

◆ 上海东方激光教育文化有限公司 组编



FANG · FA · HE · SHI · JIAN ·
SHI · JIAN ·
ZHI · SHI · FANG · FA ·
高中数学
知识、方法和实践
高二(上)

中国三峡出版社

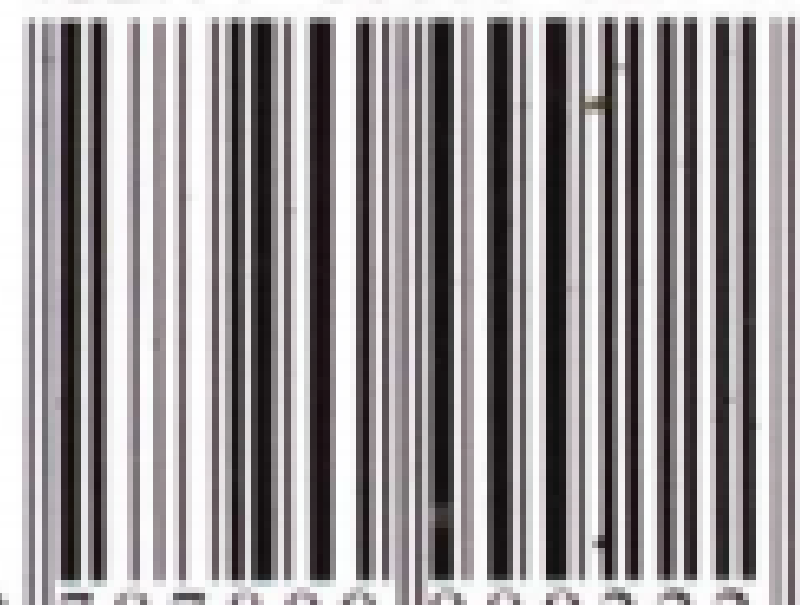
责任编辑：马文晓

特约编辑：苏宁萍 陈 瑜

封面设计：陶华达



ISBN 7-80099-922-X



9 787800 999222 >

ISBN 7-80099-922-X

定价：46.00元（全二册）

高中数学知识、方法和实践

—— 高二（上）

◆ 上海东方激光教育文化有限公司 组编

《高中数学知识、方法和实践》丛书编委会

主 编 袁建平 周宁医

（上海市建平中学）

编 委 （按姓氏笔画排序）

何作勇 吴惠逸 周宁医 陶志诚

袁建平 谢立竿 颜国连 戴丽君

本册编者 周宁医 戴丽君 谢立竿 何作勇

中国三峡出版社

前言

参考书特别是一本好的参考书，是学生学习中必不可少的。摆在同学们面前的《高中数学知识、方法和实践》，正是这样的既贴近教与学，又非常实用的高中数学辅导丛书。

本丛书的特点及使用方法介绍如下：

1. 本丛书以每周的学习内容为一讲，每讲分三篇：【知识篇】、【方法篇】、【训练篇】，编写中体现三个原则：① 学法辅导与同步训练相结合；② 基础知识、方法与重难点内容相结合；③ 高一、高二的课本内容与高考的能力考查相结合。每章还附有【本章单元测试题】及【本章高考试题选】，书末有两个附录：参考答案及数学思想方法与数学解题技能技巧索引。

2. 【方法篇】是本丛书的核心内容之一，本篇分三个层次：

① 例题精析：以基本题型来细化本周学习的基本知识和基本方法，其所选的例题尽可能涵盖所学内容，这是每位学生都必须学习和掌握的内容；

② 重难点选讲：每周精选一到二个重难点内容以专题形式进行简要的分析、归纳和小结，这些内容往往是同学们学习中的“瓶颈”，突破了，则学习就变得轻松自如，具有“纲举目张”的作用，因此，这也是每位学生应努力学好的内容；

③ 能力与发展：一些课本上涉及较少但又往往是高考能力考查的内容，我们将在这里进行简要的介绍与分析，这部分内容又分两小块：概念辨析与探究拓展，其中，概念辨析以错例的形式出现，考查学生对数学概念及方法的“错与对”的辨析能力，以及对数学概念内涵的深刻理解，这是课本上涉及很少但近几年高考频频出现的热点试题；探究拓展则精选一到两个高考热点问题进行分析和归纳。这节的内容虽有一定的难度，但高考却必须面对，因此，这是那些学有余力及重点中学的学生需力争努力学习的内容

3. 【训练篇】是本丛书颇具特色的又一核心内容，本篇分三类：

① 周二基础练：精选与【方法篇】中例题精析相对应的基本内容和题型，这部分习题与教学同步，含上周三到本周二的学习内容，是学生基础达标习题，也是每位学生必做习题（30-45分钟）；

② 周四专题练：分两个专题，其中专题（一）为本讲【方法篇】中重难点选讲所对应的专题训练，是学生重点强化习题，为每位学生应努力做好的习题（30-45分钟）；专题（二）为本讲【方法篇】中能力与发展相对应的习题及一些能力题，可选作，是学有余力及重点中学的学生能力拓展习题，这部分有目的地选了最近的一些新颖题及能力题，可选作，主要是为了学生更好地适应目前高考的能力考

查，题目有一定的思维量，可放在学完本讲后或本章后再去做。力争努力完成，（30-45分钟）。

③ 周六实战练：这是与本讲所学全部内容相对应的测试题，其难度参照重点学校的考试要求，同学们可用此来及时检验自己对本讲内容掌握的程度，希望每位学生按规定时间完成本套习题，是每位学生都应做的习题（90-100分钟）。

《高中数学知识、方法和实践》为各级各类高中的莘莘学子提供了一套集知识、方法及训练为一体的翔实完备的学习资料，参加编写的都是长期奋战在教学第一线的名师、学科带头人、高级教师等，对同学们学好数学必将大有裨益；该丛书最大特点是针对性强，按照认知规律：“知道什么”、“为什么”、“还有什么”这根主线，为学生搭建合理的知识平台，构筑数学解题能力，把学生从“课课练、天天做”中解放出来，只要每周做2-3套便可达到理想程度，使数学学习变得轻松而更加有效。使用该丛书对象为各级各类中学的高一至高三的学生，对高中数学教师也具有很好的参考价值。

《高中数学知识、方法和实践》由下列系列书构成：

◆ 高中数学知识、方法和实践（高一上、下）

◆ 高中数学知识、方法和实践（高二上、下）

本丛书由袁建平、周宁医主编策划。本册编者：周宁医（第1-5讲）、何作勇（第6、8-11讲）、戴丽君、谢立竿（第12-14讲），蒋逸明（第7、15讲），周宁医审定；这里还要特别感谢建平中学2005届高三（2）班周玲、虞靖，高三（12）班杨忠铭、花海雯、王燕飞、吴梦慈等同学为本书进行了校对和例题验算。

由于本丛书立意新颖，编写难度较大，又受作者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请读者不吝指正。

联系地址：Email: yuanjp@eastday.com, zhny2005@sina.com

编者

目 录

第九章 行列式初步

第一讲 二阶行列式

【知识篇】知识要点	1
学习目标	1
【方法篇】例题精析	2
重难点选讲:二元一次方程组的行列式解法	3
能力与发展:1. 概念辨析	5
2. 探究拓展:一道高考试题的引伸	5
【训练篇】周二基础练	7
周四专题练	9
周六实战练	11

第二讲 三阶行列式

【知识篇】知识要点	13
学习目标	14
【方法篇】例题精析	15
重难点选讲:三元一次方程组的行列式解法	17
能力与发展:1. 概念辨析	19
2. 探究拓展:(1)行列式的性质	19
(2)三角形面积公式	21
【训练篇】周二基础练	22
周四专题练	24
周六实战练	26

本章单元测试题	29
---------------	----

第十章 平面向量

第三讲 向量、向量的加减法

【知识篇】知识要点	32
学习目标	33
【方法篇】例题精析	34
重难点选讲:向量加减法法则的应用	35
能力与发展:1. 概念辨析	36
2. 探究拓展:三角形法则的扩充	37
【训练篇】周二基础练	38
周四专题练	40
周六实战练	42

第四讲 实数与向量的乘积、向量的坐标表示及其运算

【知识篇】知识要点	44
学习目标	45
【方法篇】例题精析	46
重难点选讲:向量共线的充要条件.....	49
能力与发展:1. 概念辨析.....	50
2. 探究拓展:(1)平移.....	50
(2)向量的线性相关性.....	51
【训练篇】周二基础练	53
周四专题练	54
周六实战练	56
第五讲 向量的数量积	
【知识篇】知识要点	58
学习目标	59
【方法篇】例题精析	60
重难点选讲:1. 向量的平行与垂直问题.....	61
2. 向量的有关度量计算问题.....	62
能力与发展:1. 概念辨析.....	64
2. 探究拓展:(1)用向量知识解决代数中的某些问题.....	64
(2)用向量知识解决三角中的某些问题.....	64
(3)用向量知识解决几何中的某些问题.....	65
(4)用向量知识解决某些变换问题.....	65
(5)向量在物理中的应用.....	66
【训练篇】周二基础练	67
周四专题练	68
周六实战练	70
本章单元测试题	73
本章高考试题选	76
第十一章 坐标平面上的直线	
第六讲 直线的方程	
【知识篇】知识要点	79
学习目标	79
【方法篇】例题精析	80
重难点选讲:直线方程的综合问题.....	81
能力与发展:1. 概念辨析.....	82
2. 探究拓展:直线的截距与截距式方程	82
【训练篇】周二基础练	85
周四专题练	86
周六实战练	88
第七讲 期中考试复习	
【例题精析】	91

【期中考试模拟试题】	94
第八讲 直线的倾斜角和斜率	
【知识篇】知识要点	96
学习目标	96
【方法篇】例题精析	97
重难点选讲:已知直线的斜率,求倾斜角问题	98
能力与发展:1. 概念辨析	99
2. 探究拓展:(1)光线的反射问题	99
(2)对称问题(I)——点关于点、点关于直线对称	100
【训练篇】周二基础练	101
周四专题练	102
周六实战练	104
第九讲 两条直线的位置关系、点到直线的距离	
【知识篇】知识要点	106
学习目标	107
【方法篇】例题精析	108
重难点选讲:直线的角与距离问题	110
能力与发展:1. 概念辨析	110
2. 探究拓展:(1)最值问题	110
(2)直线系的方程及应用	111
(3)对称问题(II)——直线关于直线对称	111
【训练篇】周二基础练	113
周四专题练	114
周六实战练	116
本章单元测试题	118
本章高考试题选	120
第十二章 圆锥曲线	
第十讲 曲线和方程	
【知识篇】知识要点	122
学习目标	122
【方法篇】例题精析	123
重难点选讲:轨迹问题(I)——求轨迹方程的步骤、方法问题	123
能力与发展:1. 概念辨析	124
2. 探究拓展:曲线与函数的图像的联系、区别	124
【训练篇】周二基础练	126
周四专题练	127
周六实战练	129
第十一讲 圆的方程	
【知识篇】知识要点	131

学习目标	131
【方法篇】例题精析	132
重难点选讲:直线与圆锥曲线的综合问题(I)——圆的几何性质的应用	133
能力与发展:1. 概念辨析	134
2. 探究拓展:圆系方程及应用	134
【训练篇】周二基础练	136
周四专题练	137
周六实战练	139
第十二讲 椭圆	
【知识篇】知识要点	141
学习目标	141
【方法篇】例题精析	142
重难点选讲:直线与圆锥曲线的综合问题(II)——韦达定理在二次曲线中的应用	145
能力与发展:1. 概念辨析	147
2. 探究拓展:(1)椭圆的几何性质及应用	148
(2)椭圆的光学性质:从椭圆的一个焦点出发的光线,经椭圆壁反射后,反射光线经过椭圆的另一个焦点.	148
【训练篇】周二基础练	150
周四专题练	151
周六实战练	154
第十三讲 双曲线	
【知识篇】知识要点	157
学习目标	158
【方法篇】例题精析	159
重难点选讲:直线与圆锥曲线的综合问题(III)——对称问题与存在性问题	164
能力与发展:1. 概念辨析	166
2. 探究拓展:(1)椭圆与双曲线的性质类比	166
(2)动圆圆心轨迹的探究(I)——动圆与一定点和一定圆的关系、动圆与两定圆的关系	168
【训练篇】周二基础练	171
周四专题练	172
周六实战练	174
第十四讲 抛物线	
【知识篇】知识要点	177
学习目标	177
【方法篇】例题精析	178

重难点选讲:1. 直线与圆锥曲线的综合问题(Ⅳ)——含有参数问题的讨论…	181
2. 轨迹问题(Ⅱ)——轨迹方程的综合求法问题	183
能力与发展:1. 概念辨析	185
2. 探究拓展:(1)几种特殊轨迹的探究(Ⅱ)——动圆与一定直线、 动圆与一定圆的关系	185
(2)* 圆锥曲线的统一定义及应用	187
【训练篇】周二基础练	190
周四专题练	191
周六实战练	193
本章单元测试题	196
本章高考试题选	199
第十五讲 期末考试复习	
【例题精析】	202
【期末考试模拟试题】	206
附录一:参考答案	209
附录二:数学思想方法与数学解题技能技巧索引	248
打击盗版 举报有奖	249

第九章 行列式初步

第一讲 二阶行列式

知 识 篇

【知识要点】

1. 二阶行列式

(1) 定义

我们用记号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 表示算式 $a_1b_2 - a_2b_1$, 即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$. 记号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 叫做行列式, 因为它只有两行、两列, 所以把它叫做二阶行列式, $a_1b_2 - a_2b_1$ 叫做行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 的展开式, 其计算结果叫做行列式的值. a_1, a_2, b_1, b_2 都叫做行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 的元素.

(2) 对角线法则

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 中实线表示的对角线叫做主对角线, 虚线表示的对角线叫做副对角线; 主对角线上的两个数的乘积减去副对角线上的两个数的乘积, 即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

【析】 (1) 二阶行列式就是表示四个数(或式)的特定算式的一种记号, 其结果是一个数; (2) 二阶行列式的展开式是主对角线上的两个数的乘积减去副对角线上的两个数的乘积.

行列式可用大写字母表示, 如 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

2. 作为判别式的二阶行列式

二元一次方程组 (*) $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, 其中 x, y 是未知数, a_1, a_2, b_1, b_2 不全为零, 行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$; 其中 D 叫做方程组(*)的系数行列式.

(I) 当 $D \neq 0$ 时, 方程组有唯一解 $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases}$; (II) 当 $D = 0, D_x = D_y = 0$ 时, 方程组有无穷多解;

(III) 当 $D = 0, D_x, D_y$ 中至少有一个不为零时, 方程组无解.

【析】 方程组(*)可转化为方程组 $\begin{cases} D \cdot x = D_x \\ D \cdot y = D_y \end{cases}$, 当 $D = 0, D_x = D_y = 0$ 时, x, y 为任何值, 方程组

$\begin{cases} D \cdot x = D_x \\ D \cdot y = D_y \end{cases}$ 都成立; 当 $D = 0, D_x, D_y$ 中至少有一个不为零时, 方程组 $\begin{cases} D \cdot x = D_x \\ D \cdot y = D_y \end{cases}$ 至少有一个不能成立.

【学习目标】

1. 理解二阶行列式的概念.
2. 掌握二阶行列式的算法.
3. 会利用二阶行列式的判别式判别二元一次方程组解的情况.

方 法 篇

【例题精析】

1. 二阶行列式的概念问题

【例 1】 判别以下几项中哪些是二阶行列式, 哪些不是二阶行列式?

$$(1) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\beta & \cos\alpha \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ \frac{4}{3} & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & \sqrt[3]{5} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

【解题策略】 利用二阶行列式的定义判断.

【解】 (2)、(4) 是二阶行列式; (1)、(3) 不是二阶行列式.

【点评】 是否为二阶行列式, 关键是理解二阶行列式的定义.

【例 2】 将下列各式用行列式表示:

$$(1) b^2 - 4ac; \quad (2) 5x - \frac{1}{2}y; \quad (3) x^2 - 4x + 2.$$

【解题策略】 利用二阶行列式的对角线法则.

$$\text{【解】 } (1) b^2 - 4ac = \begin{vmatrix} b & 2a \\ 2c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 4a \\ c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4ac & b^2 \end{vmatrix} \cdots;$$

$$(2) 5x - \frac{1}{2}y = \begin{vmatrix} x & 1 \\ \frac{1}{2}y & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -4 \\ -\frac{1}{8}y & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5x & -\frac{1}{2} \\ -y & 1 \end{vmatrix} \cdots;$$

$$(3) x^2 - 4x + 2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2x-1 \\ 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+2 & x \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \cdots.$$

【点评】 行列式就是表示数(或式)的特定算式的一种记号, 凡两个积之差式都可写成一个二阶行列式, 而且形式不唯一.

2. 二阶行列式的算法问题

【例 3】 展开下列行列式, 并化简:

$$(1) \begin{vmatrix} -9 & 7 \\ 2 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} m-2 & 2m+3 \\ 4m & 8m+6 \end{vmatrix}; \quad (3) \begin{vmatrix} \sin\alpha - \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha + \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$$

【解题策略】 理解行列式的概念, 展开即可.

$$\text{【解】 } (1) \begin{vmatrix} -9 & 7 \\ 2 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = 6 - 14 = -8;$$

$$(2) \begin{vmatrix} m-2 & 2m+3 \\ 4m & 8m+6 \end{vmatrix} = (m-2)(8m+6) - 4m(2m+3) = -22m - 12;$$

$$(3) \begin{vmatrix} \sin\alpha - \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha + \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = (\sin\alpha - \cos\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha) = -1.$$

【点评】 用二阶行列式的对角线法则展开是基础.

【例 4】 计算

$$(1) \begin{vmatrix} 2\cos\frac{\pi}{12} & -1 \\ 1 & \cos\frac{11\pi}{12} \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ 2 \quad -\frac{2}{5}$$

【解题策略】 当行列式与其它知识结合时,层层深入,化繁为简.

$$\text{【解】 } (1) \begin{vmatrix} 2\cos\frac{\pi}{12} & -1 \\ 1 & \cos\frac{11\pi}{12} \end{vmatrix} = 2\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12} + 1 = -2\cos^2\frac{\pi}{12} + 1 = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$(2) \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2 \text{ 或 } \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ = -\frac{2}{5} \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{5} \cdot 5 - 2 \cdot (-2) = -2 + 4 = 2.$$

【点评】 去除繁琐的“外表”,抓住问题的本质.

【例 5】 设函数 $f(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$, 求 $f(x)$ 的最小正周期.

【解题策略】 利用二阶行列式对角线法则展开,求出函数的解析式.

$$\text{【解】 } f(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x, \therefore T = \frac{\pi}{2}.$$

【点评】 求函数周期时要注意有绝对值和无绝对值的区别.

$$\text{【例 6】 若已知函数 } f(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta & \cos\frac{\pi}{3} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 且 } \theta \in [0, 2\pi], \text{ 求 } \theta \text{ 的值.}$$

【解题策略】 先求出函数解析式,然后解三角方程.

$$\text{【解】 } f(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta & \cos\frac{\pi}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = -\sin(\theta - \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}) \text{ 或 } \theta - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}), \therefore \theta \in [0, 2\pi], \therefore \theta = \frac{5\pi}{12} \text{ 或 } \frac{11\pi}{12}.$$

【点评】 本题是行列式与三角的综合,把行列式展开后,解三角方程.

【重难点选讲】二元一次方程组的行列式解法

用行列式的方法解二元一次方程组,主要表现在两个方面:(1)解二元一次方程组;(2)判断方程组解的情况.

【例 7】 利用行列式解下列关于 x, y 的方程组:

$$(1) \begin{cases} 11x - y - 6 = 0 \\ 3x + 5y + 1 = 0 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} x\sin\theta + y\cos\theta = \sin\theta \\ x\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) + y\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta \end{cases}$$

【解题策略】 把方程组化为一般形式,易于得到正确的 D, D_x, D_y .

$$\text{【解】 } (1) \text{ 先把方程组写成一般形式: } \begin{cases} 11x - y = 6 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}, \text{ 由 } D = \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 55 - (-3) = 58,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 29, D_y = \begin{vmatrix} 11 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -29, \text{ 得 } x = \frac{D_x}{D} = \frac{29}{58} = \frac{1}{2}, y = \frac{D_y}{D} = \frac{-29}{58} = -\frac{1}{2}$$

∴ 方程组的解集是 $\{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\}$.

(2) 方程组转化为: $\begin{cases} x\sin\theta + y\cos\theta = \sin\theta \\ -x\cos\theta + y\sin\theta = \cos\theta \end{cases}$, 由 $D = \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = 1$,

$$D_x = \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -\cos 2\theta,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \sin\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \sin 2\theta, \text{ 所以 } x = \frac{D_x}{D} = -\cos 2\theta, y = \frac{D_y}{D} = \sin 2\theta$$

∴ 方程组的解集是 $\{(-\cos 2\theta, \sin 2\theta)\}$.

【点评】 正确算出 D, D_x, D_y 是解方程组的关键, 当所给方程组的形式不是方程组(*)的形式时, 应先化为方程组(*)的形式, 这有利于得到正确的 D_x, D_y .

【例 8】 判断 m 取什么值时, 下列关于 s, t 的方程组有唯一解:

$$(1) \begin{cases} (m^2 - 1)s - (m + 1)t = m + 1 \\ m^2s - (m + 1)t = m - 1 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} (m + 2)s + 2mt = 7 \\ ms + m^2t = 11 \end{cases}$$

【解题策略】 二元线性方程组有唯一解的充要条件是 $D \neq 0$.

$$\text{【解】 } (1) D = \begin{vmatrix} m^2 - 1 & -(m + 1) \\ m^2 & -(m + 1) \end{vmatrix} = (1 - m)(m + 1)^2 + (m + 1)m^2 = m + 1,$$

∴ 当 $D = m + 1 \neq 0$ 时, 即 $m \neq -1$ 时方程组有唯一解.

$$(2) D = \begin{vmatrix} m + 2 & 2m \\ m & m^2 \end{vmatrix} = m^3, \therefore \text{ 当 } D = m^3 \neq 0 \text{ 时, 即 } m \neq 0 \text{ 时方程组有唯一解.}$$

【点评】 $D \neq 0$ 是方程组(*)有唯一解的充分必要条件, D 叫做方程组解的判别式.

【例 9】 解下列关于 x, y 的方程组:

$$\begin{cases} (m + 5)x + (2m + 3)y = 3m + 2 \\ (3m + 10)x + (5m + 6)y = 2m + 4 \end{cases}$$

【解题策略】 理解二元线性方程组解的情况, 正确计算 D, D_x, D_y , 根据情况进行分类讨论, 做到不重不漏.

$$\text{【解】 } D = \begin{vmatrix} m + 5 & 2m + 3 \\ 3m + 10 & 5m + 6 \end{vmatrix} = (5m^2 + 31m + 30) - (6m^2 + 29m + 30) = -m^2 + 2m = -m(m - 2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3m + 2 & 2m + 3 \\ 2m + 4 & 5m + 6 \end{vmatrix} = 15m^2 + 28m + 12 - 4m^2 - 14m - 12 = 11m^2 + 14m = m(11m + 14)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m + 5 & 3m + 2 \\ 3m + 10 & 2m + 4 \end{vmatrix} = 2m^2 + 14m + 20 - 9m^2 - 36m - 20 = -7m^2 - 22m = -m(7m + 22)$$

$$(1) \text{ 当 } m \neq 0 \text{ 且 } m \neq 2 \text{ 时, } D \neq 0, \text{ 方程组有唯一解 } \begin{cases} x = \frac{11m + 14}{2 - m} \\ y = \frac{7m + 22}{m - 2} \end{cases}$$

(2) 当 $m = 2$ 时, $D = 0, D_x \neq 0$, 方程组无解;

(3) 当 $m = 0$ 时, $D = D_x = D_y = 0$, 方程组有无穷多解, 此时原方程组为 $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$, 令 $x = t (t \in \mathbb{R})$,

$$\text{则原方程组的解可表示为 } \begin{cases} x = t \\ y = \frac{2 - 5t}{3} \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

【点评】 理解“ $D = D_x = D_y = 0$, 方程组有无穷多解”是掌握这一类问题的关键, 稳妥方法是代入原方程组.

【能力与发展】

1. 概念辨析

【例 10】 学生小明解下列问题:在 $\triangle ABC$ 中,如果 $\begin{vmatrix} 2\sin A & 1 \\ \cos C & \sin B \end{vmatrix} = 1$, 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解法如下: $\begin{vmatrix} 2\sin A & 1 \\ \cos C & \sin B \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow 2\sin A \sin B + \cos C = 1 \Rightarrow 2\sin A \sin B + \cos[\pi - (A + B)] = 1 \Rightarrow 2\sin A \sin B + \cos(A + B) = 1 \Rightarrow 2\sin A \sin B + \cos A \cos B - \sin A \sin B = 1$

$\therefore \cos A \cos B + \sin A \sin B = 1 \Rightarrow \cos(A - B) = 1, \therefore A - B = 0$, 即 $A = B, \therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

请判断上述解答是否正确?若不正确,请予以指正.

【辨析与解】 小明的解答有 2 处错误:(1)行列式的展开出现错误;(2) $\cos[\pi - (A + B)] \neq \cos(A + B)$.

正确解答: $\begin{vmatrix} 2\sin A & 1 \\ \cos C & \sin B \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow 2\sin A \sin B - \cos C = 1 \Rightarrow 2\sin A \sin B - \cos[\pi - (A + B)] = 1$

$\Rightarrow 2\sin A \sin B + \cos(A + B) = 1 \Rightarrow 2\sin A \sin B + \cos A \cos B - \sin A \sin B = 1$

$\therefore \cos A \cos B + \sin A \sin B = 1 \Rightarrow \cos(A - B) = 1, \therefore A - B = 0$, 即 $A = B, \therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

2. 探究拓展:一道高考试题的引伸

(2002 年全国理 16 题) 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1) + f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f(\frac{1}{3}) + f(4) + f(\frac{1}{4})$
= _____.

正确答案为 $3\frac{1}{2}$, 这是毫无疑问的. 从这道高考试题中能否提炼出什么?

首先对结构进行加工: 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(\frac{1}{1}) + f(\frac{2}{1}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{2}) =$ _____. 如果直接代入求值, 很容易得出答案. 为了探究更有价值的东西, 不妨将这 4 个函数值排成一个有序的两行两列

的数表 $\begin{bmatrix} f(\frac{1}{1}) & f(\frac{2}{1}) \\ f(\frac{1}{2}) & f(\frac{2}{2}) \end{bmatrix}$, 细心观察你将发现: 把两行两列的数表绕主对角线旋转 180° 后, 所重叠的两个

函数值之和为 1, 推出 4 个函数值之和为 $\frac{2^2}{2} = 2$.

其次增加项数验证: 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 那么

(1) $f(\frac{1}{1}) + f(\frac{2}{1}) + f(\frac{3}{1}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{2}) + f(\frac{3}{2}) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{3}{3}) =$ _____;

(2) $f(\frac{1}{1}) + f(\frac{2}{1}) + f(\frac{3}{1}) + f(\frac{4}{1}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{2}) + f(\frac{3}{2}) + f(\frac{4}{2}) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{3}{3})$
 $+ f(\frac{4}{3}) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{4}) + f(\frac{3}{4}) + f(\frac{4}{4}) =$ _____.

(1) 将这 9 个函数值排成一个有序的 3 行 3 列的数表 $\begin{bmatrix} f(\frac{1}{1}) & f(\frac{2}{1}) & f(\frac{3}{1}) \\ f(\frac{1}{2}) & f(\frac{2}{2}) & f(\frac{3}{2}) \\ f(\frac{1}{3}) & f(\frac{2}{3}) & f(\frac{3}{3}) \end{bmatrix}$;

(2) 将这 16 个函数值排成一个有序的 4 行 4 列的数表

$$\begin{pmatrix} f(\frac{1}{1}) & f(\frac{2}{1}) & f(\frac{3}{1}) & f(\frac{4}{1}) \\ f(\frac{1}{2}) & f(\frac{2}{2}) & f(\frac{3}{2}) & f(\frac{4}{2}) \\ f(\frac{1}{3}) & f(\frac{2}{3}) & f(\frac{3}{3}) & f(\frac{4}{3}) \\ f(\frac{1}{4}) & f(\frac{2}{4}) & f(\frac{3}{4}) & f(\frac{4}{4}) \end{pmatrix}$$

同样将(1)(2)中的数表沿着主对角线旋转 180° 后所重叠的两个函数值之和为 1. 下面给予证明:

$$\text{在 } f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \text{ 中, 令 } x = \frac{i}{j} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{j}{i}, \text{ 则: } f(\frac{i}{j}) + f(\frac{j}{i}) = \frac{(\frac{i}{j})^2}{1+(\frac{i}{j})^2} + \frac{(\frac{j}{i})^2}{1+(\frac{j}{i})^2} = \frac{i^2}{j^2+i^2} + \frac{j^2}{i^2+j^2} = 1.$$

依据已证明的规律(1)的结果为 $\frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$, (2)的结果为 $\frac{4^2}{2} = 8$.

由此可见利用中心对称的旋转,即中心对称变换法,很顺利地求出(1)(2)的结果. 据此推广一般:

$$\text{已知 } f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}, \text{ 那么 } f(\frac{1}{1}) + f(\frac{2}{1}) + \dots + f(\frac{n}{1}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{2}) + \dots + f(\frac{n}{2}) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + \dots + f(\frac{n}{3}) + \dots + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n}{n}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

上式中共有 n^2 个函数值,将这 n^2 个函数值排成一个有序的 n 行 n 列的数表,用 n 行 n 列的数表旋转 180° 的中心对称变换法,可得:

$$\begin{pmatrix} f(\frac{1}{1}) & f(\frac{2}{1}) & \dots & f(\frac{n}{1}) \\ f(\frac{1}{2}) & f(\frac{2}{2}) & \dots & f(\frac{n}{2}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f(\frac{1}{n}) & f(\frac{2}{n}) & \dots & f(\frac{n}{n}) \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{i,j=1}^n [f(\frac{i}{j}) + f(\frac{j}{i})] = \frac{n^2}{2} (*)$$

即:当 $i = j$ 时,主对角线上元素有 n 个共 $\frac{n^2}{2}$ 对,当 $i \neq j$ 时,非主对角线上元素有 $(n^2 - n)$ 个共 $(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2})$ 对,而每对两个函数值之和都为 1,故所有函数值之和为 $\frac{n^2}{2}$.

【例 11】 已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 求:

$$f(\frac{1}{1}) + f(\frac{2}{1}) + \dots + f(\frac{1000}{1}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{2}) + \dots + f(\frac{1000}{2}) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + \dots + f(\frac{1000}{3}) + \dots + f(\frac{1}{1000}) + f(\frac{2}{1000}) + \dots + f(\frac{1000}{1000}) \text{ 的值.}$$

【解题策略】 根据上式(*)的结论.

$$\text{【解】 原式} = \frac{1000^2}{2} = 500000.$$

【点评】 把一道数学高考试题进行引伸,推广出更为一般的结论,就是一种数学创造.

训 练 篇

周二基础练 —— 二阶行列式的展开、解方程组

一、选择题

1. 式子 $3x^2 - 5x$ 用行列式表示是

()

A. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ x & x \end{vmatrix}$

B. $\begin{vmatrix} x^2 & \frac{5}{2}x \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} 3x & x \\ -5 & x \end{vmatrix}$

D. $\begin{vmatrix} x^2 & 5x \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

2. 与二阶行列式 $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ 的值相等的行列式为

()

A. $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$

B. $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 37 & 9 \end{vmatrix}$

D. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

3. 用二阶行列式解线性方程组 $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$, 则下列表达式中正确的是

()

A. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

B. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

C. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

D. $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

4. 若二元一次方程组 $\begin{cases} mx + 3y = 6 \\ \frac{2}{3}x + y = n \end{cases}$ 有无穷多组解, 则 m, n 的值为

()

A. $m = 2 \quad n = 2$

B. $m = -2 \quad n = 2$

C. $m = 2 \quad n = -2$

D. $m = -2 \quad n = -2$

5. 若 $\begin{vmatrix} 2x & \frac{7}{3}x - 1 \\ 3 & x \end{vmatrix} < 0$, 则 x 为

()

A. $x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 3$

B. $x < -3$ 或 $x > -\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2} < x < 3$

D. $-3 < x < -\frac{1}{2}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 下列各式与 $a + c = 2b$ 等价的式子是

()

A. $\begin{vmatrix} A + C & 2 \\ B & 1 \end{vmatrix} = 0$

B. $\begin{vmatrix} \sin(A + C) & \cos B \\ 2\sin B & 1 \end{vmatrix} = 0$

C. $\begin{vmatrix} \sin A + \sin C & 1 \\ \sin 2B & 1 \end{vmatrix} = 0$

D. $\begin{vmatrix} \sin A + \sin C & 1 \\ 2\sin B & 1 \end{vmatrix} = 0$

二、填空题

7. 若 $\begin{vmatrix} x & -x \\ 8 & x \end{vmatrix} = 9$, 则 $x =$ _____.

8. 若 $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 则 $x =$ _____.

9. 将代数式 $\sin x \cos y + \cos x \sin y$ 用行列式表示(写出一个式子即可) 为 _____.