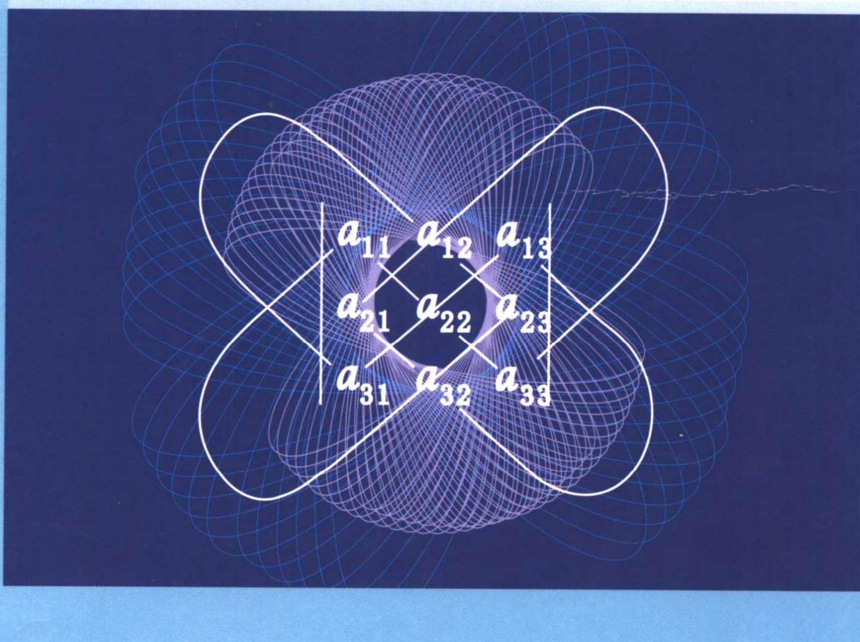
21世纪高等院校创新教材

WENKE DAXUESHUXUE

文科大学数学

WENKE DAXUESHUXUE

余杨 徐运阁 主编



科学出版社
www.sciencep.com

·21 世纪高等院校创新教材·

文科大学数学

余　杨　徐运阁　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为大学文科高等数学教材。全书共分微积分、线性代数和概率统计三部分。其中，微积分部分包括函数、极限、导数及其应用、不定积分、定积分、微分方程和无穷级数；线性代数部分包括行列式、矩阵和线性方程组；概率统计部分包括事件和概率、随机变量的分布和数字特征、统计初步及其计算机实现。

本书适用于普通高等院校文科及相关专业学生，也可供大学文科高等数学教研人员参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

文科大学数学/余杨，徐运阁主编. －北京：科学出版社，2006

（21世纪高等院校创新教材）

ISBN 7-03-017743-6

Ⅰ.文…　Ⅱ.①余…②徐…　Ⅲ.高等数学－高等学校－教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第086191号

责任编辑：王雨舸／责任校对：董　丽

责任印制：高　嵘／封面设计：曹　刚

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2006年8月第　一　版　开本：787×1092　1/16

2006年8月第一次印刷　印张：17 1/2

印数：1~5 000　字数：400 000

定价：25.80元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

为什么大学文科学生还要学习数学？大学文科高等数学应该包括哪些主要内容？诸如此类的问题不仅学生经常问到，就是有多年教学经验的数学教师也常常感到困惑。关于高等数学教材，如理工科的、经济管理类的和各类文科的，林林总总，比比皆是，可是要想找到适合教学需要的文科数学教材似乎不是一件容易的事。

随着高校文科专业数量的不断增加，大学文科高等数学在基础课中的地位也越来越重要。在教学过程中，我们深感文科学生对学习高等数学的渴望，于是更加坚定了编写大学文科高等数学教材的想法，希望将我们在文科数学教学中积累的实践经验系统地表达出来，供广大师生和相关研究人员参考。本书的期望目标是：全面、系统、实用、易教。本书以作者十几年来的数学教学实践和教学研究为基础，吸收了国内外最新的大学文科高等数学教材的优点，同时有很多自己独特的教学心得及思想创新。

教育部高等学校数学和统计学教学指导委员会制定了 2006～2010 年各专业本科数学基础课程教学基本要求，但目前还没有关于文科数学基础课程的教学基本要求，因此我们力图通过大学文科数学这本教材，使读者不仅可以掌握大量数学概念必数学理论，而且有助于读者理解数学的思想体系和全貌。全书内容分三部分，即微积分部分、线性代数部分和概率统计部分。其中，微积分部分包括函数、极限、导数及其应用、不定积分、定积分、微分方程和无穷级数；线性代数部分包括行列式、矩阵和线性方程组；概率统计部分包括事件和概率、随机变量的分布及数字特征、统计初步及其计算实现。本书注重理论和实践相结合，书中介绍的数学概念及其应用具有可操作性，而且大多具有实际应用背景，富有较强的趣味性。

作为一本大学文科高等数学教材，本书充分考虑到实际教学工作的需要，不涉及过多的数学理论分析，主要读者对象定为普通高等院校文科各专业学生以及对大学文科高等数学教学有兴趣的教师。

本书由余杨、徐运阁主编，方勇、潘峰、黄朝炎任副主编。其中，第一章至第八章，第十四章及其课后习题由余杨编写，第九、十、十一章及其课后习题由徐运阁、余杨编写，第十二、十三章及其课后习题由方勇、余杨编写，第一章至第八章的习题和答案由牛欣然编写，第九、十、十一章的答案由李玲编写，潘峰在编写过程中对第一至十一章的取材提出了许多建设性的意见，黄朝炎副院长对本教材的编写给予了大力支持，在此表示诚挚的谢意！

鉴于作者水平所限，书中难免会有不少疏漏和不足之处，恳请各位读者提出宝贵意见。

编　者

2006 年 5 月

目　　录

第一篇　微　积　分

第一章　函数与初等函数 …… 3
1.1　函数的概念 …… 3
1.2　函数的几种特性 …… 5
1.3　反函数和复合函数 …… 8
1.4　初等函数和指数模型 …… 9
习题一 …… 12
第二章　极限与连续 …… 18
2.1　数列极限 …… 18
2.2　函数的极限 …… 20
2.3　极限的性质和运算法则 …… 23
2.4　极限的存在准则和两个重要极限 …… 27
2.5　无穷小与无穷大 …… 29
2.6　函数的连续性 …… 33
习题二 …… 40
第三章　导数与微分 …… 43
3.1　导数概念和变化率问题 …… 43
3.2　求导法则及基本求导公式 …… 48
3.3　高阶导数与相关变化率 …… 52
3.4　微分和线性化 …… 54
习题三 …… 60
第四章　中值定理与导数的应用 …… 63
4.1　中值定理 …… 63
4.2　洛必达(L'Hospital)法则 …… 67
4.3　泰勒(Taylor)中值定理 …… 70
4.4　函数的单调性与函数极值 …… 73
习题四 …… 82
第五章　原函数和不定积分 …… 88
5.1　原函数和不定积分的概念 …… 88
5.2　不定积分的计算方法 …… 91
习题五 …… 100
第六章　定积分及其应用 …… 103
6.1　定积分的概念(求总量的数学模型) …… 103

6.2 定积分的性质 …… 106
6.3 微积分基本定理 …… 108
6.4 定积分的计算 …… 111
*6.5 广义积分 …… 113
6.6 平面图形的面积 …… 116
习题六 …… 118
第七章 微分方程简介 …… 122
7.1 微分方程的基本概念 …… 122
7.2 可分离变量的一阶微分方程 …… 124
7.3 微分方程建模和应用 …… 126
习题七 …… 127
***第八章 无穷级数** …… 131
8.1 常数项级数的概念与性质 …… 131
8.2 常数项级数的收敛判别法 …… 135
习题八 …… 140

第二篇 线性代数

第九章 行列式 …… 145
9.1 二阶与三阶行列式 …… 145
9.2 n 阶行列式 …… 146
9.3 行列式的性质和计算 …… 149
9.4 克莱姆法则 …… 155
习题九 …… 157
阅读材料 范德蒙行列式与密钥共享方案 …… 159
第十章 矩阵及其运算 …… 161
10.1 矩阵的定义 …… 161
10.2 矩阵的运算 …… 164
10.3 逆矩阵 …… 173
10.4 矩阵的初等变换和初等矩阵 …… 175
习题十 …… 180
阅读材料 矩阵与线性变换 …… 184
第十一章 线性方程组 …… 186
11.1 矩阵的秩 …… 186
11.2 线性方程组的解 …… 186
习题十一 …… 196

第三篇 概率论与数理统计

第十二章 随机事件和概率 …… 203
12.1 随机事件 …… 203

12.2　概率及计算 …… 206
12.3　条件概率 …… 210
习题十二 …… 213
阅读材料　伯努利概型 …… 217
第十三章　随机变量的分布及数字特征 …… 219
13.1　随机变量及其分布函数 …… 219
13.2　离散型随机变量 …… 220
13.3　连续型随机变量 …… 222
13.4　随机变量的数学期望 …… 225
13.5　随机变量的方差 …… 227
习题十三 …… 230
阅读材料　正态分布在 NBA 中的应用 …… 234
第十四章　统计初步及 Excel 中的统计功能 …… 236
14.1　总体与样本 …… 236
14.2　样本均值与样本方差 …… 238
14.3　描述统计及其在 Excel 中的实现 …… 240
习题十四 …… 253
阅读材料　统计软件简介 …… 255
参考答案 …… 257

第一篇　微　积　分

微积分是近代数学最伟大的成就之一，是高等院校文科类各专业的一门重要的必修基础课．一方面，通过各个教学环节，为学生学习后续课程和进一步获得近代科学技术知识奠定必要的数学基础，为学生解决实际问题提供必不可少的数学基础知识及常用的数学思想和数学方法；另一方面，通过学习还能培养学生的抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、自学能力，以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力．

极限和微积分概念可以追溯到古代．在中国，桓团、公孙龙等（公元前 4 世纪）所提出的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，刘徽（公元 3 世纪）、祖冲之（公元 5 ～ 6 世纪）对圆周率、面积及体积的研究，都包含着极限和微积分概念的萌芽．在欧洲，欧几里得（公元前 3 世纪）在《几何原本》中对不可公约量及面积与体积的研究，阿基米德（公元前 3 世纪）对面积与体积的进一步研究，也都包含着微积分基本概念的萌芽．

微积分诞生之前，人类基本上还处在农耕文明时期．解析几何的诞生使代数和几何融为一体，并引出变量的概念．变量，这个全新的概念，为研究运动提供了基础．

微积分开创了科学的新纪元，并加强与加深了数学的作用．对微积分理论发展影响较大的问题主要有四个方面：

（1）物理问题．如求物体的瞬时速度．

（2）几何问题．如求任意曲线在某点处的切线．

（3）函数的最大值最小值问题．如弹道学计算炮弹的射程，天文学计算行星和太阳的最近、最远距离等，都是求最大值、最小值问题．

（4）积累问题．如求曲线的弧长、曲线所围区域的面积、曲面所围立体的体积、物体的重心等．

第一章　函数与初等函数

客观世界处在永恒的运动、发展和变化中，对各种变化过程和变化过程中的量与量的依赖关系的研究，产生了函数的概念. 即函数是对运动过程中量与量之间的依赖关系的抽象描述，是刻画运动变化中变量之间关系的数学模型. 函数是用数学语言描述现实世界的主要工具.

本章将介绍函数的基本概念、性质及反函数、复合函数、基本初等函数和初等函数.

1.1　函数的概念

1.1.1　变量、区间、邻域

1. 自变量与因变量

生活中，一个变量的取值常常取决于另一个变量的取值. 例如，利息 I 的多少取决于利率 r，从住处到达教学楼的时间 t 取决于步行的速度 v. I 和 t 称为因变量，因为它们是由变量 r 和 v 所决定的（变量 r 和 v 为自变量）.

2. 区间与邻域

描述变量变化范围的概念是区间. 区间分为：① 有限区间：闭区间 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，开区间 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$，半开半闭区间 $(a,b]$ 等；② 无限区间：$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$ 等. 每一种区间有三种表达方式：集合表达式、代数表达式、几何表达式.

这里，∞ 只是符号而不是一个数，$+\infty$ 表示沿 x 轴正方向可以无限变大，$-\infty$ 表示沿 x 轴负方向可以无限变小（或说其绝对值可无限变大）.

将形如 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 的开区间，称为点 x_0 的 δ 邻域，简记为 $U(x_0,\delta)$. 其中：x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 邻域的这种特殊开区间有如下三种等价的表达形式：

$$x \in U(x_0,\delta) \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta \Leftrightarrow |x-x_0|<\delta$$

集合表示　　　　代数表示　　　　几何表示

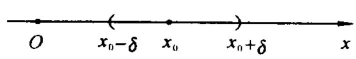


图 1-1

去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 是指去掉邻域 $U(x_0,\delta)$ 的中心以后得到的集合，记为

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

其中：$0<|x-x_0| \Leftrightarrow x \neq x_0$. 在无需指明邻域的半径时，可用符号 $U(x_0)$ 或 $\mathring{U}(x_0)$ 表示邻域.

1.1.2 函数概念

函数是对变量变化关系最基本的数学描述.

函数一词是由著名德国数学家莱布尼茨首先在数学上使用的，尽管他也考虑到变量 x 和与 x 同时变化的变量 y，但他只是针对某些特殊的数学公式. 后经欧拉(Euler)、狄利克雷(Dirichlet) 等数学家的不断修订、扩充才逐步形成现代的函数概念，直到今天，函数的概念还在不断发展着.

定义1.1 设 x，y 是两个变量，若对集合 D 中每一个值 x，按照一定的对应法则 f，总有确定的数值 y 和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量；D 称为定义域；集合 $D(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为值域.

因此，从集合 D 到集合 $D(f)$ 的一个函数是对 D 中每个元素指定 $D(f)$ 中唯一确定的元素的一种对应法则(或者映射). 在这种定义下，D 是函数的定义域而 $D(f)$ 是值域.

学习函数时，应注意以下几方面：

(1) 由定义可知，函数有两个基本要素 —— 定义域和对应法则.

(2) 两个函数相等的充要条件是它们的定义域和对应法则相同.

(3) 我们约定函数的定义域是使其表达式有意义的自变量的全体.

(4) 函数分为满射、单射和双射. 设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $D(f) = Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射是满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射又是满射，则称 f 为一一映射(或双射).

函数的表示法有解析法、列举法、描述法、列表法、图像法等. 用一个解析式来表示函数是最重要的表示函数的方法，但不是唯一的方法. 还可以用图像(如三角函数曲线)、表格(如学生成绩表) 或语言描述来表示函数. 借助于图形的直观形象有助于掌握函数的变化规律.

有的函数在其定义域的不同范围内，要用两个或两个以上的数学式来表示，这一类函数称为分段函数.

注意：分段函数虽有几个式子，但它们合起来表示一个函数，而不是几个函数.

$$f{:}A=\{\,1\ 2\ 3\ 4\,\} \longrightarrow B=\left\{\begin{matrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{matrix}\right\}$$

图 1-2

例1.1 图 1-2 是一个由集合 A 到集合 B 的“映射”. 其中，A 中各元素与 B 中各元素对应关系如表 1-1 所示.

(1) f 确实是映射吗?

(2) 如果 f 是映射，则(　　).

A. f 是单射　　B. f 是满射

C. f 是双射　　D. f 既不是单射也不是满射

表 1-1

			3			4	1,2
a	b	c	d	e	f	g	h

解　f 是映射，但它不是单射，因为元素"h"有多个原像，也不是满射，应选 D.

下面介绍几个常用而重要的函数：

绝对值函数　$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$

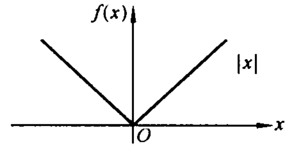


图 1-3

其定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$[0,+\infty)$. 如图 1-3 所示.

符号函数　$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

其定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是 3 个点的集合$\{-1,0,1\}$. 如图 1-4 所示.

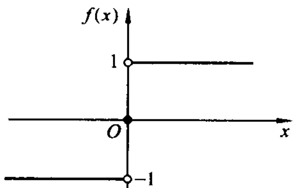


图 1-4

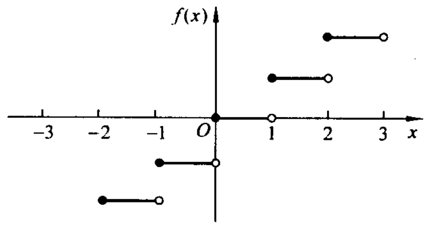


图 1-5

取整函数　$f(x)=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

如$[3.2]=3$，$[\pi]=[3.99999]=3$，$[-5.3]=[-\pi-2]=-6$. 其定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是全体整数的集合，实际上是取左端点. 如图 1-5 所示.

狄利克雷函数　$f(x)=D(x)$ 表示：当 x 为有理数时 $D(x)=1$；当 x 为无理数时 $D(x)=0$.

以上 4 个函数的定义域都是全体实数. 它们在坐标平面上都有自己的图像，但狄利克雷函数的图像是画不出来的.

绝对值函数和符号函数在自变量的不同变化区间中，函数的表达式也不同，通常称为分段函数. 在自然科学、工程技术、社会科学等应用中，经常会遇到分段函数的情形.

例 1.2　火车站收取行李费的规定：当行李不超过 50kg 时，按基本运费计算，如从上海到某地收 0.15 元/kg；当超过 50kg 时超重部分按 0.25 元/kg 收费. 求上海到该地的行李费 y(元) 与重量 x(kg) 之间的函数关系式.

解

$$y=\begin{cases}0.15x, & 0<x\leqslant 50\\ 50\times 0.15+(x-50)\times 0.25, & 50<x<+\infty\end{cases}$$

1.2　函数的几种特性

1. 有界性

定义 1.2　设函数 $f(x)$ 在 I 上有定义，如果存在正数 M，对于任意的 $x\in D$，有

$|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 是在 I 上的有界函数,正数 M 称为 $f(x)$ 在 I 上的界;否则称 f 在 I 上无界.

函数的有界性实际上就是其值域集合的有界性. 如 $\sin x$ 和 $\cos x$ 都是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数;取整函数则是无界函数.

有界函数的几何意义是函数图形可以夹在两条平行直线之间(图 1-6).

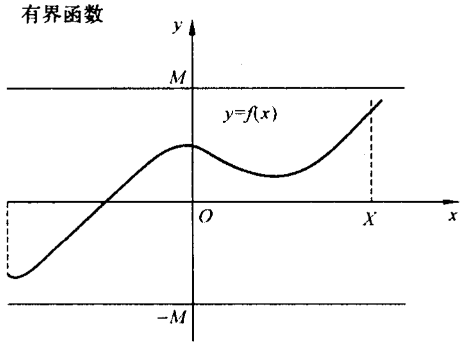


图 1-6

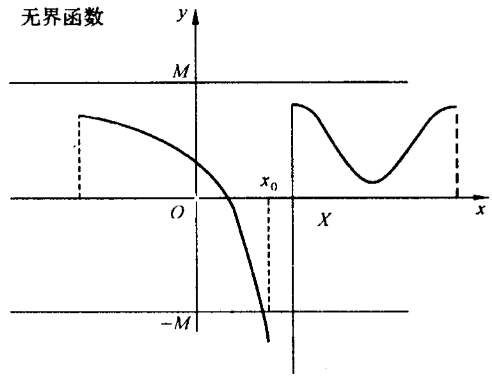


图 1-7

2. 单调性

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$,$\forall x_1, x_2 \in I$. 若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调增加;若 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调减少. 区间 I 称为函数 $f(x)$ 的单调区间. 若 $I = D$,则称函数 $f(x)$ 为单调(增加、减少) 函数.

这里的单调是指严格单调. 单调函数对应的曲线是上升或下降的(图 1-8,图 1-9).

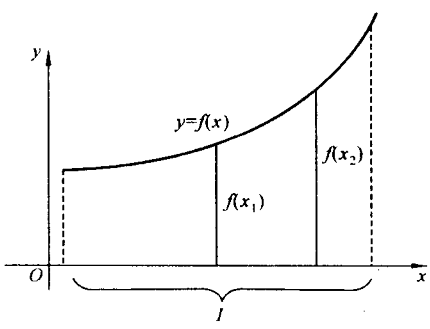


图 1-8

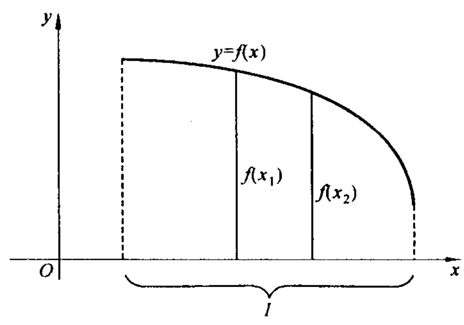


图 1-9

3. 周期性

函数的周期性:$\exists T \neq 0$,使 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数. 满足 $f(x+T) = f(x)$ 的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期. 其图像每隔 T 个单位就重复,如图 1-10 所示.

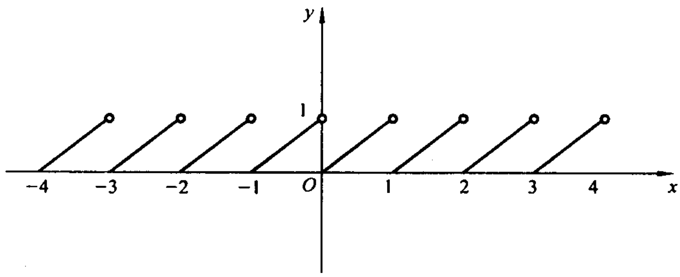


图 1-10

4. 奇偶性

函数的奇偶性:设函数的定义域 D 关于原点对称(为对称区域),而且 $\forall x \in D$,若 $f(-x)=\pm f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶(奇) 函数.

偶(奇) 函数的图形具有对称性(图 1-11).

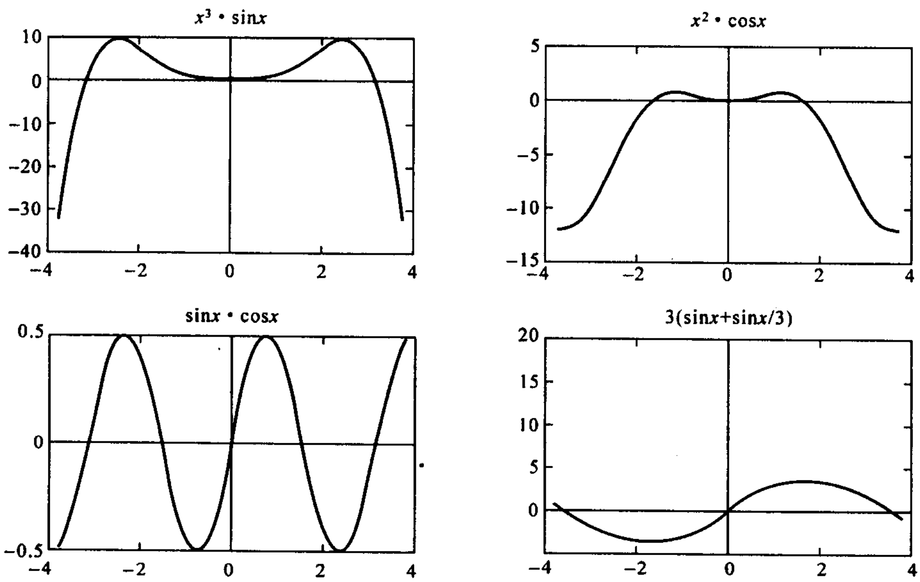


图 1-11

例 1.3 设函数 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,则函数 $f(x)-f(-x)$ 的图形关于(　　)对称.

A. $y=x$　　B. x 轴　　C. y 轴　　D. 坐标原点

解 设 $F(x)=f(x)-f(-x)$,则对任意 x 有

$$F(-x)=f(-x)-f(-(-x))=f(-x)-f(x)=-(f(x)-f(-x))=-F(x)$$

即 $F(x)$ 是奇函数,图形关于原点对称.故选项 D 正确.

例 1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域是全体实数,则函数 $f(x)\cdot f(-x)$ 是(　　).

A. 单调减函数　　B. 有界函数

C. 偶函数　　D. 周期函数

解 A,B,D 三个选项都不一定满足.设 $F(x)=f(x)\cdot f(-x)$,则对任意 x 有

$$F(-x)=f(-x)\cdot f(-(-x))=f(-x)\cdot f(x)=f(x)\cdot f(-x)=F(x)$$

即 $F(x)$ 是偶函数,故选项 C 正确.

1.3 反函数和复合函数

1. 反函数

函数可以看作从定义域到值域的一种运算,如果讨论这种运算的逆运算,就引出了反函数的概念.

定义 1.4 设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$. 称映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

按此定义,对每个 $y\in f(D)$,有唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,于是有

$$f^{-1}(y)=x$$

即反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定.

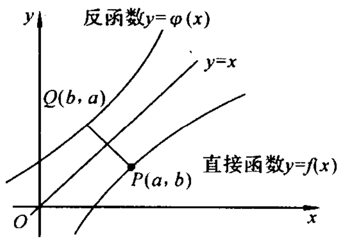


图 1-12

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$,原有函数 $y=f(x)$ 称为直接函数. 函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一坐标平面上关于直线 $y=x$ 对称(图 1-12). 这是因为,如果 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点,则有 $b=f(a)$. 按反函数的定义,有 $a=f^{-1}(b)$,故 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点;反之,若 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点,则 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点. 故 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的.

定理 1.1 单值单调函数的反函数必为单值单调函数,且单调增加函数的反函数仍是单调增加的,单调减少函数的反函数仍是单调减少的.

证明略.

2. 复合函数

如果某个变化过程中同时出现几个变量,其中第 1 个变量依赖于第 2 个变量,第 2 个变量又取决于第 3 个变量,于是第 1 个变量实际上是由第 3 个变量所确定. 这类多个变量的连锁关系导致数学上复合函数的概念. 如 $\ln\sin x$ 是由对数函数 $y=f(u)=\ln u$ 与三角函数 $u=\varphi(x)=\sin x$ 复合构成的函数;再如 $2^{\tan x}$ 是由指数函数 $y=f(u)=2^u$ 与三角函数 $u=\varphi(x)=\tan x$ 复合构成的函数等.

所谓复合函数就是把两个或两个以上的函数组合成一个新的函数.

定义 1.5 设函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D,并且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含于函数 $y=f(u)$ 的定义域中,称函数 $y=f(\varphi(x))$ 是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成的定义域为 D 的复合函数. 其中:u 称为中间变量,函数 $u=\varphi(x)$ 称为内层函数,函数 $y=f(u)$ 称为外层函数.

常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等 6 类函数统称为基本初

等函数.

几个简单函数(基本初等函数或由基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数)由里到外可复合成一个复合函数,另外也可将复合函数由外到里分解为几个简单函数.

通过将一个复杂的函数分解为几个简单的函数的复合来简化运算,或引入新变量,通过函数复合而简化运算的方法,都是微积分中常用的有效手段.

例如,函数 $y=\mathrm{e}^{\arctan^2(1+x)}$ 可以分解为

$$y=\mathrm{e}^u,\quad u=v^2,\quad v=\arctan w,\quad w=1+x$$

分解后的前 3 个函数都是简单的函数,而第 4 个函数是常数函数和幂函数的和.

例 1.5 将函数 $y=\cos[1+2\ln(x^2+1)]$ 分解成几个简单函数.

解 $y=\cos u,\quad u=1+v,\quad v=2w,\quad w=\ln s,\quad s=x^2+1$

例 1.6 设 $f(x)=x+1$,求 $f(f(x)+1)$.

解 由于 $f(x)=x+1$,说明 f 表示运算:(自变量)$+1$,因此

$$f(f(x)+1)=(f(x)+1)+1=f(x)+2$$

再将 $f(x)=x+1$ 代入,得

$$f(f(x)+1)=(x+1)+2=x+3$$

例 1.7 若函数 $f(x+2)=\sin 2x$,求 $f(x),f\left(\frac{1}{x}\right),f(0)$.

解 设 $x+2=t$,则 $x=t-2$.将 $x=t-2$ 代入 $f(x+2)=\sin 2x$ 中,即有

$$f(t)=\sin 2(t-2)$$

令 $t=x$,则有

$$f(x)=\sin 2(x-2)$$

令 $t=\frac{1}{x}$,则有

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\sin 2\left(\frac{1}{x}-2\right)$$

令 $t=0$,则有

$$f(0)=\sin 2(0-2)=-\sin 4$$

1.4 初等函数和指数模型

基本初等函数经四则运算可生成大量的函数,如 $y=1+x^2,y=x+\sin x,y=\frac{a^x-2x}{1+\ln x}$ 等.此外,复合运算也可生成新的函数.

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合步骤所得到的、能用一个式子表达的函数,称为初等函数.

初等函数包括的内容极其广泛,凡是能够用一个解析式表示的函数,都是初等函数.分段表示的函数一般不是初等函数,但是,由于分段函数在其定义域的子区间内都是初等函数,所以仍可通过初等函数来研究它们.

注意:绝对值函数虽然是分段表示的,但因为 $|x| = \sqrt{x^2}$,所以绝对值函数仍是初等函数.

例 1.8　将下列初等函数分解为基本初等函数的复合运算或其四则运算.

(1) $y = \cos[\ln(2x+1)]$　(2) $y = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$　(3) $y = \cos\dfrac{e^x+2}{x^3+7}$

解　(1) $y = \cos u, u = \ln v, v = 2x+1$

(2) $y = \ln u, u = x+\sqrt{v}, v = x^2+1$

(3) $y = \cos u, u = \dfrac{v}{w}, v = e^x+2, w = x^3+7$

在科学和工程中指数函数特别重要,用这类函数可以考察有关增长和衰减的指数模型.

定义 1.6　指数函数 $y = y_0 e^{kx}$,当 $k > 0$ 为指数增长的模型;当 $k < 0$ 为指数衰减的模型.

例 1.9　复利和连续复利(指数增长模型).

(1) 表 1-2 表示以年复利率 2.25% 投资 1000 元的增长. 复利率 2.25% 表示一年后账户上的钱数总是前一年钱数的 1.0225 倍;n 年后钱数为 $y = 1000 \cdot (1.0225)^n$.

表 1-2

年份	总数 / 元	增长 / 元
2005	1000	
2006	$1000 \cdot (1.0225) = 1022.5$	22.5
2007	$1000 \cdot (1.0225)^2 = 1045.506$	23.01
2008	$1000 \cdot (1.0225)^3 = 1069.03$	23.52
2009	$1000 \cdot (1.0225)^4 = 1093.083$	24.05

(2) 表 1-3 表示以连续复利率 2.25% 投资 1000 元的增长. 连续复利率 2.25% 表示一年后账户上的钱数总是前一年钱数"本利和" 的 1.0225 倍;n 年后钱数为$y = 1000 \cdot e^{rn}$.

表 1-3

年份	年复利率计算总数 / 元	连续复利计算总数 / 元
2005	1000	1000
2006	$1000 \cdot (1.0225) = 1022.5$	$1000 \cdot e^{0.0225\times1} = 1022.76$
2007	$1000 \cdot (1.0225)^2 = 1045.506$	$1000 \cdot e^{0.0225\times2} = 1046.03$
2008	$1000 \cdot (1.0225)^3 = 1069.03$	$1000 \cdot e^{0.0225\times3} = 1069.83$
2009	$1000 \cdot (1.0225)^4 = 1093.083$	$1000 \cdot e^{0.0225\times4} = 1094.17$

通过比较可以知道,利息按年复利和连续复利计算,连续复利计算时储蓄账户上的钱总数更多.

例 1.10　人口增长(指数增长模型). 表 1-4 给出了 1997 ~ 2002 年的中国人口数据,利用该指数增长模型来预测 2008 年的中国人口.