◆ 上海东方激光教育文化有限公司 组编

高中数学
知识、方法和实践

高二（上）

中国三峡出版社

责任编辑：马文晓
特约编辑：苏宁萍　陈　瑜
封面设计：陶华达

ORIENT LASER
东方激光

· ZH
I · SHI · FANG ·

ISBN 7-80099-922-X
9 787800 999222 >
ISBN 7-80099-922-X
定价：46.00元（全二册）

高中数学知识、方法和实践

—— 高二（上）

◆ 上海东方激光教育文化有限公司　组编

《高中数学知识、方法和实践》丛书编委会

主　　编　袁建平　周宁医

（上海市建平中学）

编　　委　（按姓氏笔画排序）

何作勇　吴惠逸　周宁医　陶志诚

袁建平　谢立竿　颜国连　戴丽君

本册编者　周宁医　戴丽君　谢立竿　何作勇

中国三峡出版社

前　言

参考书特别是一本好的参考书，是学生学习中必不可少的。摆在同学们面前的《高中数学知识、方法和实践》，正是这样的既贴近教与学，又非常实用的高中数学辅导丛书。

本丛书的特点及使用方法介绍如下：

1. 本丛书以每周的学习内容为一讲，每讲分三篇：【知识篇】、【方法篇】、【训练篇】，编写中体现三个原则：① 学法辅导与同步训练相结合；② 基础知识、方法与重难点内容相结合；③ 高一、高二的课本内容与高考的能力考查相结合。每章还附有〖本章单元测试题〗及〖本章高考试题选〗，书末有两个附录：参考答案及数学思想方法与数学解题技能技巧索引。

2. 【方法篇】是本丛书的核心内容之一，本篇分三个层次：

① **例题精析**：以基本题型来细化本周学习的基本知识和基本方法，其所选的例题尽可能涵盖所学内容，这是每位学生都**必须学习和掌握**的内容；

② **重难点选讲**：每周精选一到二个重难点内容以专题形式进行简要的分析、归纳和小结，这些内容往往是同学们学习中的“瓶颈”，突破了，则学习就变得轻松自如，具有“纲举目张”的作用，因此，这也是每位学生应**努力学好**的内容；

③ **能力与发展**：一些课本上涉及较少但又往往是高考能力考查的内容，我们将在这里进行简要的介绍与分析，这部分内容又分两小块：概念辨析与探究拓展，其中，概念辨析以错例的形式出现，考查学生对数学概念及方法的“错与对”的辨析能力，以及对数学概念内涵的深刻理解，这是课本上涉及很少但近几年高考频频出现的热点试题 ；探究拓展则精选一到两个高考热点问题进行分析和归纳。这节的内容虽有一定的难度，但高考却必须面对，因此，这是那些学有余力及重点中学的学生需**力争努力学习**的内容

3. 【训练篇】是本丛书颇具特色的又一核心内容，本篇分三类 ：

① **周二基础练**：精选与【方法篇】中例题精析相对应的基本内容和题型，这部分习题与教学同步，含上周三到本周二的学习内容，是学生基础达标习题，也是每位学生**必做习题**（30-45 分钟）；

② **周四专题练**：分两个专题，其中专题（一）为本讲【方法篇】中重难点选讲所对应的专题训练，是学生重点强化习题，为每位学生应**努力做好**的习题（30-45 分钟）；专题（二）为本讲【方法篇】中能力与发展相对应的习题及一些能力题，可选作，是学有余力及重点中学的学生能力拓展习题，这部分有目的地选了最近的一些新颖题及能力题，可选作，主要是为了学生更好地适应目前高考的能力考

查，题目有一定的思维量，可放在学完本讲后或本章后再去做。力争**努力完成**，（30-45 分钟）。

③ **周六实战练**：这是与本讲所学全部内容相对应的测试题，其难度参照重点学校的考试要求，同学们可用此来及时检验自己对本讲内容掌握的程度，希望每位学生按规定时间完成本套习题，是每位学生**都应做**的习题（9C-100 分钟）。

《**高中数学知识、方法和实践**》为各级各类高中的莘莘学子提供了一套集知识、方法及训练为一体的翔实完备的学习资料，参加编写的都是长期奋战在教学**第一线**的名师、学科带头人、高级教师等，对同学们学好数学必将大有裨益；该丛书最大特点是针对性强，按照认知规律："知道什么"、"为什么"、"还有什么"这根主线，为学生搭建合理的知识平台，构筑数学解题能力，把学生从"课课练、天天做"中解放出来，只要每周做 2-3 套便可达到理想程度，使数学学习变得轻松而更加有效。使用该丛书对象为各级各类中学的高一至高三的学生，对高中数学教师也具有很好的参考价值。

《**高中数学知识、方法和实践**》由下列系列书构成：

◆ 高中数学知识、方法和实践（高一上、下）

◆ 高中数学知识、方法和实践（高二上、下）

本丛书由袁建平、周宁医主编策划。本册编者：周宁医（第 1－5 讲）、何作勇（第 6、8－11 讲）、戴丽君、谢立竿（第 12－14 讲），蒋逸明（第 7、15 讲），周宁医审定；这里还要特别感谢建平中学 2005 届高三（2）班周玲、虞靖，高三（12）班杨忠铭、花海雯、王燕飞、吴梦慈等同学为本书进行了校对和例（习）题验算。

由于本丛书立意新颖，编写难度较大，又受作者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请读者不吝指正。

联系地址：Email: yuanjp@eastday.com，zhny2005@sina.com

编　者

目　录

第九章　行列式初步

第一讲　二阶行列式

知　　识　　篇

【知识要点】

1. 二阶行列式

(1) 定义

我们用记号$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$表示算式$a_1b_2-a_2b_1$，即$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$. 记号$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$叫做行列式，因为它只有两行、两列，所以把它叫做二阶行列式，$a_1b_2-a_2b_1$叫做行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$的展开式，其计算结果叫做行列式的值. a_1、a_2、b_1、b_2都叫做行列式$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$的元素.

(2) 对角线法则

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$中实线表示的对角线叫做主对角线，虚线表示的对角线叫做副对角线；主对角线上的两个数的乘积减去副对角线上的两个数的乘积，即$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$.

【析】 (1) 二阶行列式就是表示四个数(或式)的特定算式的一种记号，其结果是一个数；(2) 二阶行列式的展开式是主对角线上的两个数的乘积减去副对角线上的两个数的乘积.

行列式可用大写字母表示，如$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

2. 作为判别式的二阶行列式

二元一次方程组(＊)$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2 \end{cases}$，其中$x$、$y$是未知系数，$a_1$、$a_2$、$b_1$、$b_2$不全为零，行列式$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$；$D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$；其中$D$叫做方程组(＊)的系数行列式.

(Ⅰ) 当$D\neq 0$时，方程组有唯一解$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D} \\ y=\dfrac{D_y}{D} \end{cases}$；(Ⅱ) 当$D=0$，$D_x=D_y=0$时，方程组有无穷多解；

(Ⅲ) 当$D=0$，D_x，D_y中至少有一个不为零时，方程组无解.

【析】 方程组(＊)可转化为方程组$\begin{cases} D\cdot x=D_x \\ D\cdot y=D_y \end{cases}$，当$D=0$，$D_x=D_y=0$时，$x$、$y$为任何值，方程组$\begin{cases} D\cdot x=D_x \\ D\cdot y=D_y \end{cases}$都成立；当$D=0$，$D_x$，$D_y$中至少有一个不为零时，方程组$\begin{cases} D\cdot x=D_x \\ D\cdot y=D_y \end{cases}$至少有一个不能成立.

【学习目标】

1. 理解二阶行列式的概念.
2. 掌握二阶行列式的算法.
3. 会利用二阶行列式的判别式判别二元一次方程组解的情况.

方　法　篇

【例题精析】

1. 二阶行列式的概念问题

【例 1】 判别以下几项中哪些是二阶行列式,哪些不是二阶行列式?

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ \frac{4}{3} & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & \sqrt[3]{5} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$.

【解题策略】 利用二阶行列式的定义判断.

【解】 (2)、(4) 是二阶行列式;(1)、(3) 不是二阶行列式.

【点评】 是否为二阶行列式,关键是理解二阶行列式的定义.

【例 2】 将下列各式用行列式表示:

(1)b^2-4ac;　　(2)$5x-\frac{1}{2}y$;　　(3)x^2-4x+2.

【解题策略】 利用二阶行列式的对角线法则.

【解】 (1)$b^2-4ac=\begin{vmatrix} b & 2a \\ 2c & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & 4a \\ c & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4ac & b^2 \end{vmatrix}\cdots$;

(2)$5x-\frac{1}{2}y=\begin{vmatrix} x & 1 \\ \frac{1}{2}y & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & -4 \\ -\frac{1}{8}y & 5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5x & -\frac{1}{2} \\ -y & 1 \end{vmatrix}\cdots$;

(3)$x^2-4x+2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 2x-1 \\ 2 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2+2 & x \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\cdots$.

【点评】 行列式就是表示数(或式)的特定算式的一种记号,凡两个积之差式都可写成一个二阶行列式,而且形式不唯一.

2. 二阶行列式的算法问题

【例 3】 展开下列行列式,并化简:

(1) $\begin{vmatrix} -9 & 7 \\ 2 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} m-2 & 2m+3 \\ 4m & 8m+6 \end{vmatrix}$;　　(3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha-\cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha+\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

【解题策略】 理解行列式的概念,展开即可.

【解】 (1) $\begin{vmatrix} -9 & 7 \\ 2 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}=6-14=-8$;

(2) $\begin{vmatrix} m-2 & 2m+3 \\ 4m & 8m+6 \end{vmatrix}=(m-2)(8m+6)-4m(2m+3)=-22m-12$;

(3) $\begin{vmatrix} \sin\alpha-\cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha+\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}=(\sin\alpha-\cos\alpha)\cos\alpha-\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)=-1$.

【点评】 用二阶行列式的对角线法则展开是基础.

【例 4】 计算

(1) $\begin{vmatrix} 2\cos\frac{\pi}{12} & -1 \\ 1 & \cos\frac{11\pi}{12} \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ 2 & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}$.

【解题策略】 当行列式与其它知识结合时，层层深入，化繁为简.

【解】 (1) $\begin{vmatrix} 2\cos\frac{\pi}{12} & -1 \\ 1 & \cos\frac{11\pi}{12} \end{vmatrix} = 2\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}+1 = -2\cos^2\frac{\pi}{12}+1 = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(2) $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ 2 & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} = -2+4=2$ 或 $\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ 2 & -\frac{2}{5} \end{vmatrix}$

$= -\frac{2}{5}\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}\cdot 5 - 2\cdot(-2) = -2+4=2.$

【点评】 去除繁琐的"外表"，抓住问题的本质.

【例 5】 设函数 $f(x) = \left|\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}\right|$，求 $f(x)$ 的最小正周期.

【解题策略】 利用二阶行列式对角线法则展开，求出函数的解析式.

【解】 $f(x) = \left|\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}\right| = |\sin^2 x - \cos^2 x| = |\cos 2x|$，$\therefore T = \frac{\pi}{2}$.

【点评】 求函数周期时要注意有绝对值和无绝对值的区别.

【例 6】 若已知函数 $f(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta & \cos\frac{\pi}{3} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $\theta\in[0,2\pi]$，求 θ 的值.

【解题策略】 先求出函数解析式，然后解三角方程.

【解】 $f(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta & \cos\frac{\pi}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = -\sin(\theta-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(\theta-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta-\frac{\pi}{6} = 2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 或 $\theta-\frac{\pi}{6} = 2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，$\because \theta\in[0,2\pi]$，$\therefore \theta = \frac{5\pi}{12}$ 或 $\frac{11\pi}{12}$.

【点评】 本题是行列式与三角的综合，把行列式展开后，解三角方程.

【重难点选讲】二元一次方程组的行列式解法

用行列式的方法解二元一次方程组，主要表现在两个方面：(1) 解二元一次方程组；(2) 判断方程组解的情况.

【例 7】 利用行列式解下列关于 x、y 的方程组：

(1) $\begin{cases} 11x-y-6=0 \\ 3x+5y+1=0 \end{cases}$； (2) $\begin{cases} x\sin\theta + y\cos\theta = \sin\theta \\ x\sin(\frac{3\pi}{2}+\theta) + y\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta \end{cases}$

【解题策略】 把方程组化为一般形式，易于得到正确的 D, D_x, D_y.

【解】 (1) 先把方程组写成一般形式：$\begin{cases} 11x-y=6 \\ 3x+5y=-1 \end{cases}$，由 $D = \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 55-(-3) = 58$，

$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 29$，$D_y = \begin{vmatrix} 11 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -29$，得 $x = \frac{D_x}{D} = \frac{29}{58} = \frac{1}{2}$，$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-29}{58} = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ 方程组的解集是$\{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$.

(2) 方程组转化为：$\begin{cases} x\sin\theta+y\cos\theta=\sin\theta \\ -x\cos\theta+y\sin\theta=\cos\theta \end{cases}$，由 $D=\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}=1$，

$D_x=\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}=-\cos2\theta$，

$D_y=\begin{vmatrix} \sin\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=\sin2\theta$，所以 $x=\frac{D_x}{D}=-\cos2\theta, y=\frac{D_y}{D}=\sin2\theta$

$\therefore$ 方程组的解集是$\{(-\cos2\theta,\sin2\theta)\}$.

【点评】 正确算出 D,D_x,D_y 是解方程组的关键，当所给方程组的形式不是方程组(*)的形式时，应先化为方程组(*)的形式，这有利于得到正确的 D_x,D_y.

【例 8】 判断 m 取什么值时，下列关于 s、t 的方程组有唯一解：

(1) $\begin{cases} (m^2-1)s-(m+1)t=m+1 \\ m^2s-(m+1)t=m-1 \end{cases}$； (2) $\begin{cases} (m+2)s+2mt=7 \\ ms+m^2t=11 \end{cases}$.

【解题策略】 二元线性方程组有唯一解的充要条件是 $D\neq0$.

【解】 (1)$D=\begin{vmatrix} m^2-1 & -(m+1) \\ m^2 & -(m+1) \end{vmatrix}=(1-m)(m+1)^2+(m+1)m^2=m+1$，

$\therefore$ 当 $D=m+1\neq0$ 时，即 $m\neq-1$ 时方程组有唯一解.

(2)$D=\begin{vmatrix} m+2 & 2m \\ m & m^2 \end{vmatrix}=m^3$，$\therefore$ 当 $D=m^3\neq0$ 时，即 $m\neq0$ 时方程组有唯一解.

【点评】 $D\neq0$ 是方程组(*)有唯一解的充分必要条件，D 叫做方程组解的判别式.

【例 9】 解下列关于 x、y 的方程组：

$\begin{cases} (m+5)x+(2m+3)y=3m+2 \\ (3m+10)x+(5m+6)y=2m+4 \end{cases}$.

【解题策略】 理解二元线性方程组解的情况，正确计算 D,D_x,D_y，根据情况进行分类讨论，做到不重不漏.

【解】 $D=\begin{vmatrix} m+5 & 2m+3 \\ 3m+10 & 5m+6 \end{vmatrix}=(5m^2+31m+30)-(6m^2+29m+30)=-m^2+2m=-m(m-2)$

$D_x=\begin{vmatrix} 3m+2 & 2m+3 \\ 2m+4 & 5m+6 \end{vmatrix}=15m^2+28m+12-4m^2-14m-12=11m^2+14m=m(11m+14)$

$D_y=\begin{vmatrix} m+5 & 3m+2 \\ 3m+10 & 2m+4 \end{vmatrix}=2m^2+14m+20-9m^2-36m-20=-7m^2-22m=-m(7m+22)$

(1) 当 $m\neq0$ 且 $m\neq2$ 时，$D\neq0$，方程组有唯一解 $\begin{cases} x=\frac{11m+14}{2-m} \\ y=\frac{7m+22}{m-2} \end{cases}$；

(2) 当 $m=2$ 时，$D=0,D_x\neq0$，方程组无解；

(3) 当 $m=0$ 时，$D=D_x=D_y=0$，方程组有无穷多解，此时原方程组为 $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 5x+3y=2 \end{cases}$，令 $x=t(t\in\mathbf{R})$，

则原方程组的解可表示为 $\begin{cases} x=t \\ y=\frac{2-5t}{3} \end{cases}$ $(t\in\mathbf{R})$.

【点评】 理解"$D=D_x=D_y=0$，方程组有无穷多解"是掌握这一类问题的关键，稳妥方法是代入原方程组.

【能力与发展】

1. 概念辨析

【例 10】 学生小明解下列问题：在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\begin{vmatrix} 2\sin A & 1 \\ \cos C & \sin B \end{vmatrix} = 1$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解法如下：$\begin{vmatrix} 2\sin A & 1 \\ \cos C & \sin B \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow 2\sin A\sin B + \cos C = 1 \Rightarrow 2\sin A\sin B + \cos[\pi - (A+B)] = 1 \Rightarrow 2\sin A\sin B + \cos(A+B) = 1 \Rightarrow 2\sin A\sin B + \cos A\cos B - \sin A\sin B = 1$

$\therefore \cos A\cos B + \sin A\sin B = 1 \Rightarrow \cos(A-B) = 1$，$\therefore A - B = 0$，即 $A = B$，$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

请判断上述解答是否正确？若不正确，请予以指正.

【辨析与解】 小明的解答有 2 处错误：(1) 行列式的展开出现错误；(2) $\cos[\pi-(A+B)] \neq \cos(A+B)$.

正确解答：$\begin{vmatrix} 2\sin A & 1 \\ \cos C & \sin B \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow 2\sin A\sin B - \cos C = 1 \Rightarrow 2\sin A\sin B - \cos[\pi - (A+B)] = 1$

$\Rightarrow 2\sin A\sin B + \cos(A+B) = 1 \Rightarrow 2\sin A\sin B + \cos A\cos B - \sin A\sin B = 1$

$\therefore \cos A\cos B + \sin A\sin B = 1 \Rightarrow \cos(A-B) = 1$，$\therefore A - B = 0$，即 $A = B$，$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

2. 探究拓展：一道高考试题的引伸

(2002 年全国理 16 题) 已知 $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$，那么 $f(1)+f(2)+f(\frac{1}{2})+f(3)+f(\frac{1}{3})+f(4)+f(\frac{1}{4}) =$ ________.

正确答案为 $3\frac{1}{2}$，这是毫无疑问的. 从这道高考试题中能否提炼出什么？

首先对结构进行加工：已知 $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$，那么 $f(\frac{1}{1})+f(\frac{2}{1})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{2}{2}) =$ ________. 如果直接代入求值，很容易得出答案. 为了探究更有价值的东西，不妨将这 4 个函数值排成一个有序的两行两列的数表 $\begin{bmatrix} f(\frac{1}{1}) & f(\frac{2}{1}) \\ f(\frac{1}{2}) & f(\frac{2}{2}) \end{bmatrix}$，细心观察你将发现：把两行两列的数表绕主对角线旋转 180° 后，所重叠的两个函数值之和为 1，推出 4 个函数值之和为 $\frac{2^2}{2} = 2$.

其次增加项数验证：已知 $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$，那么

(1) $f(\frac{1}{1})+f(\frac{2}{1})+f(\frac{3}{1})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{2}{2})+f(\frac{3}{2})+f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+f(\frac{3}{3}) =$ ________；

(2) $f(\frac{1}{1})+f(\frac{2}{1})+f(\frac{3}{1})+f(\frac{4}{1})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{2}{2})+f(\frac{3}{2})+f(\frac{4}{2})+f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+f(\frac{3}{3})+f(\frac{4}{3})+f(\frac{1}{4})+f(\frac{2}{4})+f(\frac{3}{4})+f(\frac{4}{4}) =$ ________.

(1) 将这 9 个函数值排成一个有序的 3 行 3 列的数表 $\begin{bmatrix} f(\frac{1}{1}) & f(\frac{2}{1}) & f(\frac{3}{1}) \\ f(\frac{1}{2}) & f(\frac{2}{2}) & f(\frac{3}{2}) \\ f(\frac{1}{3}) & f(\frac{2}{3}) & f(\frac{3}{3}) \end{bmatrix}$；

(2) 将这 16 个函数值排成一个有序的 4 行 4 列的数表 $\begin{pmatrix} f(\frac{1}{1}) & f(\frac{2}{1}) & f(\frac{3}{1}) & f(\frac{4}{1}) \\ f(\frac{1}{2}) & f(\frac{2}{2}) & f(\frac{3}{2}) & f(\frac{4}{2}) \\ f(\frac{1}{3}) & f(\frac{2}{3}) & f(\frac{3}{3}) & f(\frac{4}{3}) \\ f(\frac{1}{4}) & f(\frac{2}{4}) & f(\frac{3}{4}) & f(\frac{4}{4}) \end{pmatrix}$

同样将(1)(2) 中的数表沿着主对角线旋转 180° 后所重叠的两个函数值之和为 1. 下面给予证明：

在 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$ 中，令 $x=\frac{i}{j}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{j}{i}$，则 $f(\frac{i}{j})+f(\frac{j}{i})=\frac{(\frac{i}{j})^2}{1+(\frac{i}{j})^2}+\frac{(\frac{j}{i})^2}{1+(\frac{j}{i})^2}=\frac{i^2}{j^2+i^2}+\frac{j^2}{i^2+j^2}=1.$

依据已证明的规律(1) 的结果为 $\frac{3^2}{2}=\frac{9}{2}$；(2) 的结果为 $\frac{4^2}{2}=8$.

由此可见利用中心对称的旋转，即中心对称变换法，很顺利地求出(1)(2) 的结果. 据此推广一般：

已知 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，那么 $f(\frac{1}{1})+f(\frac{2}{1})+\cdots+f(\frac{n}{1})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{2}{2})+\cdots+f(\frac{n}{2})+f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+\cdots+f(\frac{n}{3})+\cdots+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})=$ ________.

上式中共有 n^2 个函数值，将这 n^2 个函数值排成一个有序的 n 行 n 列的数表，用 n 行 n 列的数表旋转 180° 的中心对称变换法，可得：

$$\begin{pmatrix} f(\frac{1}{1}) & f(\frac{2}{1}) & \cdots & f(\frac{n}{1}) \\ f(\frac{1}{2}) & f(\frac{2}{2}) & \cdots & f(\frac{n}{2}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f(\frac{1}{n}) & f(\frac{2}{n}) & \cdots & f(\frac{n}{n}) \end{pmatrix}\Rightarrow\sum_{i,j=1}^{n}[f(\frac{i}{j})+f(\frac{j}{i})]=\frac{n^2}{2}(*)$$

即：当 $i=j$ 时，主对角线上元素有 n 个共 $\frac{n}{2}$ 对，当 $i\neq j$ 时，非主对角线上元素有 (n^2-n) 个共 $(\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2})$ 对，而每对两个函数值之和都为 1，故所有函数值之和为 $\frac{n^2}{2}$.

【例 11】 已知 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$，求：

$f(\frac{1}{1})+f(\frac{2}{1})+\cdots+f(\frac{1000}{1})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{2}{2})+\cdots+f(\frac{1000}{2})+f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+\cdots+f(\frac{1000}{3})+\cdots+f(\frac{1}{1000})+f(\frac{2}{1000})+\cdots+f(\frac{1000}{1000})$ 的值.

【解题策略】 根据上式(*)的结论.

【解】 原式 $=\frac{1000^2}{2}=500000$.

【点评】 把一道数学高考试题进行引伸，推广出更为一般的结论，就是一种数学创造.

训　　练　　篇

周二基础练——二阶行列式的展开、解方程组

一、选择题

1. 式子 $3x^2-5x$ 用行列式表示是　　(　　)

A. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ x & x \end{vmatrix}$　　B. $\begin{vmatrix} x^2 & \frac{5}{2}x \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$　　C. $\begin{vmatrix} 3x & x \\ -5 & x \end{vmatrix}$　　D. $\begin{vmatrix} x^2 & 5x \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

2. 与二阶行列式 $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ 的值相等的行列式为　　(　　)

A. $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$　　B. $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$　　C. $\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 37 & 9 \end{vmatrix}$　　D. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

3. 用二阶行列式解线性方程组 $\begin{cases} x+y-3=0 \\ 3x-2y+1=0 \end{cases}$，则下列表达式中正确的是　　(　　)

A. $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, D_x=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, D_y=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

B. $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, D_x=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, D_y=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

C. $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, D_x=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, D_y=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

D. $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, D_x=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, D_y=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

4. 若二元一次方程组 $\begin{cases} mx+3y=6 \\ \frac{2}{3}x+y=n \end{cases}$ 有无穷多组解，则 m、n 的值为　　(　　)

A. $m=2\quad n=2$　　B. $m=-2\quad n=2$　　C. $m=2\quad n=-2$　　D. $m=-2\quad n=-2$

5. 若 $\begin{vmatrix} 2x & \frac{7}{3}x-1 \\ 3 & x \end{vmatrix}<0$，则 x 为　　(　　)

A. $x<\frac{1}{2}$ 或 $x>3$　　B. $x<-3$ 或 $x>-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}<x<3$　　D. $-3<x<-\frac{1}{2}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中，下列各式与 $a+c=2b$ 等价的式子是　　(　　)

A. $\begin{vmatrix} A+C & 2 \\ B & 1 \end{vmatrix}=0$　　B. $\begin{vmatrix} \sin(A+C) & \cos B \\ 2\sin B & 1 \end{vmatrix}=0$

C. $\begin{vmatrix} \sin A+\sin C & 1 \\ \sin 2B & 1 \end{vmatrix}=0$　　D. $\begin{vmatrix} \sin A+\sin C & 1 \\ 2\sin B & 1 \end{vmatrix}=0$

二、填空题

7. 若 $\begin{vmatrix} x & -x \\ 8 & x \end{vmatrix}=9$，则 $x=$ ________.

8. 若 $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，则 $x=$ ________.

9. 将代数式 $\sin x\cos y+\cos x\sin y$ 用行列式表示（写出一个式子即可）为________.