

(1) 三个均为正数，则原式$=4$；　　(2) 两正数一负数，则原式$=0$；

(3) 两负数一正数，则原式$=0$；　　(4) 三个均为负数，则原式$=-4$.

∴　原式的取值为 4、0 或 -4.

∴ 正确选项为D.

★★★5. 若$\{(x,y)|ax+y-b=0\}\cap\{(x,y)|x+ay+1=0\}=\varnothing$,则( ).【2】

(A) $a=1$ 且 $b\neq-1$　　(B) $a=1$ 且 $b\neq1$

(C) $a=\pm1$ 且 $b\neq\pm1$　　(D) $a=1$ 且 $b\neq-1$ 或 $a=-1$ 且 $b\neq1$

略解 由题意得方程组 $\begin{cases}ax+y-b=0, & ①\\ x+ay+1=0, & ②\end{cases}$

无解,

①$\times a-$②,得 $(a^2-1)x=ab+1$,

∴ $a^2-1=0,ab+1\neq0$.

当$a=1$时,$ab+1\neq0$, ∴ $b\neq-1$;

当$a=-1$时,$ab+1\neq0$, ∴ $b\neq1$. ∴ 正确选项为D.

★★★6. 若集合$A=\{1,2,x\}$,$B=\{1,x^2\}$,且$A\cup B=\{1,2,x\}$,那么满足条件的x值共有( ).【2】

(A) 1个　　(B) 2个　　(C) 3个　　(D) 4个

略解 ∵ $A\cup B=\{1,2,x\}=A$,

∴ (1) $x^2=2,x=\pm\sqrt{2}$,经检验,符合要求;

(2) $x^2=x,x=0$ 或 1.

当$x=1$时,$A=\{1,2,1\}$,与互异性矛盾;当$x=0$时,经检验成立.

∴ $x=0$ 或 $x=\pm\sqrt{2}$. ∴ 正确选项为C.

★★★7. 关于x的不等式$ax^2-bx+c<0$的解集为$(-\infty,\alpha)\cup(\beta,+\infty)$,其中$\alpha<\beta<0$,则不等式$cx^2+bx+a>0$的解集为( ).【2】

(A) $\left(\frac{1}{\beta},\frac{1}{\alpha}\right)$　　(B) $\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\right)$　　(C) $\left(-\frac{1}{\beta},-\frac{1}{\alpha}\right)$　　(D) $\left(-\frac{1}{\alpha},-\frac{1}{\beta}\right)$

略解 由题意得$a<0$,α、β为方程$ax^2-bx+c=0$的两根.

即$\begin{cases}a<0,\\ \frac{b}{a}=\alpha+\beta,\\ \frac{c}{a}=\alpha\beta,\end{cases}$则$cx^2+bx+a>0$可变为$a\alpha\beta x^2+a(\alpha+\beta)x+a>0$.

∵ $a<0$, ∴ $\alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$, ∴ $(\alpha x+1)(\beta x+1)<0$.

又 $\alpha<\beta<0$, ∴ $\alpha\beta>0$,且$-\frac{1}{\alpha}<-\frac{1}{\beta}$, ∴ $\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)\left(x+\frac{1}{\beta}\right)<0$,

∴ $-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$. ∴ 正确选项为D.

★★★8. 若α、β是关于x的方程$x^2-(k-2)x+k^2+3k+5=0$的两个实根,则$\alpha^2+\beta^2$的最大值等于( ).【2】

(A) 19　　(B) 18　　(C) $\frac{50}{9}$　　(D) -6

略解 ∵ α、β是方程的两个实根, ∴ $\alpha+\beta=k-2,\alpha\beta=k^2+3k+5$,

∴ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-k^2-10k-6=-(k+5)^2+19$.

∵　原方程有两个实根，　∴　$\Delta=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\geqslant 0$，

∴　$-4\leqslant k\leqslant -\frac{4}{3}$.　∴　$k=-4$ 时，$\alpha^2+\beta^2$ 取最大值 18.

∴　正确选项为 B.

***9. 集合 A 有 10 个元素，集合 B 有 6 个元素，全集 U 有 18 个元素，$A\cap B\neq\varnothing$，设 $\complement_U(A\cup B)$ 有 x 个元素，求由 x 的所有元素组成的集合.【2】

略解　如图 1-1，设 $A\cap B$ 中元素个数为 y.

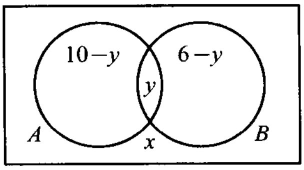


图 1-1

∵　A 中有 10 个元素，B 中有 6 个元素，且 $A\cap B\neq\varnothing$，

∴　$1\leqslant y\leqslant 6$. 又　∵　全集有 18 个元素，

∴　$10-y+y+6-y+x=18$，　∴　$x=y+2$.

∵　$1\leqslant y\leqslant 6$，　∴　$3\leqslant x\leqslant 8$. 又 $x\in\mathbf{N}^*$，

∴　由 x 的所有元素组成的集合为 $\{3,4,5,6,7,8\}$.

***10. 若集合 $A=\{x\mid -2<x<1$ 或 $x>1\}$，$B=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，满足 $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$，求 a、b 的值.

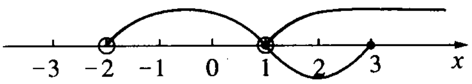


图 1-2

略解　如图 1-2，可知 $B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，

∴　$a=1$，$b=3$.

***11. 设 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，满足 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求 a 的值.【3】

略解　由题意得 $B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$，

∵　$A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，　∴　$3\in A$ 且 $2\notin A$，$-4\notin A$.

∵　$3\in A$，　∴　$3^2-3a+a^2-19=0$，　∴　$a=-2$ 或 $a=5$.

当 $a=-2$ 时，$A=\{3,-5\}$，符合要求；

当 $a=5$ 时，$A=\{2,3\}$，不符合要求.

∴　a 的值为 -2.

***12. 已知函数 $f(x)=x^2$，集合 $A=\{x\mid f(x-1)=ax, a\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cup\mathbf{R}^*=\mathbf{R}^*$，求实数 a 的取值范围.【3】

略解　∵　$A\cup\mathbf{R}^*=\mathbf{R}^*$，　∴　方程 $(x-1)^2=ax$ 无实根或有两个正根.

方程化简为 $x^2-(2+a)x+1=0$.

当方程无实根时，$\Delta=(2+a)^2-4<0$，　∴　$-4<a<0$；

当方程有两个正根时，$\begin{cases}\Delta=(2+a)^2-4\geqslant 0,\\ 2+a>0,\end{cases}$　∴　$\begin{cases}a\leqslant -4 \text{ 或 } a\geqslant 0,\\ a>-2,\end{cases}$

∴　$a\geqslant 0$.

综上，a 的取值范围是 $\{a\mid a>-4\}$.

****13. 已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素，$A\cap B$ 含有 4 个元素，则同时满足条件：①$C\subsetneqq A\cup B$，且 C 中含有 3 个元素；②$C\cap A\neq\varnothing$ 的集合 C 的个数有（　　）.（1986 年全国高考试题）【4】

(A) 56 个　　(B) 864 个　　(C) 1084 个　　(D) 1140 个

略解　方法一：∵　A、B 各含 12 个元素，$A\cap B$ 含 4 个元素，　∴　$A\cup B$ 的元素个

数是 $12+12-4=20$，则满足题目条件①的集合的个数是 C_{20}^3，满足 $C\cap A=\varnothing$ 的集合 C 的个数是 C_8^3。

∴ 所求集合 C 的个数是 $C_{20}^3-C_8^3=1084$.

∴ 正确选项为 C。

方法二：由题意知，属于 B 而不属于 A 的元素个数是 $12-4=8$， ∴ 在 $A\cup B$ 中只含 A 中 1 个元素的所要求的集合 C 的个数为 $C_{12}^1C_8^2$；含 A 中 2 个元素的集合 C 的个数是 $C_{12}^2C_8^1$；含 A 中 3 个元素的集合 C 的个数是 C_{12}^3. ∴ 所求集合 C 的个数是：$C_{12}^1C_8^2+C_{12}^2C_8^1+C_{12}^3=1084$， ∴ 正确选项为 C.

★★★★14. 设 $M=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$. 那么使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是（ ）.【4】

(A) $a\geqslant\frac{5}{4}$ (B) $a=\frac{5}{4}$ (C) $a\geqslant 1$ (D) $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$

略解 如图 1-3 所示，M 表示抛物线 $y=x^2$ 开口内包括边界在内的区域，N 表示以点 $(0,a)$ 为圆心、1 为半径（包括圆周在内）的圆域，其方程是 $x^2+(y-a)^2=1$.

使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是 $M\supseteq N$，即圆域 N 在抛物线 $y=x^2$ 的开口内，与边界线 $y=x^2$ 可以有公共点. 设 (x,y) 是抛物线上任一点，由它与圆心的距离关系，得所要求的充要条件是

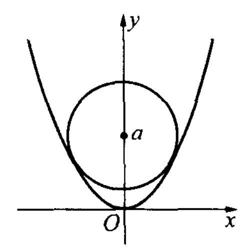


图 1-3

$$\begin{cases}x^2+(y-a)^2\geqslant 1\\ y=x^2\\ a\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2-(2a-1)y+a^2-1\geqslant 0,\\ a\geqslant 1.\end{cases}$$

对任意 $y\in\mathbf{R}$，若 $y^2+(1-2a)y+(a^2-1)\geqslant 0$ 恒成立，

则 $\Delta=(2a-1)^2-4(a^2-1)\leqslant 0$，解得 $a\geqslant\frac{5}{4}$. 因此，$M\cap N=N$ 的充要条件是 $a\geqslant\frac{5}{4}$.

正确选项为 A.

★★★★15. 设 M、P 是两个非空集合，定义 M 与 P 的“差集”为 $M-P=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin P\}$，则 $M-(M-P)$ 等于（ ）.【4】

(A) P (B) $M\cap P$ (C) $M\cup P$ (D) M

略解 ∵ $M-P=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin P\}$， ∴ $M-P$ 即为 M 中除去 $M\cap P$ 的元素组成的集合，故 $M-(M-P)$ 则为 M 中除去不是 $M\cap P$ 的元素的集合.

∴ 正确选项为 B.

★★★★17. 向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度，有如下结果：赞成 A 的人数是全体的 $\frac{3}{5}$，其余的不赞成；赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人，其余的不赞成；另外对 A、B 都不赞成的学生数比对 A、B 都赞成的学生数的 $\frac{1}{3}$ 多 1 人. 问：对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人？【5】

略解 设对 A、B 都赞成的有 x 人，对 A、B 都不赞成的有 $\frac{1}{3}x+1$ 人，

∴ $30+33-x+\left(\frac{1}{3}x+1\right)=50$， ∴ $x=21$.

∴ 对 A、B 都赞成的有 21 人，都不赞成的有 8 人.

★★★★18. 关于实数 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ 的解集分别为 A、B，求使得 $A\subseteq B$ 成立的 a 的取值范围.【10】

略解 由 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \frac{(a-1)^2}{2}$，得 $A=\{x \mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

设 $f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$， ∵ $A\subseteq B$， ∴ 当且仅当 $f(x)=0$ 的两根分别在区间 $(-\infty,2a]$ 与 $[a^2+1,+\infty)$ 内时成立.

$$\therefore \begin{cases} f(2a)\leqslant 0 \\ f(a^2+1)\leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a^2+2\leqslant 0 \\ a^4-3a^3-a^2+3a\leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2\geqslant 1, \\ a(a-1)(a+1)(a-3)\leqslant 0. \end{cases}$$

故使 $A\subseteq B$ 成立的 a 的取值范围是 $\{a \mid 1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1\}$.

★★★★19. 已知 $A=\left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$，$B=\{(x,y) \mid (a^2-1)x+(a-1)y=15\}$，求当 a 为何值时，$A\cap B=\varnothing$.【10】

略解 ∵ $A\cap B=\varnothing$， ∴ 方程组
$$\begin{cases} \frac{y-3}{x-2}=a+1, & ① \\ (a^2-1)x+(a-1)y=15, & ② \end{cases}$$
无解.

若 $x\neq 2$，由①得 $y=(a+1)(x-2)+3$，

代入②得 $(a^2-1)x+(a-1)(a+1)(x-2)+3(a-1)=15$，

化简得 $2(a^2-1)x=2a^2-3a+16$， ③

当 $a=\pm 1$ 时，方程③无解，则原方程组无解.

在③中，令 $x=2$，得 $2a^2+3a-20=0$，解得 $a=\frac{5}{2}$ 或 $a=-4$.

∵ 方程组中 $x\neq 2$， ∴ $a=\frac{5}{2}$ 或 $a=-4$ 时原方程组仍无解.

综上所述，$a=\pm 1,-4$ 或 $\frac{5}{2}$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

★★★★20. 已知 $A=\{(x,y) \mid x=n, y=an+b, n\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y) \mid x=m, y=3m^2+15, m\in \mathbf{Z}\}$，集合 $C=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是坐标平面内的点集. 问：是否存在实数 a、b，使得①$A\cap B\neq\varnothing$；②$(a,b)\in C$ 同时成立？(1985 年全国高考试题)【12】

略解 假设存在 a、b 使①成立，则集合 A 与集合 B 相对应的直线和抛物线至少要有一个公共点，故方程组 $\begin{cases} y=ax+b, \\ y=3x^2+15 \end{cases}$ 有公共解，

即方程 $3x^2+15=ax+b$ 必有解，

∴ $\Delta=a^2-12(15-b)\geqslant 0\Rightarrow -a^2\leqslant 12b-180$. ①

又 ∵ $a^2+b^2\leqslant 144$， ②

①+②，得 $b^2\leqslant 12b-36\Rightarrow (b-6)^2\leqslant 0\Rightarrow b=6$.

代入①得 $a^2\geqslant 108$，代入②得 $a^2\leqslant 108$， ∴ $a^2=108\Rightarrow a=\pm 6\sqrt{3}$.

把 $a=\pm 6\sqrt{3}$，$b=6$ 代入原方程组，得

$$3x^2 \pm 6\sqrt{3}x+9=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \notin \mathbf{Z}.$$

∴ 不存在实数 a、b，使①②同时成立.

★★★★★21. 已知点集 $A=\left\{(x,y)\left|(x-3)^2+(y-4)^2\leqslant\left(\frac{5}{2}\right)^2\right.\right\}$，$B=\left\{(x,y)\left|(x-4)^2+(y-5)^2>\left(\frac{5}{2}\right)^2\right.\right\}$，则点集 $A\cap B$ 中的整点的个数是________. 【8】

略解 ∵ $(x-3)^2\leqslant 6.25$， ∴ $0.5\leqslant x\leqslant 5.5$.

∴ x 只能在 1,2,3,4,5 中取值. 同理，y 只能在 2,3,4,5,6 中取值.

(1) 当 $x=1$ 时，$y=3$、4 或 5，共 3 种；

(2) 当 $x=2$ 时，$y=2$ 或 3，共 2 种；

(3) 当 $x=3$ 时，$y=2$，共 1 种；

(4) 当 $x=4$ 时，$y=2$，共 1 种；

(5) 当 $x=5$ 时，y 不存在，共 0 种.

综上，共有 7 种.

∴ $A\cap B$ 中整点的个数是 7.

★★★★★22. 设 $M=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 10, 1\leqslant y\leqslant 10, x\leqslant y, x、y\in\mathbf{N}^*\}$，则 $|M|=$________. 【8】

略解 $|M|$ 是指集合 M 的元素的个数.

(1) 当 $x=y$ 时，共有 10 种情况；

(2) 当 $x<y$ 时，共有 $C_{10}^2=45$(种)情况.

综合(1)、(2)，共有 $10+45=55$(种)情况，

∴ $|M|=55$.

★★★★★23. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 B 有 k 个元素，且 $B\subsetneqq A$，若所有可能的 B 的各个元素的总和是 210，则 $k=$________. 【10】

略解 不妨先假设 $1\in B$，则这样的 B 共有 C_5^{k-1} 个，1 在符合条件的 B 中出现的次数为 C_5^{k-1} 次. 同理，2,3,4,5,6 均出现 C_5^{k-1} 次.

由题意得 $C_5^{k-1}(1+2+3+4+5+6)=210$，即 $C_5^{k-1}=10$，

∴ 当 $k=3$ 或 $k=4$ 时符合要求.

★★★★★24. 设集合 $M=\{1,2,3,\cdots,1000\}$，对于 M 的任一非空子集 Z，令 a_Z 表示 Z 中最大数与最小数之和，那么所有这样的 a_Z 的算术平均值为________. 【10】

略解 将 M 中非空子集进行配对，对每个非空子集 $Z\subseteq M$，令 $Z'=\{1001-x\mid x\in Z\}$，则 Z' 也是 M 的非空子集，且 $Z_1\neq Z_2$ 时，$Z_1'\neq Z_2'$，这样 M 的所有非空子集可分为两类：(A) $Z'\neq Z$，(B) $Z'=Z$. 对于 B 类中的 Z，有 $a_Z=2002-a_{Z'}\Rightarrow a_Z=1001$；对于 A 类中的 Z，

∵ Z' 也在 A 类中，且 $a_Z+a_Z'=a_Z+(2002-a_Z)=2002$，

∴ a_Z 与 a_Z' 的算术平均值为 1001.

综上，M 中所有非空子集 Z 的 a_Z 的算术平均值为 1001.

★★★★★25. 在 1,2,3,…,1000 中计算：【10】

(1) 能被 2 整除或能被 3 整除的数的个数；

(2) 能被 2 整除但不能被 3 整除的数的个数；

(3) 不能被 2 整除且不能被 3 整除，又不能被 5 整除的数的个数；

(4) 能被 2 整除或不能被 3 整除的数的个数.

略解 (1) $\left[\frac{1000}{2}\right]+\left[\frac{1000}{3}\right]-\left[\frac{1000}{6}\right]=500+333-166=667.$

(2) $\left[\frac{1000}{2}\right]-\left[\frac{1000}{6}\right]=500-166=334.$

(3) $1000-\left[\frac{1000}{2}\right]-\left[\frac{1000}{3}\right]-\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{6}\right]+\left[\frac{1000}{10}\right]+\left[\frac{1000}{15}\right]-\left[\frac{1000}{30}\right]$

$=1000-500-333-200+166+100+66-33=266.$

(4) $\left[\frac{1000}{2}\right]+1000-\left[\frac{1000}{3}\right]-\left(\left[\frac{1000}{2}\right]-\left[\frac{1000}{6}\right]\right)=1000+166-333=833.$

★★★★★26. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a>0\}$,$B=\{(x,y)\mid |xy|+1=|x|+|y|\}$,若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合,试求 a 的值.【11】

略解 $A\cap B=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a, |xy|=a-1, a\geqslant 1\}$.

先考察 $A\cap B$ 位于第一象限内的点,解方程组

$$\begin{cases}x+y=a\\ xy=a-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=a-1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=a-1,\\ y=1.\end{cases}$$

其余象限内的点可由对称性考虑,求得

$$a=2+\sqrt{2}\text{或 }a=\sqrt{2}.$$

★★★★★27. 求两个最小正整数 n,使集合 $\{1,2,3,\cdots,3n-1,3n\}$ 可分为 n 个互不相交的三元数组 $\{x,y,z\}$,其中 $x+y=3z$.【15】

略解 设所求三元数组为 $\{x_i,y_i,z_i\}$,$i=1,2,\cdots,n$,注意到 $x_i+y_i=3z_i$,

$\therefore\quad 4(z_1+z_2+\cdots+z_n)=\sum\limits_{i=1}^{3n}i=\frac{3}{2}n(3n+1)$,

$\therefore\quad 8\sum\limits_{i=1}^{n}z_i=3n(3n+1)\Rightarrow 8\mid 3n(3n+1)$.

若 n 为偶数,则 $8\mid n$;若 n 为奇数,则 $8\mid(3n+1)$.

当 $n=5$ 时,有三元数组:$\{1,11,4\}$,$\{2,13,5\}$,$\{3,15,6\}$,$\{9,12,7\}$,$\{10,14,8\}$.

当 $n=8$ 时,有三元数组:$\{1,14,5\}$,$\{2,19,7\}$,$\{3,21,8\}$,$\{4,23,9\}$,$\{6,24,10\}$,$\{15,18,11\}$;$\{16,20,12\}$,$\{17,22,13\}$.

故所求最小的两个正整数为 $n=5$,$n=8$.

★★★★★28. S_1、S_2、S_3 为三个非空的整数集合,对于 1、2、3 的任意一个排列 i、j、k,若 $x\in S_i$,$y\in S_j$,则 $x-y\in S_k$.【15】

(1) 证明:三个集合中至少有两个相等;

(2) 三个集合中是否可能有两个集合无公共元素?

略解 (1) 若 $x\in S_i$,$y\in S_j$,则 $y-x\in S_k$,$(y-x)-y=-x\in S_i$,

$\therefore$ 每个集合中均有非负元素.

当三个集合中的元素都为零时,命题显然成立.否则设 S_1、S_2、S_3 中最小正元素为 a,不妨设 $a\in S_1$,设 b 为 S_2、S_3 中最小的非负元素,不妨设 $b\in S_2$,则 $b-a\in S_3$.

当 $b>0$,则 $0\leqslant b-a<b$,与 b 的取法矛盾, $\therefore\quad b=0$.任取 $x\in S_1$,

$\because\quad 0\in S_2$, $\therefore\quad x-0=x\in S_3$, $\therefore\quad S_1\subseteq S_3$.

同理，$S_3 \subseteq S_1$，　∴　$S_1 = S_3$.

（2）可能.

例如：$S_1 = S_3 = \{奇数\}$，$S_2 = \{偶数\}$，显然满足条件，但 S_1 和 S_3 与 S_2 都无公共元素.

★★★★★29. 设 $n \geqslant 15$，$n \in \mathbf{N}$，A、B 都是 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的真子集，$A \cap B = \varnothing$，且 $A \cup B = \{1,2,3,\cdots,n\}$.

求证：A 或 B 中必有两个不同的数的和为完全平方数.【15】

略证　假设结论不成立，则存在 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的两个真子集 A、B，满足 $A \cap B = \varnothing$，且 $\{1,2,3,\cdots,n\} = A \cup B$，使无论是 A 还是 B 中的任何两个不同的数的和都不是完全平方数.

不妨设 $1 \in A$，则 $3 \notin A$，否则 $1+3=2^2$ 与假设矛盾，从而 $3 \in B$. 同样 $6 \notin B$，故 $6 \in A$；$10 \notin A$，故 $10 \in B$.　∵　$n \geqslant 15$，故 15 或者在 A 中，或者在 B 中. 但当 $15 \in A$ 时，　∵　$1 \in A$，$1+15=4^2$，矛盾；当 $15 \in B$ 时，因 $10 \in B$，$10+15=5^2$，仍然矛盾. 因此，假设不成立，故原命题成立.

映射与函数

横向拓展

★★★1. 若 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则函数 $f(x+a)+f(2x+a)$ $(0<a<1)$ 的定义域是（　　）.【3】

（A）$[-a,1-a]$　　　　（B）$\left[-\frac{1}{2}a,1-a\right]$

（C）$\left[-\frac{a}{2},\frac{1-a}{2}\right]$　　　　（D）$\left[-a,\frac{1-a}{2}\right]$

略解　∵　$f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，　∴　$\begin{cases}0 \leqslant x+a \leqslant 1, \\ 0 \leqslant 2x+a \leqslant 1,\end{cases}$　∴　$\begin{cases}-a \leqslant x \leqslant 1-a, \\ -\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1-a}{2}.\end{cases}$

∵　$0<a<1$，　∴　$-a<-\frac{a}{2}$，$0<1-a<1$，　∴　$\frac{1-a}{2}<1-a$，

∴　$-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1-a}{2}$.　∴　正确选项为 C.

★★★2. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，则 $f(7.5)$ 等于（　　）.（1996 年全国高考试题）【3】

（A）0.5　　（B）-0.5　　（C）1.5　　（D）-1.5

略解　∵　$f(x+2)=-f(x)$，

∴　$f(x+4)=f(x+2+2)=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$，

∴　$f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.　∴　$f(7.5)=f(-0.5)$.

又　$f(x)$ 是奇函数，　∴　$f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5$.

∴　正确选项为 B.

★★★3. 若函数 $f(x)=\begin{cases}f(x+2), & x<2, \\ 2^{-x}, & x \geqslant 2,\end{cases}$ 则 $f(-3)$ 等于（　　）.【3】

(A) 2　(B) 8　(C) $\frac{1}{8}$　(D) $\frac{1}{2}$

略解　由题意，得

$$f(-3)=f(-3+2)=f(-1)=f(-1+2)=f(1)=f(1+2)=f(3)=2^{-3}=\frac{1}{8}.$$

∴　正确选项为 C.

★★★4. 设函数 $f(x)=-2x^2+3tx+t(x、t\in\mathbf{R})$的最大值是 $u(t)$，当 $u(t)$有最小值时，t 的值等于(　　).【3】

(A) $\frac{9}{4}$　(B) $-\frac{9}{4}$　(C) $\frac{4}{9}$　(D) $-\frac{4}{9}$

略解　由题意得 $u(t)=\frac{9t^2+8t}{8}\left(此时\ x=\frac{3t}{4}\right)$，

∴　当 $t=-\frac{8}{2\times9}=-\frac{4}{9}$时，$u(t)$取到最小值，

∴　正确选项为 D.

★★★5. 某企业生产某种产品的固定成本为 2000 万元，并每生产一件产品需要再投成本 10 万元，又知生产该产品的总收入 $f(x)$是产量 x(单位：件)的函数：$f(x)=40x-0.05x^2$(单位：万元)，那么该产品的最大总利润为(　　).【3】

(A) 2000 万元　(B) 2500 万元　(C) 4500 万元　(D) 8000 万元

略解　首先计算成本，记为 $g(x)$，则 $g(x)=2000+10x(x\in\mathbf{N}^*)$.

该产品的利润函数 $F(x)=f(x)-g(x)=40x-0.05x^2-2000-10x$

$$=-0.05x^2+30x-2000$$

$$=-0.05(x-300)^2+2500(x\in\mathbf{N}^*).$$

故当产量为 300 件时，最大总利润为 2500 万元，正确选项为 B.

★★★6. 设函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $x=-1$ 对称，且 $x\in(0,+\infty)$时，有 $f(x)=x^{-1}$，则当 $x\in(-\infty,-2)$时，$f(x)$的解析式为(　　).【3】

(A) $-\frac{1}{x}$　(B) $\frac{1}{2-x}$　(C) $\frac{1}{x+2}$　(D) $-\frac{1}{x+2}$

略解　当 $x\in(-\infty,-2)$时，$-x-2>0$，

∵　$y=f(x)$的图象关于直线 $x=-1$ 对称，　∴　$f(x)=f(-x-2)=\frac{1}{-x-2}$.

∴　正确选项为 D.

★★★7. C 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}(x\leqslant0)$上一点，$CD\perp y$ 轴，D 是垂足，A 点坐标是$(-1,0)$，设$\angle CAO=\theta$(其中 O 表示原点)，将 $AC+CD$ 表示成关于 θ 的函数 $f(\theta)$，则 $f(\theta)=$(　　).【3】

(A) $2\cos\theta-\cos2\theta$　(B) $\cos\theta+\sin\theta$

(C) $2\cos\theta(1+\cos\theta)$　(D) $2\sin\theta+\cos\theta-\sqrt{2}$

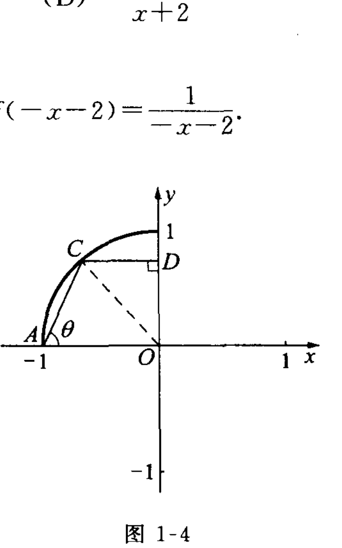


图 1-4

略解　∵　$y=\sqrt{1-x^2}(x\leqslant0)$，

∴　$x^2+y^2=1(x\leqslant0\ 且\ y\geqslant0)$，则曲线 C 如图 1-4.

连结 OC，$\because$ $\angle CAO=\theta, 45^\circ\leqslant\theta<90^\circ$，$\therefore$ $\angle xOC=2\theta$，

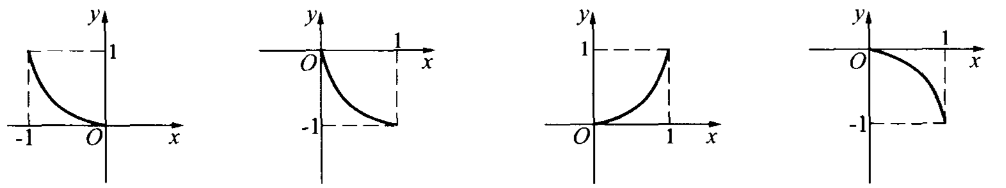
$\therefore$ 点 C 为 $(\cos2\theta,\sin2\theta)$，

$\therefore$ $AC=\sqrt{(\cos2\theta+1)^2+\sin^2 2\theta}=\sqrt{2+2\cos2\theta}=2\cos\theta, CD=-\cos2\theta$.

$\therefore$ $AC+CD=2\cos\theta-\cos2\theta$.

$\therefore$ 正确选项为 A.

★★★8. 设函数 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}\,(-1\leqslant x\leqslant 0)$，则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象为（　　）.【3】



(A)　(B)　(C)　(D)

图 1-5

略解　$\because$ $y=f(x)=1-\sqrt{1-x^2}$，

$\therefore$ $\sqrt{1-x^2}=1-y$，

$\therefore$ $x^2+(y-1)^2=1$.

$\because$ $x\in[-1,0]$，

$\therefore$ $y\in[0,1]$.

$\therefore$ $f(x)$ 的图象如图 1-6 第二象限部分.

将其关于直线 $y=x$ 对称后，得到 $y=f^{-1}(x)$ 的图象，如图 1-6 第四象限部分.

$\therefore$ 正确选项为 B.

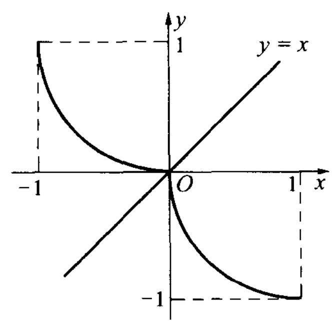


图 1-6

★★★9. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图 1-7，则（　　）.（2000 年全国春季高考试题）【3】

(A) $b\in(-\infty,0)$　　(B) $b\in(0,1)$

(C) $b\in(1,2)$　　(D) $b\in(2,+\infty)$

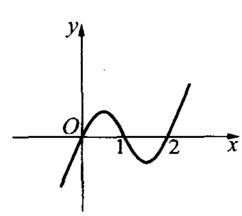


图 1-7

略解　由图 1-7 知 0、1、2 是 $f(x)=0$ 的三根，

$$\therefore \begin{cases} d=0, \\ a+b+c+d=0, \\ 8a+4b+2c+d=0, \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} b=-3a, \\ c=2a, \\ d=0. \end{cases}$$

又由图 1-7 知 $x>2$ 时，$f(x)>0$，不妨取 $x=3$，

则 $f(3)=27a+9b+3c=27a-27a+6a=6a>0$，

$\therefore$ $a>0$，$\therefore$ $b<0$.

$\therefore$ 正确选项为 A.

★★★10. 圆台的侧面积为 8π，母线和底面所成的角为 60°，若记中截面圆的半径为 x，较大的底面圆的半径为 $y=f(x)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象是（　　）.【3】