

高等工科院校信息与控制类专业教学用书

XIANXING XITONG
LILUN JICHU

孙亮 于建均 龚道雄 编著

线性系统理论

基础

北京工业大学出版社

线性系统理论基础

孙 亮 于建均 龚道雄 编著

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书是为适应高等院校教学改革和课程改革需要而编写的控制类课程教材, 全书介绍了线性系统理论的一些基础知识。主要内容包括: 线性系统的状态空间模型, 线性系统的运动分析, 线性系统的能控性与能观测性, 线性系统的结构分析, 李雅普诺夫稳定性, 以及线性系统综合的一些基本方法。为配合本课程教学, 本书在附录 1 列出了一些系统仿真常用的 MATLAB 函数与仿真程序, 附录 2 给出部分习题答案。

本书适合于高等院校信息与控制类专业及其他工科相关专业的本科生作为教材使用, 也适用于其他相关的专业人员阅读参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

线性系统理论基础/孙亮, 于建均, 龚道雄编著.

北京: 北京工业大学出版社, 2006.8

ISBN 7 - 5639 - 1695 - 4

I. 线... II. ①孙... ②于... ③龚... III. 线性系统理论 - 高等学校 - 教材 IV. 0231.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 092349 号

线性系统理论基础

孙亮 于建均 龚道雄 编著

*

北京工业大学出版社出版发行

邮编: 100022 电话: (010) 67392308

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

*

2006 年 9 月第 1 版 2006 年 9 月第 1 次印刷

787 mm × 1 092 mm 16 开 16.25 印张 416 千字

ISBN 7 - 5639 - 1695 - 4/G · 844

定价: 26.00 元

前 言

当前,计算机技术、信息处理技术和智能控制技术的快速发展,对高等院校控制类专业的人才培养提出了更高的要求。为了使具有较扎实的理论基础,较宽的知识面,较强的工程实践能力,提高学生的综合素质,高等院校相关专业必须在教学计划的安排,课程的设置,教材的内容以及教学手段、教学方法等方面进行调整 and 改革,以适应和满足社会对人才培养的需要。

为了适应信息与控制学科的发展,作者根据多年教学改革的实践,在编写经典控制理论教材《自动控制原理》(修订版于 2006 年 1 月由北京工业大学出版社出版)的基础上,编写了这本关于现代控制理论的《线性系统理论基础》一书。

自 20 世纪 60 年代起至今,线性系统理论的发展渐趋成熟,已经在各行业获得了广泛的应用并逐渐发展为成熟的工业技术。作为基础知识之一的“状态空间描述方法”已经成为控制系统分析的重要数学模型。线性系统的运动分析与结构分析也跨越了经典控制理论系统分析的概念,成为线性系统分析的基础内容。线性系统理论分析的一些基本方法,如状态反馈、状态观测器、线性二次型最优调节器等均在工业上作为成熟的技术获得推广应用。其他如李雅普诺夫稳定性分析、自适应控制器等知识也已经成为线性系统理论知识的一部分。在上述控制理论与技术发展的基础上,编写《线性系统理论基础》一书是十分必要的。

本书共六章:第 1 章绪论,介绍控制理论的发展历程。第 2 章介绍线性系统的状态空间模型,主要内容包括状态空间模型的建立、线性系统的标准型、线性系统的传递函数矩阵等。第 3 章介绍线性系统的运动分析,主要内容包括齐次状态方程求解、非齐次状态方程求解、线性时变系统的运动解,以及离散时间系统的解等。第 4 章介绍线性系统的结构分析,主要内容包括线性系统的能控性与能观测性,线性系统的子空间分解、实现与最小实现,以及传递函数矩阵的能控性与能观测性等。第 5 章介绍李雅普诺夫稳定性,主要内容包括控制系统稳定性的定义、李雅普诺夫第二方法、线性定常系统的稳定性分析、非线性系统的稳定性分析,以及李雅普诺夫第二方法的应用等。第 6 章介绍一些线性系统综合的基础方法,主要内容包括状态反馈与输出反馈、线性系统极点配置、线性系统的镇定问题、状态观测器理论、线性系统解耦设计、线性二次型最优控制,以及线性系统的鲁棒性与 H_∞ 控制理论等。为了方便读者在掌握理论知识的基础上进行控制系统的仿真练习,编写了附录 1,内容是一些系统仿真常用的 MATLAB 函数,以及若干控制仿真基本概念与基本方法的 MATLAB 仿真程序。在附录 2 中给出了部分习题答案。

本教材适用于控制类专业本科生的课内教学,内容是按照 60 学时编写的,其中理论教学建议为 50 学时,实验教学建议为 10 学时。在讲授时,按照实际需要还可以对学时进行调整和压缩,如理论教学 40 学时,实验学时 8 学时。

为了配合本课程的理论教学,作者还编写了 MATLAB 语言与 SIMULINK 仿真设计的实验教材《MATLAB 语言与控制系统仿真》(修订版于 2006 年 1 月由北京工业大学出版社出版)。学生可以在理论学习的基础上,通过 MATLAB 语言仿真实验平台进行控制系统的仿真实验以及控制系统的设计验证。

本教材由北京工业大学孙亮担任主编,按照教材编写大纲的要求,第1章与第6章由孙亮编写,第2章与第3章由于建均编写,第4章与第5章以及附录1由龚道雄编写。另外,陈梅莲编写了附录2中关于常用 MATLAB 函数与 MATLAB 仿真程序的内容。全书由北京工业大学电子信息与控制工程学院阮晓钢主审。

在教材编写过程中,许多专家和教师对本教材提出了宝贵意见;本教材的出版得到了北京工业大学教材建设部门与北京工业大学出版社的大力支持。在此一并表示感谢。

本教材着重于基本原理与基本方法的介绍,因此有些相关内容没有编入,如多变量频域分析等。另外,鉴于编者的水平有限,本书一定存在许多不足之处,敬请同行专家对本书的不足之处给予批评指正,作者将不胜感激。

编 者

2006年6月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 经典控制理论	1
1.2 现代控制理论	2
1.3 智能控制理论	3
第 2 章 线性系统的状态空间描述	5
2.1 动力学系统的状态空间表达式	5
2.2 状态空间表达式的标准型	23
2.3 传递函数矩阵	41
习题	48
第 3 章 线性系统的运动分析	52
3.1 线性定常系统齐次状态方程的解	52
3.2 线性定常系统非齐次状态方程的解	65
3.3 线性时变系统状态方程的解	69
3.4 状态转移矩阵	72
3.5 离散时间系统	78
3.6 离散时间系统状态方程的解	86
习题	89
第 4 章 线性系统的结构分析	93
4.1 线性系统的能控性	93
4.2 线性系统的能观测性	105
4.3 对偶原理	111
4.4 线性系统的子空间分析	113
4.5 能控标准型与能观测标准型	125
4.6 系统实现与最小实现	136
4.7 传递函数矩阵的能控性与能观测性	143
习题	146
第 5 章 李雅普诺夫稳定性分析	149
5.1 李雅普诺夫稳定性定义	150
5.2 李雅普诺夫稳定性理论	154
5.3 线性系统稳定性分析	164
5.4 非线性系统稳定性分析	169
5.5 李雅普诺夫第二法的其他应用	175
习题	181
第 6 章 线性系统综合基础	183

6.1 状态反馈与输出反馈	183
6.2 线性系统极点配置	186
6.3 线性系统的镇定问题	191
6.4 状态观测器理论	192
6.5 线性系统解耦设计	200
6.6 线性二次型最优控制	203
6.7 线性系统的鲁棒性与 H_∞ 控制理论	211
习题	216
附录 1 常用 MATLAB 函数与 MATLAB 程序	219
附录 2 部分习题参考答案	242
参考文献	252

第 1 章 绪 论

控制理论自形成学科以来,经历了近一个世纪的发展,无论是学科内容、学科特色、适用对象,还是研究成果等方面,均达到了前所未有的水平。理论研究成果与应用研究成果层出不穷,研究成果的应用已经扩展到了人类社会活动的各个方面。

控制理论的研究与发展从时间上和内容上可以划分为三个阶段:经典控制理论阶段、现代控制理论阶段与智能控制理论阶段。

1.1 经典控制理论

经典控制理论的研究主要集中在 20 世纪 20 年代至 60 年代,这是由于当时大工业生产的发展需要与军事技术发展的需要,促进了研究成果快速地应用到社会的发展中去。例如发电厂的锅炉控制系统,温度、压力、流量等物理量的控制在小规模时还可以人工完成,但是对于大型发电设备来说,人工控制是不可思议的,必须被自动控制装置与自动控制系统所取代。再如第一次世界大战时飞机在战争中有各种优势,到第二次世界大战时,高射炮、雷达跟踪系统问世,形成了有矛必会产生盾的最终结果。军事技术的需求极大地促进了控制技术的发展,因此,经典控制理论的研究与发展和人类社会的发展是紧密相关的。

经典控制理论的研究对象主要是单输入单输出系统(SISO),如图 1.1 所示。

单输入单输出系统又称为单回路系统。信号流通由反馈通路构成闭合回路,因此经典控制理论研究的控制方法主要是反馈控制,这类似于人类的思维模式,即根据错误来修正目标的思想。因此,可以简单地认为经典控制理论是拟人控制。

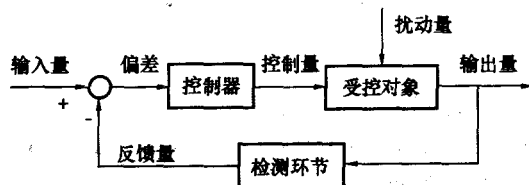


图 1.1 单输入单输出系统

经典控制理论作为学科研究不能准确地确定是从什么时间开始的,但是自 20 世纪 20 年代,数学家奈奎斯特(Harry Nyquist)关于频域稳定性定理的论文发表以来,经典控制理论就与人类生产活动的发展水平相并行,更由于两次世界大战军事技术需求的刺激,在许多学科(如机械、航空、数学等)中的众多学者(如维纳等)的共同努力下,经典控制理论无论是理论研究还是应用研究都取得了丰硕的成果。

经典控制理论研究使用的数学工具主要是传递函数与频率特性,根据受控对象的数学模型来设计控制器,使受控系统实现相应的性能指标。控制器设计方法以时域分析为基础,发展了频率分析法和根轨迹分析法,在这两种方法的基础上产生了多种控制器设计方法,如信号反馈、扰动信号前馈、反馈控制器实现等,但都是基于单回路的设计思想而实现的。

到 20 世纪中期,经典控制理论的研究已经基本成熟,进而在各个领域获得了广泛的应用,如工业、农业、军事、航空、航海、交通、核能利用、导弹制导等领域。许多研究成果或者控制器的设计均已发展为成套设备或者成为标准化产品,如各个时期的单回路调节器、PID 控制器及 DCS 计算机控制系统等,以不可逆转的方式表现着人类生产与生活中的自动化技术的发展水平。

经典控制理论有许多不足之处,还不能够完全解决自动化工程和控制工程中的许多实际问题,这是经典控制理论自身的局限性所致。

就数学工具而言,传递函数是线性系统的定常参数模型,不能表现非线性关系,也不能表现时变参数特性,更难以表现对象模型的不确定性。因此经典控制理论难以应用于许多复杂系统的控制。另外,传递函数主要反映的是受控对象的端口关系,难以展现系统内部的结构关系,因此导致控制器的设计仅是基于端口等价之上的,并不是基于系统实际结构的。

就控制器设计方法而言,基于频率法与根轨迹法的控制器设计方法主要是利用作图来完成的试凑法或者修正法,这也是为什么将控制器设计称为系统校正,或者校正器设计的名称的由来。在试凑的方法下,不可能综合全面地考虑对象与控制器的结构而设计出目标更明确、性能更优的控制系统,因而控制器设计仅标志着自动化的一个基本水平。

就性能指标而言,经典控制理论方法所能够实现的性能指标是就事论事的性能指标,如时域性能指标中的超调量、过渡时间等,频域性能指标中的相位裕度、截止频率等。这些性能指标无论是从描述方法上,或者从实际意义上均缺乏明确的与系统相关的含义,或者说基于上述性能指标设计的系统不是最优的。如果勉强能够实现次优的控制效果,那么也不是由性能指标的约束来实现的。因此,经典控制理论仅标志着自动控制理论发展的初期水平。

1.2 现代控制理论

现代控制理论的研究起始于 20 世纪 50 年代末期。受大工业发展的需求与第二次世界大战中军事技术需求的刺激,工业生产的规模越来越大、越来越复杂,如:石油化工产业、军事武器系统越来越先进,以及航空技术、航天技术的飞速发展。仅限于经典控制理论的方法已不能跟上社会生产发展的需要,进而促进了现代控制理论的研究与发展。

现代控制理论的研究对象一般考虑为多输入多输出系统 (MIMO),如图 1.2 所示。

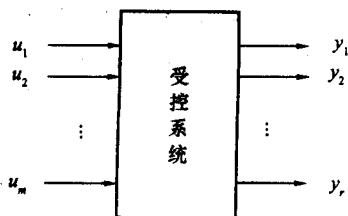


图 1.2 多输入多输出系统

由于现代控制理论研究对象的类型涉及面很宽,有线性系统与非线性系统,定常参数系统与时变参数系统,随机控制系统与不确定性系统,等等。所以,大部分类型系统的控制都可以纳入到现代控制理论研究的范畴。

自 20 世纪 50 年代起,现代控制理论的研究成果层出不穷。从战斗机的飞行舵角控制到人造卫星姿态控制,从工程意义上的自动控制到社会人文意义上的经济模型、人口控制等,使得控制理论的研究得到了长足的发展。在现代控制理论的发展中,卡尔曼

(Rudolf Emil Kalman) 提出了基于状态空间法的系统描述方法, 使用状态空间法的系统结构分析方法, 如能控性和能观测性等, 以及应用于随机系统的卡尔曼滤波器。庞特里亚金 (Lev Semenovich Pontryagin) 提出的极大值原理将基于泛函极值的最优控制问题提高到一个新的理论高度, 有效地解决了约束优化控制问题。贝尔曼 (Richard Bellman) 提出了动态规划方法, 全面、深入地解释了最优控制问题。其他研究成果还有: 最佳滤波理论、自适应控制器、预测控制理论、大系统理论、鲁棒控制理论、 H_∞ 控制理论等。

现代控制理论研究使用的数学方法主要是基于时域的状态空间法。由于独立状态对于系统的描述是完全描述, 因此不同于传递函数模型, 从对象的数学模型描述上确定了系统内部的结构关系, 为控制器的设计提供了有效的保证。

本教材基于 20 世纪后半叶现代控制理论的研究成果来描述, 主要介绍一些现代控制理论的基础知识。关于线性系统分析的主要内容有: 控制系统的状态空间描述, 线性系统的对角线标准形, 多输入多输出系统的传递函数矩阵, 线性系统的运动分析, 线性系统的能控性和能观测性, 线性系统的结构分析, 线性系统的实现与最小实现, 李雅普诺夫稳定性分析等。另外还介绍一些关于线性系统综合的基础方法, 主要内容有: 状态反馈与输出反馈, 控制系统的极点配置, 状态观测器与基于观测器的反馈设计, 线性二次型最优控制, 解耦问题, 镇定问题, 最后简单介绍鲁棒控制理论与 H_∞ 控制理论的基础部分, 已使读者对一些较先进的系统综合方法有基本的了解。

1.3 智能控制理论

自 20 世纪 80 年代末期以来, 随着人工神经网络的理论研究与应用研究的深入, 将人工智能方法用于系统的控制逐渐成为控制理论研究的新热点。所谓人工智能方法, 就是基于人类对于新知识的学习能力, 修正决策输出, 使之实现基于知识的决策。

将人工智能方法应用于系统控制完全不同于经典控制理论的控制器的设计方法, 也不同于现代控制理论中许多系统的综合方法。首先, 它不依赖于确定性的传递函数模型或者状态空间模型来构造控制器, 而是在机器学习条件下基于知识的控制决策。如果控制对象是灰箱系统或者是黑箱系统, 也可以通过智能系统的学习功能实现控制目的。其次, 对于难以使用数学模型来描述的系统也能够通过构建学习机器来实现基于学习的控制。

人工智能方法主要有以下几种, 即基于生物细胞信息传递的各种人工神经网络, 基于模糊逻辑的模糊集合理论, 基于粗糙逻辑的粗糙集合理论, 基于生物种群进化的遗传算法, 另外还有蚁群算法、细胞自动机等。其中发展比较全面, 应用最为广泛的是人工神经网络。

人工神经网络由于其独特的神经计算能力, 在数学的许多方面均获得了广泛的应用, 如函数拟合、参数估计、知识表达、模式分类等。在函数拟合中, 经过证明, 三层 BP 网络就可以逼近任意非线性函数; 在参数估计中, 对于复杂概型的概率密度函数的估计可以获得相当满意的效果; 在知识表达中, 由于人工神经网络的隐性知识存储特点, 在知识表达尤其是在表现知识的粒度性上是其他方法所不能比拟的。

将人工智能方法应用于控制工程中, 标志着控制理论发展的一个新的阶段。近些年来,

成熟的模糊控制器已经获得广泛的应用，基于人工神经网络的各种智能控制器的研究也在蓬勃发展之中，其他人工智能方法在控制中的应用研究也能够大显身手，如遗传算法、粗糙逻辑等。相信随着机器学习理论的深入研究与智能信息处理学科的飞速发展，人工智能方法在控制中的应用必定会得到令人瞩目的飞跃，将控制理论的研究发展到一个新的高度，给社会的发展与进步带来丰硕的成果。

第2章 线性系统的状态空间描述

在经典控制理论中,采用表达系统输入量与输出量之间关系的微分方程或传递函数作为描述系统动态特性的数学模型,但这两种数学模型只描述了系统的外部特性,不足以揭示系统的全部特征。另外作为参数模型,传递函数仅可以表示线性定常系统,不能用于线性时变系统或者非线性系统的数学描述。

在现代控制理论中,采用状态空间表达式作为系统的数学模型。状态空间表达式为向量微分方程组,它描述了系统的输入、输出与系统内部状态之间的关系,揭示了状态的运动关系,反映了系统动态特性的全部信息。状态空间表达式除了可以作为线性定常系统的数学描述外,还可以用于线性时变系统或者非线性系统的数学描述。

有关状态、状态空间及状态空间表达式等线性系统的基本概念是现代控制理论中状态空间分析的基础,而状态空间分析又是研究最优控制、滤波问题和系统辨识的基础。因此,本章内容为现代控制理论的基础知识。

2.1 动力学系统的状态空间表达式

系统的状态空间描述是建立在状态和状态空间概念的基础上的。系统的状态空间表达式一般可以从以下途径获得:从系统的物理机理出发,经推导获得,或者根据系统的输入、输出数据,采用各种系统辨识的方法获得。

基于经典控制理论的分析结果可知,如果已知描述系统运动的高阶微分方程,或者已知系统的传递函数,或者已知系统的结构图,则可以将上述3种数学模型直接转化为系统的状态空间表达式。

2.1.1 状态空间表达式

1. 动力学系统

动力学系统的概念比较抽象,从宏观意义上讲,一个能贮存输入信息的系统称为动力学系统。

自然界中存在着与输入输出关系完全不同的两类系统:其中一类是,只要知道输入信息即可获得输出信息,即输入输出关系为一个代数方程;另一类是,若想获得系统的输出信息,除需给出输入信息外,还需知道该系统的一组初始信息,即系统的输入输出关系为一个微分方程。

图2.1所示系统,输入为 $u_i(t)$, 输出为 $u_o(t)$, 其输入输出关系为

$$u_o(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_i(t) \quad (2.1.1)$$

显见，式 (2.1.1) 为一代数方程，属于第一类系统。

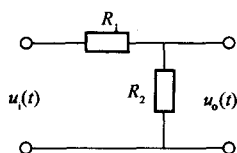


图 2.1 电阻电路

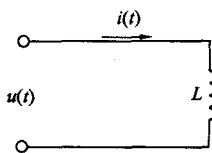


图 2.2 电感电路

图 2.2 所示系统，输入为 $u(t)$ ，输出为 $i(t)$ ，其输入输出关系为

$$L \frac{di(t)}{dt} = u(t) \quad (2.1.2)$$

显见，式 (2.1.2) 为一微分方程，属于第二类系统。系统输出表达式为

$$i(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{L} u(\tau) d\tau + I_0 \quad (2.1.3)$$

式中， I_0 为初始时刻电感中流过的初始电流。这是由于电感元件具有贮存信息的能力，它把初始时刻 t_0 以前的输入信息以磁能的形式贮存在电感线圈中。显然，对于图 2.2 电感元件的这类系统，在 t 时刻上的输出信息，不仅依赖于 $[t_0, t]$ 时间区间内所施加的输入信息 $u(t)$ ，而且还依赖于初始时刻 t_0 以前的输入信息。在控制理论中，将这类能够贮存信息的系统称为动力学系统。

2. 状态空间的基本概念

定义 2.1.1 状态。动力学系统中能完全描述系统时域行为的一个最小变量组，称为系统的状态。该变量组中的每一个变量称为状态变量。

所谓完全描述，是指若给定 $t = t_0$ 时刻这组变量的值以及 $t \geq t_0$ 时的输入，则系统在 $t \geq t_0$ 的任何时刻的行为即可完全确定。它与 t_0 时刻以前的状态和输入无关。所谓最小，是指此变量组中的所有变量是线性独立的，或者说各变量之间互不相关。

定义 2.1.2 状态向量。若系统有 n 个状态变量，即 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ，以此 n 个状态变量为分量组成的向量称为状态向量，如

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

定义 2.1.3 状态空间。以 n 个状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标构成的 n 维欧氏空间称为状态空间。

状态空间中的每一点，代表了状态变量特定的一组值，即系统中某一特定的状态。而系统在任何时刻的状态都可以用状态空间中的一个点来表示。当给定 $t = t_0$ 时刻的初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ ，以及 $t > t_0$ 时的输入函数，随着时间的推移，状态不断变化，则 $\mathbf{x}(t)$ 将在状态空间

中描绘出一条轨迹, 这条轨迹称为状态轨迹。

【例 2.1.1】 试确定图 2.3 所示 RLC 电路的状态变量。

解 由基尔霍夫电压定律, 该电路的微分方程为

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u_i(t)$$

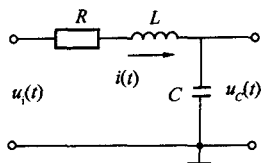


图 2.3 RLC 电路

由电路知识可知, 要唯一地确定 t 时刻的输出电流 $i(t)$, 既要知道输入电压 $u_i(t)$, 还必须知道电感 L 中的初始电流 $i(t_0)$ 和电容上的初始电压 $u_C(t_0)$ 。或者说 $i(t)$ 和 $u_C(t)$ 这两个变量所构成的变量组能够完全描述该电路的时域行为, 且二者是独立的。因此, $i(t)$ 和 $u_C(t)$ 为系统的两个状态变量, 二者组成的变量组构成系统的状态向量, 记为

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix}$$

状态变量的选取方法不是唯一的。在本例中, 若初始条件为电流 $i(t_0)$ 和电容上的电量 $q(t_0)$, 那么在输入电压 $u_i(t)$ 已知时, 也能唯一确定其输出电流 $i(t)$ 。因此也可以另外选取 $i(t)$ 和 $q(t)$ 作为系统的一组状态变量。也就是说, 对于同一个系统, 选取哪些变量作为状态变量并不是唯一的, 但是独立状态变量的个数是唯一的。

应该指出, 系统的状态变量并非一定是系统的输出变量, 也并不一定是可测得和可观测的。在实际应用中, 为了便于构成状态反馈, 应尽量选取在物理上易于测取到的变量作为状态变量。

3. 状态空间表达式

状态空间表达式是一种采用状态描述系统动力学行为的数学模型, 它包含状态方程和输出方程。状态方程为一阶微分方程组, 输出方程则表现为代数方程。

(1) 状态方程

采用状态空间法分析系统的任务就是要寻求待分析系统中, 每个状态变量与时间变化的关系。要求出这个变化关系, 就必须列写出每个状态变量对时间的一阶导数的表达式。

定义 2.1.4 设系统的输入向量为 $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$, 输出向量为 $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)]^T$, 系统的状态向量为 $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$, 则定义输入变量与状态变量之间的一组微分方程称为状态方程, 记为

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.1.5)$$

式中

$$f(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ f_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \end{bmatrix} \quad (2.1.6)$$

(2) 输出方程

定义 2.1.5 系统输出变量与状态变量、输入变量之间的数学表达式称为系统的输出方程, 记为

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \quad (2.1.7)$$

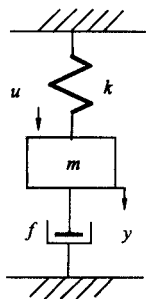
式中

$$g(x(t), u(t), t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ g_2(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \\ \vdots \\ g_r(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \end{bmatrix} \quad (2.1.8)$$

状态方程与输出方程的组合构成了一个对系统动力学行为的完整描述，称为系统的状态空间表达式，即

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

【例 2.1.2】 已知质量-弹簧-阻尼器 ($m-k-f$) 系统如图 2.4 所示，试建立其状态空间表达式。



解 由牛顿第二定律，写出系统的微分方程，即

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky &= u \\ \ddot{y} + \frac{f}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y &= \frac{1}{m} u \end{aligned}$$

设质量 m 的位移 y 为第一个状态变量，质量 m 的速度 $\dot{y}$ ，并有第二个状态变量，则有

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}$$

则

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{f}{m} x_2 + \frac{1}{m} u \end{aligned}$$

写为向量微分方程，可得到状态方程，即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

输出方程为

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

系统的结构图，如图 2.5 所示。

由此可以看出，采用状态空间法描述系统动力学行为的方法和经典控制理论中的传递函数不同，它把输入输出间的信息传递分为两段来描述。第一段是输入引起系统内部状态的变化，第二段是系统内部状态变化引起

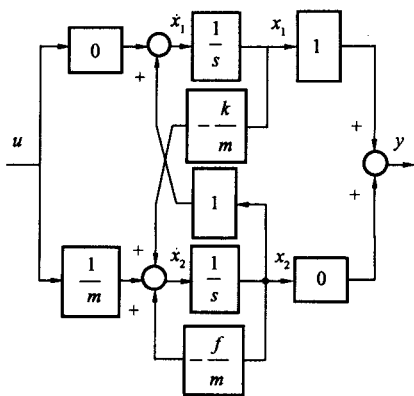


图 2.5 $m-k-f$ 系统的结构图

系统输出的变化。前者由状态方程描述,后者由输出方程描述。由于这种方法可以描述系统内部,所以称之为全面描述。而传递函数只能描述系统外部的输入输出关系,并不能反映系统内部的状态变化,故称之为外部描述或者端口描述。图 2.6 分别示意了这两种描述方法的特点。

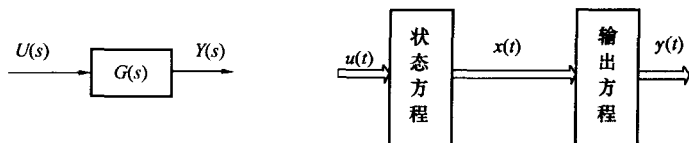


图 2.6 两种描述方法的示意图

另外在例 2.1.2 中,若取状态变量

$$\hat{x}_1 = y + \dot{y}, \quad \hat{x}_2 = y - \dot{y}$$

则状态空间表达式可以另写为

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}(f+k) & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}(f-k) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2m}(f+k) & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}(k-f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

可见对于同一个系统,由于状态变量选取的不同,状态空间表达式也是不同的,即状态空间表达式不是唯一的。但是由于状态是系统的最小变量组,即为系统的最大线性无关组,因此状态的个数是相同的,即等于系统的阶数。

4. 动力学系统的分类

式 (2.1.9) 给出了动力学系统状态空间表达式的一般形式,若按线性、非线性、时变和定常划分,以状态空间表达式为数学模型的系统可分为线性定常系统、线性时变系统、非线性定常系统、非线性时变系统。

(1) 线性定常系统

对于线性定常系统,其状态方程中的 $f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)$ 以及输出方程中的 $g_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t)$ 都是关于 $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m$ 的一次线性函数且其系数矩阵中的元素与时间 t 无关。

写成一般表达式,对于 n 阶系统,输入量为 m 个,输出量为 r 个,则有

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

式中, $x(t)$ 为 $n \times 1$ 维状态向量,省略时间变量 t , 表示为

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$u(t)$ 为 $m \times 1$ 维控制向量,省略时间变量 t , 表示为

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}(t)$ 为 $r \times 1$ 维输出向量, 省略时间变量 t , 表示为

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$$

系数矩阵均为常数矩阵, 分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为 $n \times n$ 阶系统矩阵, 表示系统内部各状态变量之间的关联情况。

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

为 $n \times m$ 阶控制矩阵, 表示输入对每个状态变量的控制作用。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rm} \end{bmatrix}$$

为 $r \times n$ 阶输出矩阵, 表示输出与每个状态变量间的组成关系。

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}$$

为 $r \times m$ 阶前馈矩阵, 表示输入对输出的直接传递关系。

状态空间表达式的结构图如图 2.7 (a) 所示。

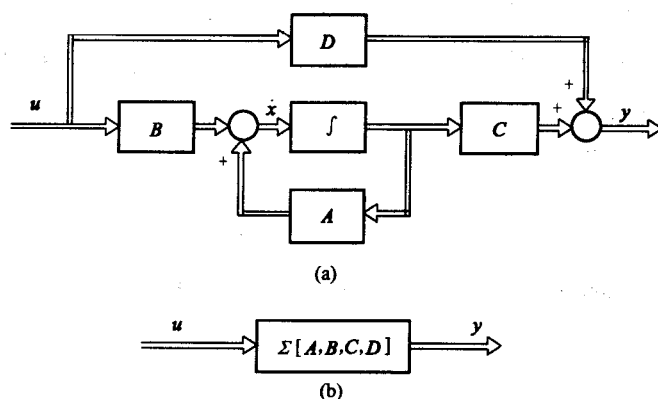


图 2.7 结构图

由于 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 这 4 个矩阵描述了状态空间表达式的全部内容, 故常用符号 $\Sigma[\mathbf{A}, \mathbf{B},$