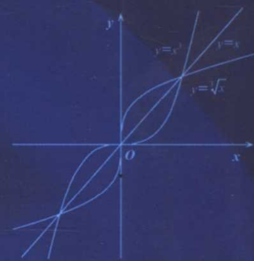
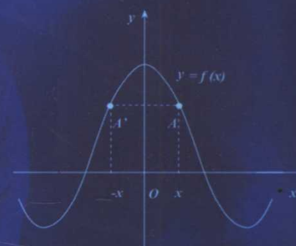
广东高等教育出版社

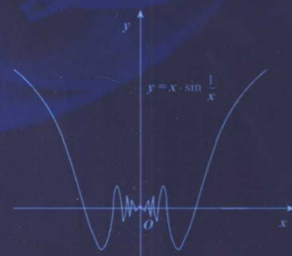


陈文立 ● 著

新微积分学

New Calculus





下册

● 严格而又简捷明快的非ε语言极限理论

● 全新而又易于理解的微积分学习体系

New Calculus

新微积分学

（下册）

陈文立　著

Guangdong Higher Education Press
广东高等教育出版社
· 广州 Guangzhou ·

图书在版编目（CIP）数据

新微积分学. 下册/陈文立著. —广州：广东高等教育出版社，2006.2
ISBN 7－5361－3201－8

Ⅰ. 新… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 微积分－高等学校－教材 Ⅳ. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 012126 号

出版发行： 广东高等教育出版社
地址：广州市天河区林和西横路
邮编：510500 电话：(020) 87557232，87550735
http：www. gdgjs. com. cn
印　　刷： 江门市新教彩印有限公司

开　　本：889 mm×1 194 mm　1/16
印　　张：12. 25
字　　数：292 千
版　　次：2006 年 2 月第 1 版
印　　次：2006 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：1～2 000 册
定　　价：21. 80 元

本书作者电子邮箱：*cwl* 400420@ sina. com

目　录

第六章　从有限到无限：无穷级数

在中学时，我们已经学习过等比数列：

$$a, aq, aq^2, aq^3, \cdots, aq^n, \cdots (q \neq 1)$$

及其求前 n 项和的公式：$S_n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q}$. 在学习了极限理论以后我们还知道，在 $|q|<1$ 时，无穷递减等比数列 $a, aq, aq^2, aq^3, \cdots, aq^n, \cdots$ 的和：

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{a}{1-q}.$$

利用这点，我们来看关于无限循环小数化分数的问题. 我们知道，$\frac{1}{3}$化为小数时有$\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$，而且

$$0.3 = \frac{3}{10},$$

$$0.33 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100},$$

$$0.333 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000},$$

一般地有下面的表达式：

$$0.\overbrace{33\cdots3}^{n个} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \cdots + \frac{3}{10^n},$$

于是，$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$，这样一来，我们就把分数$\frac{1}{3}$化为无穷多个分数之和. 这就是最基本的常数项无穷级数.

在本章，我们将要对这种常数项无穷级数加以较为全面的讨论. 当然，我们也应该像由定积分到变上限积分、由导数到导函数那样，接着还要讨论函数项级数.

另一方面，在理论上与实践中，对于一些不怎样容易解决的函数问题，我们常常使用逼近的方法来加以解决. 我们以前讨论过的求近似值的问题，其实质就是一种逼近. 当然，这种求近似值的方法只是一种个体的逼近，而从整体的角度来看，我们更需要用一个相对简单的函数来逼近较为复杂的函数. 由于多项式只包含加、乘两种运算，最适合于在计算机上进行运算，因此我们常用多项式来逼近、近似表达函数.

我们知道，当 $f'(x_0) \neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，有如下的近似表达式：

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x,$$

或

$$f'(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

这就是一个用一次多项式来近似表达函数的例子. 显然，这是远远不够的.

对于一个给定的函数，如何用一个多项式来近似表达它，这是数学中一个被着重研究的问题.

设$f(x)$是一个给定的函数，并假设它在点x_0处有n阶导数. 现在，我们希望找出一个n项式$P(x)$，使得它在x_0点附近尽可能地接近$f(x)$.

为此，我们首先希望$f(x)$与$P(x)$在点x_0处重合即$f(x_0)=P(x_0)$. 其次，我们希望它们的图象在点$(x_0, f(x_0))$处相切，即$f'(x_0)=P'(x_0)$. 当然我们还希望这两个函数在点x_0处的直到阶的导数值都相等，即$f^{(n)}(x_0)=P^{(n)}(x_0)(n=1, 2, 3\cdots)$. 这样，它们就有较高的接近度. 最后我们还希望有办法估计它们之间的误差.

现在我们假设这个多项式已经构成：

$$P(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

于是问题就转化为怎样确定这些系数a_k. 注意到

$$P(x_0)=a_0,\ P'(x_0)=1!\cdot a_1,\ P''(x_0)=2!\cdot a_2,\ \cdots,\ P^{(n)}(x_0)=n!\cdot a_n.$$

因此只要令

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{1}{1!}f'(x_0),\ a_2=\frac{1}{2!}f''(x_0),\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

我们就得到了满足上述要求的多项式——Taylor 多项式：

$$P(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

这样，我们便可以推出关于 Taylor 多项式的 Taylor 中值定理，以及具有无穷项的级数——Taylor 级数. 在这里 Taylor 级数就是一个以函数为其项的级数：函数项级数.

本章将先讨论常数项级数的基本性质，以及一些常数项级数的敛审法. 接着讨论函数项级数的基本性质以及两种重要的函数项级数：幂级数和 Fourier 级数.

§6.1 常数项级数

从前面的无限循环小数化分数的例子我们可以看出：

1. 无穷多个数相加后可能得到一个有限的、确定的常数. 从而，在一定条件下，无穷多个数的和也可能是有意义的.

2. 一个有限量可以用无限的形式表达出来.

从这个例子我们还可以看到，在一定条件下，无穷多个数之间可以进行加法运算. 这是人类在理性思维上的重要飞跃，它体现了有限与无限的辩证关系，从另一个角度反映了极限思想，这个思想就是无穷级数的思想.

一、常数项级数的基本概念

定义 6.1.1 给定一个数列：$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，将这些数按顺序加起来，所得到的式子：$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，称为无穷级数，或简称级数，用记号$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$表示. 其中每一数称为级数的一项，$u_n$称为级数的一般项或者通项.

如果级数的每一项都是常数，则称此级数为常数项级数. 如果级数的每一项都可用函数表示，则称此级数为函数项级数.

作数列$\{u_n\}$的前n项的和：$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和. 当$n$依次取

1，2，3，…时，它们构成一个新的数列$\{s_n\}$：

$$s_1=u_1,\ s_2=u_1+u_2,\ \cdots,\ s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n.$$

根据数列$\{s_n\}$有没有极限，我们给出无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛与发散的定义：

定义 6.1.2　当n无限增大时，如果无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{s_n\}$有极限$s$，即$\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=s$，则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，极限$s$也就叫做它的和，并写成

$$s=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

如果s_n没有极限，则称无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

显然，当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛时，其部分和$s_n$是这个级数和$s$的近似值. 它们之间的差$r_n=s-s_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$，叫做级数的余项. 用近似值$s_n$代替和$s$所产生的误差的绝对值，即级数的误差为$|r_n|$.

推论　无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充要条件是它的部分和数列$\{s_n\}$收敛.

例 6.1.1　讨论等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots\quad(a\neq 0)$$

的敛散性.

解：当$q\neq 1$时，等比级数的部分和

$$s_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^n=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

当$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\dfrac{a}{1-q}$，故此时级数收敛，其和为$\dfrac{a}{1-q}$.

当$|q|>1$时，$\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=+\infty$，此时级数发散.

当$q=1$时，$\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=+\infty$，此时级数发散.

当$q=-1$时，等比级数的部分和

$$s_n=a-a+a+\cdots+(-1)^{n-1}a=\begin{cases}a & n\text{ 为奇数},\\ 0 & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故当$n\to+\infty$时s_n的极限不存在，此时级数发散.

所以，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$当$|q|<1$时，收敛于$\dfrac{a}{1-q}$，当$|q|\geqslant 1$时发散. ▯

例 6.1.2　判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

是否收敛？若收敛，求出其和.

解：因为级数的部分和

$$\begin{aligned}s_n&=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1\quad (n\to+\infty).$$

所以此级数收敛，其和为1. □

例 6.1.3　证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$是发散的.

证明：因为

$$s_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$=\sqrt{n}\to+\infty\quad (n\to+\infty),$$

所以此级数是发散的. □

二、无穷级数的基本性质

由于无穷级数与它的部分和数列的敛散性是完全一致的，所以涉及级数的线性的定理6.1.1和定理6.1.2，是不证自明的.

定理 6.1.1　如果级数$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$收敛于和$s$，则它的各项同乘以一个不为0的常数$k$所得到的级数$ku_1+ku_2+\cdots+ku_n+\cdots$也收敛，且其和为$ks$. □

也就是说，级数的每一项同乘以一个不为0的常数后，它的收敛性或者发散性总是不变的.

定理 6.1.2　设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$$

都收敛，其和分别为u与v，则由此二数列相加(或相减)所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

也收敛，且其和为$u\pm v$. □

定理 6.1.3　在级数的前面部分去掉或者加上有限项，不会改变级数的敛散性. 但当级数收敛时，其和通常会改变.

证明：给定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，取定正整数$m$，将这个级数的前$m$项去掉，得到级数$u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+n}+\cdots$，这个新级数的部分和

$$\overline{s_n}=u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+n}=s_{m+n}-s_m,$$

这里s_{m+n}与s_m分别是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的前$m+n$项和前$m$项的部分和. 由于$s_m$是常数，所以当$n\to+\infty$时，$\overline{s_n}$与$s_{m+n}$同时收敛或同时发散. 当他们同时收敛时有

$$\bar{s}=\lim_{n\to+\infty}\overline{s_n}=\lim_{n\to+\infty}s_{m+n}-s_m=s-s_m.$$

对于在级数前面添加有限项的情形，可以类似地加以证明. □

定理 6.1.4　如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则对级数的项任意加括号后所得到的级数

$$(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots$$

仍收敛，且其和不变.

证明：设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$前$n$项部分和为$s_n$，加括号所构成的新级数的前$k$项部分和为$\sigma_k$，则

$$\sigma_1=u_1+u_2+\cdots+u_{n_1}=s_{n_1}$$
$$\sigma_2=(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})=s_{n_2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\sigma_k=(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})=s_{n_k}$$

由此可见，数列$\{\sigma_k\}$是数列$\{s_n\}$的子数列，因而如果数列$\{s_n\}$收敛，则数列$\{\sigma_k\}$收敛. 即如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则对此级数的项任意加括号后所得到的级数也收敛，且其和不变. □

定理6.1.4的逆命题不成立. 例如级数$(1-1)+(1-1)+\cdots$收敛于0，而级数$1-1+1-1+\cdots$则是发散的.

三、级数收敛的必要条件

定理6.1.5　如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$收敛，则当$n\to+\infty$时，它的一般项$u_n$必趋于零. 即$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证明：由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则其部分和数列$\{s_n\}$有极限$s$，即$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$，因此

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s-s=0.$$ □

这个定理可以作为判断级数发散的工具：如果一个级数的一般项不以0为其极限，则此级数必然发散. 需要指出的是，这个定理的逆命题是不正确的. 我们以下面的例子来说明这一点.

例6.1.4　证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

的一般项趋于0，但它是发散的.

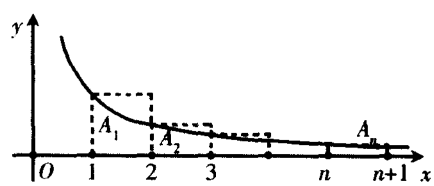


图6.1.1

证明：显然，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. 下面我们证明这个级数是发散的. 如图6.1.1，图中的小矩形A_1，A_2，…，A_n的面积分别为1，$\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{n}$. 由于函数$y=\frac{1}{x}$在$x>0$时是递减的，所以A_1，A_2，…，A_n的面积和$s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$大于曲线$y=\frac{1}{x}$在区间$[1,n+1]$上的曲边梯形的面积. 于是有

$$s_n>\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(n+1)\to+\infty\ (n\to+\infty).$$

这说明了调和级数的部分和数列$\{s_n\}$是没有极限的，因而它是发散的. □

四、Cauchy 审敛定理

定理6.1.6(Cauchy)　级数$\sum u_n$收敛的充分必要条件是：

存在恒正无穷小列$\{a_n\}$，使得对于任意的正整数N，当$n>m>N$时，有$|u_{m+1}+\cdots+$

$u_n|<\alpha_m$. 即存在恒正无穷小列 $\{\alpha_n\}$，使得对于任意的正整数 m 和 p，都有 $|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\alpha_m$. ▯

例 6.1.5 应用 Cauchy 准则证明级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 的收敛性.

证明：由于

$$
\begin{aligned}
|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}| &= \frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}\\
&<\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(m+p-1)(m+p)}\\
&=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m+p-1}-\frac{1}{m+p}\right)\\
&=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+p}<\frac{1}{m}.
\end{aligned}
$$

由定理 6.1.6 即得 $\sum\frac{1}{n^2}$ 是收敛的. ▯

练习 6.1

1. 写出下列级数的前五项：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$.

2. 写出下列级数的通项：

(1) $2-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\cdots$；

(2) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^2}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots$；

(3) $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$.

3. 判断下列级数的敛散性：

(1) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\frac{8^n}{9^n}+\cdots$； (2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3n}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$.

§6.2 正项级数及其审敛法

一、正项级数及其收敛的充要条件

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 的每一项都是非负的，即 $u_n\geqslant0$，则称该级数为正项级数.

定理 6.2.1 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

证明：由于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{s_n\}$是单调递增数列，因而这个数列收敛的充要条件是它是否有界. 因此，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件就是其部分和数列$\{s_n\}$是否有界. □

二、比较审敛法

定理 6.2.2　设

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

与

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$$

是两个正项级数. 如果存在正整数N，使得当$n\geqslant N$时$u_n\leqslant v_n$成立，那么

(1) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

(2) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

证明：不失一般，可设对所有的$n=1, 2, \cdots$，都有$u_n\leqslant v_n$成立，并设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和分别为$s_n$与$\sigma_n$，于是有

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant v_1+v_2+\cdots+v_n=\sigma_n.$$

(1) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sigma_n$有界，因而$s_n$有界，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(2) 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则由1得知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛. 这与假设矛盾.

例 6.2.1　讨论p级数$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$的敛散性.

解：当$p=1$时，这个p级数就是调和级数，它是发散的.

当$p<1$时，由于$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$，由定理 6.2.2 知其发散.

如果$p>1$，由于当$n-1\leqslant x\leqslant n$时，有$\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{x^p}$，因此

$$\frac{1}{n^p}=\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\mathrm{d}x\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]\quad(n=1, 2, \cdots)$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$的部分和

$$s_n=\left[1-\frac{1}{2^{p-1}}\right]+\left[\frac{1}{2^{p-1}}-\frac{1}{3^{p-1}}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n^{p-1}}-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right]$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)^{p-1}}\to 1\,(n\to+\infty)$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}}-\frac{1}{n^{p-1}}\right]$收敛. 因而由定理 6.2.2 得知，$p$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$在$p>1$时收敛.

定理 6.2.3　设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是两个正项级数，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\ (0<l<+\infty)$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$

u_n 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛，或者同时发散.

证明：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l(0<l<+\infty)$，则存在无穷小列 α_n，使得 $\frac{u_n}{v_n}\leqslant l+\alpha_n$，当 n 充分大时，有 $l+\alpha_n>0$，因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(l+\alpha_n)v_n$ 为一收敛的正项级数，且 $u_n\leqslant(l+\alpha_n)v_n$，因而由定理 6.2.2，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\frac{1}{l}=k$（$l>0$）知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. □

例 6.2.2　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解：由于 $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\ln\mathrm{e}=1(n\to+\infty)$，而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，因而由定理 6.2.2，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散. □

在定理 6.2.3 中，取 $v_n=\frac{1}{n^p}$，则得到下面的

定理 6.2.4（极限审敛法）　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，如果有 $p>1$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}n^p u_n$ 存在，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l>0$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=\infty$），则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. □

例 6.2.3　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解：因为 $n\sin\frac{1}{n}=\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to1$（$n\to+\infty$），根据极限审敛法知其发散. □

三、比值审敛法

定理 6.2.5（D'Alembert 判别法）　设

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

是正项级数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，则

（1）当 $l<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

（2）当 $l>1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

（3）当 $l=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛，也可能发散.

证明：（1）设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$，则存在无穷小列 α_n，使得 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant l+\alpha_n$. 因而存在正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant l+\alpha_n=r<1$. 于是有

$$u_{N+1}<ru_N,\ u_{N+2}<ru_{N+1}<r^2u_N,\ u_{N+3}<ru_{N+2}<r^3u_{N+1},\ \cdots$$

由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^Nu_N$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

（2）当$l>1$时，则存在无穷小列α_n及正整数N，使得当$n\geqslant N$时有$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant l-\alpha_n=r>1$于是有

$$u_{N+1}>ru_N,\ u_{N+2}>ru_{N+1}>r^2u_N,\ u_{N+3}>ru_{N+2}>r^2u_{N+1}>r^3u_N,\ \cdots$$

由级数$\sum\limits_{N=1}^{\infty}r^Nu_N$发散，得知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

（3）当$p=1$时，这个方法不能判断级数的敛散性.

例如，对于p级数，不论p为何值，我们都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\to 1\quad(n\to\infty),$$

而我们知道，当$p\leqslant 1$时，级数发散，当$p>1$时，级数收敛.

例 6.2.4　判断下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}$；　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}$；　　（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}\quad(x\neq 0)$.

解：（1）由于$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}}{\frac{1}{(2n+1)}\cdot 3^{2n+1}}=\frac{2n+1}{9(2n+3)}\to\frac{1}{9}<1\quad(n\to+\infty)$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}$收敛.

（2）由于$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2^{n+1}}{2n+1}}{\frac{2^n}{2n-1}}=\frac{2(2n-1)}{2n+1}\to 2>1\quad(n\to+\infty)$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2n-1}$发散.

（3）由于$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)^2}}{\frac{x^{2n}}{n^2}}=\frac{n^2x^2}{(n+1)^2}\to x^2\,(n\to+\infty)$，由此可知，当$|x|>1$时级数发散，当$|x|<1$时级数收敛，而当$|x|=1$时，级数即是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，它是收敛的. 所以，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n^2}$$(x\neq 0)$在$|x|\leqslant 1$时收敛，$|x|>1$时发散.

例 6.2.5　判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$的敛散性.

解：由于$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}}{\frac{1}{(2n-1)2n}}=\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)}\to 1\,(n\to+\infty)$，这时我们无法运用定理 6.2.3 判断其敛散性，但因$\frac{\frac{1}{(2n-1)2n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{(2n-1)2n}\to\frac{1}{4}\,(n\to+\infty)$，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$收敛. $\square$

四、根值审敛法

定理 6.2.6（Cauchy 根值判别法）　设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$是正项级数. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$，则

（1）当$l<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

（2）当$l>1$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

（3）当$l=1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$可能收敛，也可能发散.

证明：（1）由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l<1$，于是存在常数$r(l<r<1)$以及无穷小列$\alpha_n$，使得$\sqrt[n]{u_n}=l+\alpha_n$. 因此，存在正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时有，$\sqrt[n]{u_n}=l+\alpha_n<r$，即$u_n<r^n$. 由于等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n(r<1)$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty}=u_n$收敛，因而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛.

（2）由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l>1$，于是存在常数$r(l>r>1)$以及无穷小列$\alpha_n$，使得$\sqrt[n]{u_n}=l+\alpha_n$. 因此存在正整数$N$,使得当$n\geqslant N$时有$\sqrt[n]{u_n}=l+\alpha_n>r>1$，因而$u_n>1$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

（3）对于p级数，不论p为何值，我们都有$\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^p}}=\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p\to 1\ (n\to\infty)$，因而不能由这种方法判断其敛散性. $\square$

例 6.2.6　判断下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^n}$；　　　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2}$.

解：（1）由于$\sqrt[n]{\dfrac{1}{(\ln n)^n}}=\dfrac{1}{\ln n}\to 0<1\ (n\to+\infty)$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^n}$收敛.

（2）由于$\sqrt[n]{\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{(\sqrt[n]{n})^2}\to\dfrac{1}{2}<1\ (n\to+\infty)$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2}$收敛。 $\square$

练习 6.2

判断下列各级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}$；　（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$；

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；　（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$；　（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$；

（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$.

§6.3　任意项级数

一、交错级数

若一个级数的各项是正负交替的：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$$

或

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n=-u_1+u_2-u_3+\cdots+(-1)^{n}u_n+\cdots$$

其中 $u_n>0$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，则称此级数为交错级数.

定理 6.3.1(Leibnitz)　如果交错级数满足以下条件：

1. $u_n \geqslant u_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，

2. $u_n \to 0$ $(n\to\infty)$，

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$[或级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$]收敛，且其和 $s\leqslant u_1$，其余项 r_n的绝对值$|r_n|\leqslant u_{n+1}$.

证明：由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 的每一项乘以 -1 就得到级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n$，因此我们只需对前一种情形加以证明即可.

这时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 的前 $2n$ 项之和 s_{2n}可写为下面的形式：

$$s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n}).$$

由题设可知，上述等式的右端的每一个括号中的数都是正的，所以随着 n 的增大，部分和 s_n也增大. 另一方面，s_{2n}又可写为下面的形式：

$$s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)+(u_4-u_5)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n-1})-u_{2n}.$$

从这里可以看出 $s_{2n}<u_1$. 于是，s_{2n}递增且有上界，因而在 $n\to+\infty$ 时，部分和数列$\{s_{2n}\}$有不大于 u_1的极限：$s_{2n}\to s\leqslant u_1$.

同时，由题设 $u_n\to 0$，因此有

$$s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}\to s.$$

由于级数的前偶数项的和与前奇数项的和趋于同一极限 s，即存在无穷小列 α'_n与 α''_n使得 $s_{2n}=s+\alpha'_n$与 $s_{2n+1}=s+\alpha''_n$. 取 $\alpha_n=\max(\alpha'_n, \alpha''_n)$，则有 $s_n=s+\alpha_n$. 故此级数的部分和 s_n当 $n\to+\infty$ 时具有极限 s. 这就证明了级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，且其和 $s\leqslant u_1$.

最后不难看出余项 r_n可以写成：$r_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots)$，因此，其绝对值$|r_n|=u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots$所成的级数也是一个交错级数，且也满足收敛的两个条件，故其和小于级数的第一项，即是，$|r_n|\leqslant u_{n+1}$. ▯

例 6.3.1　讨论交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{n}+\cdots$的敛散性.

解：由于 $u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}$（$n=1, 2, 3, \cdots$）且 $u_n=\frac{1}{n}\to 0(n\to+\infty)$. 所以级数是收敛的，其和 $s<1$. 取前 n 项的和 $s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}$，作为 s 的近似值，则其误差 $|r_n|\leqslant\frac{1}{n}$. ▯

二、绝对收敛与条件收敛

设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，且其中各项 u_n 为任意实数，则级数称为任意项级数. 它的各项的绝对值所构成的正项级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots.$$

定理 6.3.2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 各项的绝对值所构成的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots$ 收敛，则它也收敛.

证明：令 $v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$，显然 $v_n\geqslant 0$，且有 $v_n\leqslant|u_n|$. 也就是说，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的每一项 v_n，都不大于收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的相应项 $|u_n|$. 因此，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，从而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2v_n$ 也收敛. 于是由 $u_n=2v_n-|u_n|$ 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是由两个收敛正项级数相减而成的：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)$，因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛. ▯

定义 6.3.1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的各项的绝对值所成的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，或称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛级数.

例 6.3.2 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛.

证明：因为 $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|\leqslant\frac{1}{n^4}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 是收敛的，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|$ 也是收敛的. 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛. ▯

从定理 6.3.2 我们得知，每个绝对收敛的级数都是收敛的，但反之则不一定. 例如，级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}+\cdots$ 是收敛的，但其各项绝对值所成的级数——调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 却是发散的.

一般地，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，而其各项的绝对值所成的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，或称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛级数. 于是，级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}+\cdots$ 就是条件收敛级数.

绝对收敛级数有很多性质是条件收敛级数所没有的，我们不加证明地给出下面两个