AOSAI

奥赛王牌精解

WANGPAIJINGJIE

高中数学

主编：刘叔才

副主编：王京梅 余水能

团结出版社

AOJAI

WANGPAIJINGJIE

奥赛王牌精解

□□□□□□

高中数学

GAOZH

■ 本册编者 杨万维 许建林

团结出版社

图书在版编目（C I P）数据

奥赛王牌精解．高中数学／刘叔才主编．—北京：团结出版社，2004.8

ISBN 7—80130—539—6

Ⅰ．数…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数学课—高中—解题
Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 108841 号

出版：团结出版社
北京市东城区东皇城根南街 84 号　邮编：100006
〔电话（010）82357526　82357220〕
http://www.dkwangpai.com
经销：全国新华书店
印刷：三河市印务公司鑫纪源印刷厂

开本：大 32
印张：18.125
字数：661 千字
版次：2004 年 8 月第一版　2004 年 8 月第一次印刷

书号：ISBN 7—80130—539—6/G·274
定价：22.00 元

前言

“奥林匹克”四个字早已超越了体育的界限，而成为一种精神的象征。因此，国际奥林匹克学科竞赛所倡导和弘扬的人文精神以及它背后隐含的对科学人才的成长乃至对科技发展的推动力已日渐为世人所瞩目。我国自1985年首次参加国际中学生数学奥林匹克竞赛以来，相继参加了物理、化学奥林匹克竞赛，连年取得优异的成绩，曾多次获得团体总分第一。它不仅激发了我国中学生的学习兴趣和竞赛热情，对我国学科人才的培养也起到了积极的推动作用。

为了配合我国奥林匹克学科竞赛活动的开展，为了适应广大中学生对奥林匹克竞赛指导教程的需要，以及为了给从事中学奥赛辅导及研究的教育工作者提供有益的参考资料，我们组织全国各地的部分专家、学者主持编写了《奥赛王牌精解》丛书。本丛书的宗旨是为广大的师生提供切实有用的奥赛辅导书，推动奥林匹克学科竞赛的普及。丛书体系以我国现行的初中、高中数学、物理、化学各学科竞赛大纲为依据。合理的将大纲设计的内容划分为若干章，章下又分若干专题。每专题下设“知识要点”、“范例精解”、“巩固练习”三个板块，不但讲述了竞赛所需的知识，并在思维方法和能力训练方面为学生提供了更多的启示和帮助。

本丛书的作者均是来自各省、市重点中学的特、高级教师，博士、硕士，他们或是中国奥林匹克竞赛的（省级）总教练，或是高级教练、一级教练，长期担任中学奥赛的组织、培训工作，有着丰富实用的竞赛教学经验，所培养出的参赛选手多次获得国际奥赛奖牌，为祖国赢得了荣誉。

本丛书编写过程中使用了众多的参考文献，在此向文献的作者致以衷心的感谢。由于时间仓促，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请专家、读者批评指正。

《奥赛王牌精解》编委会

2004年8月

体例说明

《奥赛王牌精解·数学》是一套针对已全面掌握数学知识的参赛学生的复习备考用书。同时对于愿在数学学习方面有所突破和发展的学生有一定的帮助。它根据我国现行的竞赛大纲，将大纲所涉及内容合理地划分为若干章，每章又分专题，专题下设以下栏目：

知识要点

结合国内外各级数学竞赛的最新动向，对竞赛涉及的重点、难点问题及重要的竞赛思想方法进行精讲精析。

范例精解

围绕竞赛的重点和热点，选择经典题、创新题与启发性题进行精解。在解析过程中力求“分析到位，解答简明，评注点睛”，以便读者深入理解问题的实质、变化、缘由和关系，从中获得洞察力、创造机智和竞赛中的灵感。

巩固练习

有针对性地选择和设计一些对竞赛有指导意义的名题、佳题、新题，按选择题、填空题和解答题的顺序编写，对所讲的内容加以巩固，方法加以拓广，使读者达到强化知识、开阔视野、增强能力、提高综合素质的目的。

巩固练习参考答案

为了方便读者使用，书的最后给出了巩固练习中各题的详细解答过程。

通过以上栏目的讲解练习，希望能切实提高参赛学生的参赛水平。

目录 Contents

第一章 初等函数

专题 1 函数的图象与性质 (001)
专题 2 函数的迭代与函数方程 (013)
专题 3 三角变换 (025)
专题 4 三角不等式 (039)
专题 5 高斯函数$[x]$ (050)
专题 6 含绝对值的有关问题 (062)

第二章 初等数论

专题 1 整除 (071)
专题 2 素数、合数以及算术基本定理 (077)
专题 3 欧拉定理、费马小定理以及孙子定理 (085)
专题 4 不定方程 (091)

第三章 不等式

专题 1 处理不等式问题的常用方法与技巧 (097)
专题 2 一些著名不等式及其应用 (104)

第四章 复数

专题 1 复数问题及解法 (112)
专题 2 单位根及其应用 (122)
专题 3 复数在平面几何中的应用 (127)

第五章 数列

专题 1 等差数列与等比数列 (132)
专题 2 递归数列 (144)
专题 3 数列的性质 (152)
专题 4 数学归纳法 (162)

第六章 初等几何

专题 1 直线形 (171)
专题 2 圆 (185)
专题 3 面积法 (204)

目录 Contents

专题 4　向量法 ►► (217)
专题 5　立体几何解题策略 ►► (230)
专题 6　四面体问题 ►► (238)
专题 7　切球问题 ►► (247)
专题 8　平面解析几何的问题与方法 ►► (255)

第七章　组合数学问题

专题 1　集合的划分 ►► (268)
专题 2　排列组合与二项式定理 ►► (274)
专题 3　计数原理与方法 ►► (285)

第八章　方程与多项式

专题 1　方程与方程组 ►► (294)
专题 2　多项式 ►► (304)

第九章　数学竞赛解题方法与技巧

专题 1　构造法与数形结合法 ►► (313)
专题 2　奇偶性分析法与无穷递降法 ►► (315)
专题 3　分类法与枚举法 ►► (318)
专题 4　复数方法与向量方法 ►► (322)
专题 5　面积方法与体积方法 ►► (327)
专题 6　几何变换法 ►► (330)
专题 7　极端原理 ►► (333)
专题 8　逐步调整法 ►► (336)
专题 9　对称原理 ►► (338)
专题 10　染色问题与染色方法 ►► (340)

第十章　数学建模与数学应用 ►► (345)

附录一

1. 高中数学奥林匹克模拟试题(一) ►► (356)
2. 高中数学奥林匹克模拟试题(二) ►► (358)
3. 高中数学奥林匹克模拟试题(三) ►► (360)
4. 高中数学奥林匹克模拟试题(四) ►► (362)

目录 Contents

附录二

1. 第 14 届(2003 年)“希望杯”全国数学邀请赛
高中一年级第 1 试试题 ---------- (364)
2. 第 14 届(2003 年)“希望杯”全国数学邀请赛
高中一年级第 2 试试题 ---------- (367)
3. 第 14 届(2003 年)“希望杯”全国数学邀请赛
高中二年级第 1 试试题 ---------- (370)
4. 第 14 届(2003 年)“希望杯”全国数学邀请赛
高中二年级第 2 试试题 ---------- (372)

附录三

1. 2003 年全国高中数学联赛第一试试题 ---------- (376)
2. 2003 年全国高中数学联赛第二试试题 ---------- (378)
3. 2002 年全国高中数学联赛第一试试题 ---------- (379)
4. 2002 年全国高中数学联赛第二试试题 ---------- (382)

参考答案 ---------- (383)

第一章 初等函数

函数是数学中最重要的概念之一，它贯穿于整个中学数学教学，数学竞赛试题当然离不开函数的点缀.从历年来的数学竞赛试题来看，函数一直是竞赛的热点之一，备受命题者的青睐.

专题1 函数的图象与性质

知识要点

函数的定义域、值域、对应法则是函数概念中的三要素.有关函数的图象、值域(最值)、单调性、奇偶性、周期性是数学竞赛中的重点内容.

1 函数的图象

中学数学教科书，通过作出函数的图象来研究函数的性质，这种研究函数性质的方法具有直观形象的特点，因此讨论函数的图象是极其重要的.

图象变换主要有：平移变换、伸缩变换、对称变换等.

2 函数的值域(最值)的求法

常用方法有：

(1)配方法：如果所给的函数是二次函数或可化为二次函数的形式，一般采用配方法，但在求解时，要注意作为二次函数形式的自变量的取值范围.

(2)判别式法：将所给函数 $y=f(x)$ 看作是关于 x 的方程.若是关于 x 的一元二次方程，则可利用判别式大于等于0来求 y 的取值范围，但要注意取等号的问题.

(3)换元法：将一个复杂的函数中某个式子当作整体，通过换元可化为我们熟知的表达式，这里要注意所换元的表达式的取值范围.

(4)利用函数单调性法：如果所给出的函数是熟悉的已知函数的形式，则可利用函数的单调性来求值域，但要注意其单调区间.

(5)反函数法：若某函数存在反函数，则可利用互为反函数两个函数的定义域与值域互换，改求反函数的定义域.

(6)利用均值不等式法：(详见第三章专题2)等等.

(7)构造法：通过构造相应图形，数形结合求出最值.(详见第九章相关内容).

3 函数的单调性及其应用

(1)函数与其反函数在各自的定义域上具有相同的单调性.

(2)对于复合函数 $y=f(g(x))$,若 $y=f(u)$与 $u=g(x)$的单调性相同,则 $y=f(g(x))$是增函数;若 $y=f(u)$与 $u=g(x)$单调性相反,则 $y=f(g(x))$是减函数.

(3)若 $f(x)$与 $g(x)$是定义在同一区间上的两个函数,

当 $f(x)$与 $g(x)$都是增(减)函数时,$f(x)+g(x)$也必为增(减)函数;

当 $f(x)$与 $g(x)$恒大于 0,且 $f(x)$与 $g(x)$都是单调递增(减)的,则 $f(x)\cdot g(x)$也是单调递增(减)的.

(4)函数的单调性主要有以下应用:

利用函数的单调性求函数的值域(或最值);利用函数的单调性解不等式;利用函数的单调性确定参数的取值范围;利用函数的单调性解方程等等.

4 函数的奇偶性及其应用

(1)函数是奇函数的充要条件是图象关于原点对称;函数是偶函数的充要条件是它的图像关于 y 轴对称.

(2)定义域关于原点对称的任何一个函数都可以表示成一个奇函数与一个偶函数的和的形式.

(3)若函数是奇函数,则其反函数也为奇函数,反之亦然.

(4)函数的奇偶性主要有以下应用:

求函数值;求函数表达式;判断函数的单调性:如果已知具有奇偶性的函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$($0\leqslant a<b$)上的单调性,由奇偶函数的对称性可直接判断 $f(x)$ 在$[-b,-a]$上的单调性.

5 函数的周期性

对于函数 $f(x)$,如果存在一个不为零的正数 T,使得当 x 取定义域中的每一个数时,$f(x+T)=f(x)$总成立,那么称 $f(x)$是周期函数,T 称为这个周期函数的周期.

范例精解

例1 在平面直角坐标系 xOy 中,由不等式 $\begin{cases} x^2+x^{-2}\geqslant y^2+y^{-2} \\ x^2+y^2\leqslant 100 \end{cases}$,所确定的图形的面积等于 ( )

A. 75π　　B. 60π　　C. 50π　　D. 45π

(第 12 届“希望杯”全国数学邀请赛高中二年级第二试试题)

分析 对不等式组等价变形，然后讨论第一象限的情形，由对称性易求面积.

解答 $\because x^2+x^{-2}\geqslant y^2+y^{-2}$

$\therefore (x^4+1)y^2\geqslant(y^4+1)x^2.$

$\therefore (x^2-y^2)(x^2y^2-1)\geqslant 0\ (x,y\neq 0).$

当 $x>0,y>0$ 时，区域为

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x\geqslant y\\ x\geqslant \dfrac{1}{y}\\ x^2+y^2\leqslant 10^2\end{cases}\quad 和(\mathrm{II})\begin{cases}x\leqslant y\\ x\leqslant \dfrac{1}{y}\\ x^2+y^2\leqslant 10^2\end{cases}$$

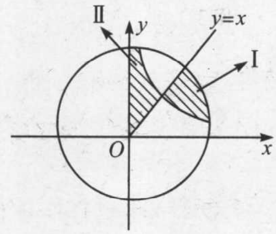

图 1-1

即如图 1-1 中阴影部分，两阴影部分与没有阴影的部分对称，故面积相等，在其他象限时，也有同样的情形，于是图形的总面积为 $S=\dfrac{1}{2}\pi\cdot 10^2=50\pi$. 选 C.

例2 已知 x,y 都在区间$(-2,2)$内，且 $xy=-1$，求函数 $u=\dfrac{4}{4-x^2}+\dfrac{9}{9-y^2}$ 的最小值.

(2003 年全国高中数学联赛试题(原题是选择题))

分析 本题看上去是"二元函数"，其实是一元函数，因为 $y=-\dfrac{1}{x}$，消去 y 后就是关于 x 的函数了，由均值不等式求出最小值.

解答 由已知得 $y=-\dfrac{1}{x}$，故

$$u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9x^2}{9x^2-1}=\frac{-9x^4+72x^2-4}{-9x^4+37x^2-4}=1+\frac{35}{37-\left(9x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)}$$

而 $x\in\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},2\right)$，

故当 $9x^2=\dfrac{4}{x^2}$，即 $x^2=\dfrac{2}{3}$ 时，$9x^2+\dfrac{4}{x^2}$的值最小

而此时函数 u 有最小值$\dfrac{12}{5}$.

评注　(1)利用均值不等式求最值是一种很重要的方法，要注意三个条件“一正，二定，三等号”.

(2)对求形如 $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$($a,m$ 不全为0)的函数的值域，有两种常见方法：均值不等式法与判别式法.

例3　设 $xy\geqslant 0$，$x+y=a(a>0)$，求 $s=x^2+y^2+x^2y^2$ 的最大值.

分析　注意到 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2xy$，代入 $s=x^2+y^2+x^2y^2$，即变成了关于 xy 的二次三项式，再用配方法求最大值.

解答　将 $x+y=a$ 代入 $s=x^2+y^2+x^2y^2$ 得

$$s=x^2+y^2+x^2y^2=(x+y)^2+x^2y^2-2xy$$
$$=x^2y^2-2xy+a^2$$

令 $t=xy$，则 $0\leqslant t=xy\leqslant\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}$

且 $s=s(t)=t^2-2t+a^2=(t-1)^2+(a^2-1)\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{a^2}{4}\right)$，

s 以 $t=1$ 为对称轴，当 $t\leqslant 1$ 时，单调递减；当 $t\geqslant 1$ 时，单调递增.

当 $\dfrac{a^2}{4}\geqslant 1$ 时，$s_{\max}=s\left(\dfrac{a^2}{4}\right)=\left(\dfrac{a^2}{4}-1\right)^2+(a^2-1)=\dfrac{a^4}{16}+\dfrac{a^2}{2}$.

当 $\dfrac{a^2}{4}<1$ 时，$s_{\max}=s(0)=(0-1)^2+(a^2-1)=a^2$.

讨论　(1)如果不考虑 t 的取值范围，则 $s(t)=(t-1)^2+(a^2-1)$ 是没有最大值的，易引导学生去考虑 t 的取值范围.

(2)改为求 $s=x^2+y^2+x^2y^2$ 的最小值，则容易忽视 t 的取值范围，误认为 $s_{\min}=s(1)=a^2-1$. 事实上，当 $\dfrac{a^2}{4}\geqslant 1$ 时，$s_{\min}=s(1)=a^2-1$；当 $\dfrac{a^2}{4}<1$ 时，$s_{\min}=s\left(\dfrac{a^2}{4}\right)=\dfrac{a^4}{16}+\dfrac{a^2}{2}$.

(3)再改为求 $s=x^3+y^3+x^2y^2$ 或 $T=x^4+y^4$ 的最值，则难度加大：

$$s=x^3+y^3+x^2y^2$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)+x^2y^2$$
$$=a(a^3-3xy)+x^2y^2$$

$$=\left(t-\frac{3}{2}a\right)^2+\left(a^4-\frac{9}{4}a^2\right)$$

$$\begin{aligned}T&=x^4+y^4\\&=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2\\&=[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2\\&=(a^2-2xy)^2-2x^2y^2\\&=a^4-4a^2xy+2x^2y^2\\&=2(t-a^2)^2-a^4\end{aligned}$$

再根据 $0\leqslant t=xy\leqslant\frac{a^2}{4}$，讨论 s 和 T 的最值.

评注

本题采用了换元法和配方法求最值. 在用换元法时，要确定 t 的取值范围. 用配方法求二次函数在闭区间 $[m,n]$ 上的最值，要分析对称轴.

例4 设 $f(x)=\lg\frac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa}{n}$，其中 a 是实数，n 是任意给定的正整数，且 $n\geqslant 2$. 如果 $f(x)$ 当 $x\in(-\infty,1]$ 时，有意义，求 a 的取值范围.

（1990 年全国高考理科数学试题）

分析

求 a 的取值范围，只需分离参数 a 与变量 x，化成 $a>g(x)$，其 $g(x)=-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right]$，只需根据 $g(x)$ 的单调性，算出 $g(x)$ 的范围，就能得到 a 的范围.

解答 $f(x)$ 当 $x\in(-\infty,1]$ 时，有意义的条件是

$1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa>0,x\in(-\infty,1],n\geqslant 2$

即 $a>-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right],x\in(-\infty,1]$.

令 $g(x)=-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right]$

又 $-\left(\frac{k}{n}\right)^x$，当 $k=1,2\cdots,n-1$ 时，都是增函数，因而在 $(-\infty,1]$ 上都是增函数.

$\therefore$ $g(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上是增函数，

从而当 $x=1$ 时，$[g(x)]_{\max}=g(1)=-\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)=-\frac{1}{2}(n-1)$.

$\therefore$ $a>-\frac{1}{2}(n-1)$，

即 a 的取值范围是$\left(-\frac{1}{2}(n-1),+\infty\right)$.

评注 本例涉及到对数函数、指数函数性质以及函数单调性的知识,并能用函数的观点,将问题转化为求函数 $g(x)$的最大值,而 $g(x)$的最大值可用单调性求出,而 a 都大于$g(x)$的最大值,即得 a 的取值范围.

例5 解方程 $\log_{12}(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})=\frac{1}{2}\log_9 x$.

分析 这是一道解对数方程问题,因为对数的底数不同,且真数中又含有根式,所以可考虑用换元法.设 $t=\frac{1}{2}\log_9 x$,则原方程可变形为 $9^t+3^t=12^t$ 即为指数方程.进而可用函数的单调性求解.

解答 设$\frac{1}{2}\log_9 x=t$,则 $x=9^{2t}$,于是 $\log_{12}(9^t+3^t)=t$,即 $q^{\,t}+3^t=12^t$,亦即$\left(\frac{3}{4}\right)^t+\left(\frac{1}{4}\right)^t=1$.

构造函数 $f(t)=\left(\frac{3}{4}\right)^t+\left(\frac{1}{4}\right)^t$,则 $f(t)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数

当 $t>1$ 时,$f(t)<f(1)=1$;

当 $t<1$ 时,$f(t)>f(1)=1$.

所以当 $t>1$ 与 $t<1$ 时,$f(t)\neq1$,

而 $t=1$ 时,$f(t)=1$, 此时 $x=9^2=81$.

经检验 $x=81$ 是原方程的解.

讨论 类似对于解方程$(x^2-20x+38)^2=x^3-4x^2+84x-152$,可将其变形为$(x^2-20x+38)^2+4(x^2-20x+38)=x^3+4x$,构造函数 $f(x)=x^3+4x$,原方程即为 $f(x^2-20x+38)=f(x)$.因为 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数,所以可将方程同解变形为 $x^2-20x+38=x$.解得 $x=2$ 或 $x=19$.这是因为单调函数 $y=f(x)$中 x 与 y 是一一对应的,这样可使复杂的高次方程 $f(x)=f(a)$化为简单的方程 $x=a$,使问题简化.构造恰当的函数是解决问题的关键.

评注 利用函数的单调性可解决一类复杂的解方程(组)问题,另可参考第八章专题1巩固练习3.

例6 函数 $f(x)$的定义域关于原点对称,但不包括数0.对定义域中的任意

数 x,在定义域中存在 x_1,x_2,使 $x=x_1-x_2$,$f(x_1)\neq f(x_2)$,且满足以下三个条件:

(1)若 x_1,x_2 是定义域中的数,$f(x_1)\neq f(x_2)$或 $0<|x_1-x_2|<2a$,

则 $f(x_1-x_2)=\dfrac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$

(2)$f(a)=1$(a 为一个正常数).

(3)当 $0<x<2a$ 时,$f(x)>0$.

试证:(1)$f(x)$是奇函数;

(2)$f(x)$是周期函数,并求出其周期;

(3)$f(x)$在$(0,4a)$内为减函数.

(1986 年上海市中学生数学竞赛第二试试题)

分析与证明 (1)设 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{Z}$,对于 $x\in\mathbf{Z}$,有 $-x\in\mathbf{Z}$,

且存在 $x_1,x_2\in\mathbf{Z}$,使 $x=x_1-x_2$,$f(x_1)\neq f(x_2)$,

故 $f(x)=f(x_1-x_2)=\dfrac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}=-\dfrac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_1)-f(x_2)}$

$=-f(x_2-x_1)=-f(-x)$

所以,$f(x)$为奇函数.

(2)因为 $f(a)=1$,$f(x)$为奇函数,所以 $f(-a)=-1$,

于是 $f(-2a)=f[(-a)-a]=0$

①当 $f(x)\neq0$ 时,则

$$f(x+2a)=f[x-(-2a)]=\frac{f(x)f(-2a)+1}{f(-2a)-f(x)}=-\frac{1}{f(x)}(x\neq0)$$

$$\therefore f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]=-\frac{1}{f(x+2a)}=f(x)$$

即 $f(x+4a)=f(x)$.

②当 $f(x)=0$ 时,则 $f(x+a)=f[x-(-a)]=-1$,

$$f(x+3a)=f[(x+a)+2a]=\frac{1}{-f(x+a)}=1,$$

$$f(x+4a)=f[(x+3a)-(-a)]=0$$

$\therefore\ f(x+4a)=f(x)$.

由①②知:$f(x+4a)=f(x)$.

故 $f(x)$是周期函数,$4a$ 是它的一个周期.

(3)先证在$(0,2a]$内 $f(x)$为减函数.

设 $0<x_1<x_2\leqslant2a$,则 $0<x_2-x_1<2a$,于是 $f(x_1)>0$,$f(x_2)>0$,

$\dfrac{f(x_2)f(x_1)+1}{f(x_1)-f(x_2)}=f(x_2-x_1)>0$,所以,$f(x_1)>f(x_2)$.

再证在$(2a,4a)$内$f(x)$也为减函数.

又设$2a<x_1<x_2<4a$,则$0<x_1-2a<x_2-2a<2a$,

$f(x_1-2a)>f(x_2-2a)>0$.

因为在(2)的证明中得知$f(x-2a)\neq 0$

$\therefore f(x)=f[(x-2a)+2a]=-\dfrac{1}{f(x-2a)}$,

所以,$f(x_1)-f(x_2)=-\dfrac{1}{f(x_1-2a)}+\dfrac{1}{f(x_2-2a)}>0$

故在$(2a,4a)$内$f(x)$也是减函数,于是命题成立.

评注 在证明周期性时,先证$f(-2a)=0$,再对$f(x)$为0和不为0进行讨论,最后由周期性定义易证.在证明为减函数时,由条件"当$0<x<2a$时,$f(x)>0$"可知:先证在$(0,2a]$内为减函数,再证在$(2a,4a)$内为减函数.

例7 已知$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2} & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\right) \\ 2(1-x) & \left(\dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\right). \end{cases}$

定义$f_n(x)=f(f(\cdots f(x)\cdots)),n\in\mathbf{N}^*$

(1)求$f_{2004}\left(\dfrac{2}{15}\right)$;

(2)设$B=\{x\mid f_{15}(x)=x,x\in(0,1]\}$,求证:$B$中至少含有9个元素.

分析 先归纳出$f_n\left(\dfrac{2}{15}\right)$的周期性,然后易求出$f_{2004}\left(\dfrac{2}{15}\right)$.对(2)用到$f_n\left(\dfrac{2}{15}\right)$的周期性,再借助于图象,注意到$x=0,\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},1$的值易证.

解答 (1)利用所给函数的解析式,可得:

$f_1\left(\dfrac{2}{15}\right)=\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{19}{30}$,

$f_2\left(\dfrac{2}{15}\right)=f\left(\dfrac{19}{30}\right)=2\left(1-\dfrac{19}{30}\right)=\dfrac{11}{15}$,

$f_3\left(\dfrac{2}{15}\right)=f\left(\dfrac{11}{15}\right)=2\left(1-\dfrac{11}{15}\right)=\dfrac{8}{15}$,

$f_4\left(\dfrac{2}{15}\right)=f\left(\dfrac{8}{15}\right)=2\left(1-\dfrac{8}{15}\right)=\dfrac{14}{15}$,

$f_5\left(\dfrac{2}{15}\right)=f\left(\dfrac{14}{15}\right)=2\left(1-\dfrac{14}{15}\right)=\dfrac{2}{15}$,

$f_6\left(\dfrac{2}{15}\right)=f\left(\dfrac{2}{15}\right)=\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{19}{30}$,

所以 $f_n\left(\frac{2}{15}\right)$ 对 n 来说是以 5 为周期变化的，

即 $f_{5k+r}\left(\frac{2}{15}\right)=f_r\left(\frac{2}{15}\right)(r=1,2,3,4,5)$

所以 $f_{2004}\left(\frac{2}{15}\right)=f_{5\times400+4}\left(\frac{2}{15}\right)=f_4\left(\frac{2}{15}\right)=\frac{14}{15}$.

(2)设 $A=\left\{\frac{2}{15},\frac{19}{30},\frac{11}{15},\frac{8}{15},\frac{14}{15}\right\}$,

由(1)知，对于 $a\in A$，有 $f_5(a)=a$，故 $f_{15}(a)=a$，所以，$A\subseteq B$

画出 $f(x)$ 的图象，如图 1-2 所示.

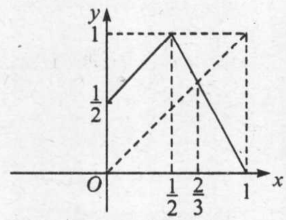

图 1-2

由图象可知 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$,

所以 $f_{15}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$，故 $\frac{2}{3}\in B$

又设 $C=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$.

由 $f(0)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$f(1)=0$ 知，

对于 $c\in C$，有 $f_3(c)=c$

所以 $f_{15}(c)=c$. 故 $C\subseteq B$

综上所述，$\left\{\frac{2}{15},\frac{19}{30},\frac{11}{15},\frac{8}{15},\frac{14}{15},\frac{2}{3},0,\frac{1}{2},1\right\}\subsetneqq \mathbf{B}$,

故 B 中至少含有 9 个元素.

评注 函数的周期性可解决一类函数的求值问题.

例8 设 $x_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant n}\sqrt{\frac{k}{j}}x_kx_j=1$.

求 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 的最大值与最小值.

(2001 年全国高中数学联赛第二试试题)

分析 可考虑用柯西不等式求最值.

解答 (1)先求最小值.

因为 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant n}x_kx_j\geqslant1$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\geqslant1$ ($\because$ $x_i\geqslant0$，$i=1,2,\cdots,n$)

当且仅当存在 i 使得 $x_i=1$，$x_j=0$，$j\neq i$ 时，等号成立.

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 的最小值为 1.