XINJIAOCAI SHUXUE TONGBU FENCENG DAOXUE

配 上 海 二 期 课 改 新 教 材

主编 忻再义

新教材数学

同步分层导学

高中二年级第一学期用

上海科学技术出版社

新教材

数学

同步 分层 导学

高中二年级第一学期用

主编　忻再义

上海科学技术出版社

内 容 提 要

数学同步分层导学是与新教材内容紧密配合的学生同步辅导读物，旨在同步地对课堂内容进行补充，并为学生提供训练机会. 本书是其中一册.

本书将每章内容按单元进行划分，每一单元由[综合导学]、[随堂应用]、[分层达标]等栏目组成，每章末还有[研究性学习]、[阅读与欣赏]栏目. 整本书中附有[阶段测试]、[期末测试]及[参考答案]等.

图书在版编目(CIP)数据

新教材数学同步分层导学. 高中二年级第一学期用/忻再义主编. —上海：上海科学技术出版社，2006.8
ISBN 7-5323-8421-7

Ⅰ.新... Ⅱ.忻... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 031114 号

责任编辑　周玉刚　朱先锋

新教材数学同步分层导学
(高中二年级第一学期用)
主编　忻再义
上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社　出版、发行
(上海钦州南路 71 号　邮政编码:200235)
新华书店上海发行所经销　常熟市兴达印刷有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 8.75　字数 202 000
2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
印数:1-6 000
ISBN 7-5323-8421-7/G・1825
定价：10.70 元

出版说明

这套同步分层导学丛书是以上海市二期课改新教材为依据的学生同步辅导读物，内容紧密配合教材．本丛书按每学期一册编写，旨在同步地对课堂内容进行辅导，为学生提供训练机会，并成为课堂教学的有益的参考辅导读物．

本丛书将每章内容按单元进行划分，每一单元由[综合导学]、[随堂应用]、[分层达标]栏目组成，每章末还有[阅读与欣赏]、[研究性学习]栏目．整本书中附有[阶段测试]、[期末测试]及[提示与参考答案]等．

[综合导学]是对这一单元的知识要点、例题剖析、思维误区、方法指导、请你思考等进行剖析．

[随堂应用]是按课时需要，将每一单元内容分成多个[随堂应用]，即针对每一节课安排 3～5 题与课堂教学内容密切相关的练习题，让学生课后复习巩固之用．比如在第一单元中，如果分为 4 节课，就有 4 个[随堂应用]，其内容的深浅、顺序与课堂内容完全一致．也就是说，课堂上什么内容，就安排相应的练习内容；如果课堂是复习，内容也就是有关前面的复习内容．

[分层达标]是对本单元的有关知识以试卷形式让学生进行训练，分为基础型、提高型两组题目．

[阅读与欣赏]是根据二期课改的新理念，旨在开拓学生的眼界，提高学生的学习兴趣．

[研究性学习]是根据二期课改的新理念，旨在让学生在探究的过程中，培养其创新能力．

[阶段测试]是在每学期期中时安排两份阶段测试．

[期末测试]是在每学期期末时安排两份期末测试．

[参考答案]给出了[随堂应用]、[分层达标]、[阶段测试]、[期末测试]的答案，对有难度的题目，进行详细解答．

本册主编为忻再义，参加本册编写的有：赵岩（第 9 章）、阮瑾怡（第 10 章）、穆晓东（第 11 章）、忻再义（第 12 章）等．本册由忻再义统稿．

目录

目录

第九章 行列式初步

第一单元　二阶行列式

综合导学

知识要点

1. 知道行列式是表示特定算式的记号.

2. 理解二阶行列式的概念及其展开的对角线法则.

3. 能正确地运用二阶行列式解二元一次方程组,并会对含字母系数的二元一次方程组的解的情况进行讨论.

4. 掌握二元一次方程组有唯一解的充要条件及唯一解公式.

例题剖析

例 1　展开并化简下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} b & 2a \\ 2c & b \end{vmatrix}$;(2) $\begin{vmatrix} \sin15^\circ & 1 \\ 1 & \cos15^\circ \end{vmatrix}$;(3) $\begin{vmatrix} \lg^2 5+\lg^2 2 & \lg5\cdot\lg4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$.

分析　二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ 表示四个数(或式)中的两数积与另两数积之差,即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1$. 反之,凡两数(或式)积与另两数(或式)积之差,都可以用一个二阶行列式表示.

解　(1) $\begin{vmatrix} b & 2a \\ 2c & b \end{vmatrix} = b^2-4ac$;

(2) $\begin{vmatrix} \sin15^\circ & 1 \\ 1 & \cos15^\circ \end{vmatrix} = \sin15^\circ\cdot\cos15^\circ-1=\frac{1}{2}\sin30^\circ-1=-\frac{3}{4}$;

(3) $\begin{vmatrix} \lg^2 5+\lg^2 2 & \lg5\cdot\lg4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \lg^2 5+\lg^2 2+2\lg2\cdot\lg5$

$=(\lg5+\lg2)^2=1.$

例 2　如图 9-1 所示,设有平行四边形 $OACB$,顶点 O 在原点,点 A、B 的坐标分别为(a_{11},a_{12}),(a_{21},a_{22}),试证:$\square OACB$ 的面积为

$$S_{OACB} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

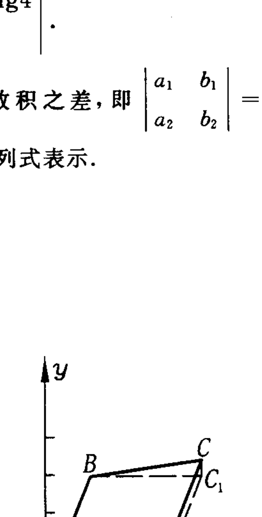

图　9-1

分析　本例给出了二阶行列式的一种几何解释,利用它不仅可以求得平

行四边形的面积，而且可以求解相应的三角形的面积．有兴趣的读者可进一步思考当 A、B 的坐标不全为正时，如何用行列式表示相应的平行四边形面积，以及当顶点 O 不是坐标原点时，如何用行列式表示相应的平行四边形面积．

证明 设点 A_1 是 A 在 x 轴上的射影，过 C 作 $CC_1 \perp x$ 轴，过点 B 作 BC_1 平行于 x 轴，CC_1 与 BC_1 交于点 C_1，连接 A_1C_1，则 OA_1C_1B 也是平行四边形，易得

$$S_{OACB}=S_{OA_1C_1B}-S_{AA_1C_1C}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

即
$$S_{OACB}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

例3 用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 4x-5y=2, \\ 3x-4y=3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (m-2)x+y=m-1, \\ 3x+my=2. \end{cases}$

分析 用行列式解二元线性方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$ 当 $D\neq 0$ 时，不仅容易记忆求解公式 $\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}, \end{cases}$ 而且可以通过行列式的值来对含字母系数的二元一次方程组解的情况作进一步的讨论：何时无解，何时有无穷多组解，何时有唯一组解．这样的讨论突出了方程组的代数特征，也为后继学习两条直线的位置关系作了很好的铺垫．

解 (1) $D=\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-16+15=-1$,

$D_x=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-8+15=7$,

$D_y=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=12-6=6$,

$\therefore\ x=\dfrac{D_x}{D}=-7$，$y=\dfrac{D_y}{D}=-6$．所以原方程组的解为 $\begin{cases} x=-7, \\ y=-6. \end{cases}$

(2) $D=\begin{vmatrix} m-2 & 1 \\ 3 & m \end{vmatrix}=m^2-2m-3=(m-3)(m+1)$,

$D_x=\begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix}=m^2-m-2=(m-2)(m+1)$,

$D_y=\begin{vmatrix} m-2 & m-1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-(m+1)$.

① 当 $D=(m-3)(m+1)\neq 0$，解得 $m\neq 3$ 且 $m\neq -1$ 时，方程组有唯一解：

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{m-2}{m-3}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{1}{3-m}. \end{cases}$$

② 当 $m=3$ 时，$D=0$，$D_x\neq 0$，$D_y\neq 0$.

方程组为 $\begin{cases} x+y=2, \\ 3x+3y=2. \end{cases}$ 该方程组无解．

③ 当 $m=-1$ 时，$D=D_x=D_y=0$，方程组为 $\begin{cases}3x-y=2,\\3x-y=2.\end{cases}$

该方程组有无穷多组解 $\begin{cases}x=t,\\y=3t-2.\end{cases}$ $(t\in\mathbf{R})$

思维误区

例 4 无论 k 为何实数，方程组 $\begin{cases}kx-y+1=0,\\2x-y+t=0\end{cases}$ 恒有相同的解，求实数 t 的值.

错解 $D=\begin{vmatrix}k & -1\\2 & -1\end{vmatrix}=-k+2$,

$D_x=\begin{vmatrix}1 & -1\\t & -1\end{vmatrix}=-1+t$, $D_y=\begin{vmatrix}k & 1\\2 & t\end{vmatrix}=kt-2$,

$\therefore\quad x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-1+t}{-k+2}$, $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{kt-2}{-k+2}$.

由题意 $x=y$，即 $\dfrac{-1+t}{-k+2}=\dfrac{kt-2}{-k+2}$ 对 $k\in\mathbf{R}$ 恒成立.

令 $k=0$，则 $t=-1$ 为所求.

分析 (1) 利用二阶行列式讨论方程组的解，首先要将方程化为 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的标准形式，然后才能做相应的系数替换；

(2) 由已知需按 $D\neq0$ 和 $D=0$ 作分类讨论；

(3) 方程组恒有一组相同的解，指 x,y 的表达式的值不随 k 的变化而变化，或从“形”的角度理解为两直线过定点. 不能理解为“$x=y$”.

正解一 原方程可化为 $\begin{cases}kx-y=-1,\\2x-y=-t.\end{cases}$

(1) 若 $D=\begin{vmatrix}k & -1\\2 & -1\end{vmatrix}=-k+2=0$，则当 $t=1$ 时，方程组恒有相同的解.

(2) 若 $D\neq0$，即 $k\neq2$，则

$D_x=\begin{vmatrix}-1 & -1\\-t & -1\end{vmatrix}=1-t$,

$D_y=\begin{vmatrix}k & -1\\2 & -t\end{vmatrix}=-kt+2$,

$\therefore\quad x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{1-t}{2-k}$, $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{2-kt}{2-k}$.

由题意，当 $k=0$ 时，$x=\dfrac{1}{2}(1-t)$；当 $k=1$ 时，$x=1-t$.

令 $\dfrac{1}{2}(1-t)=1-t$. 解方程，得 $t=1$.

代入，得 $y=1$ 是常数.

综上所述，满足条件 $t=1$.

正解二 原方程组恒有一组相同的解，相当于两直线过相同的一定点. 由 $y=kx+1$ 直

线过定点(0,1)代入方程 $2x-y+t=0$，得 $t=1$.

方法指导

对方程组解的各种可能情况的分类讨论.

例 5 若方程组 $\begin{cases} y+1=3a(x-2), & ① \\ (a^2-1)x+(a-1)y=2 & ② \end{cases}$ 的解集是空集，试确定实数 a 的值.

分析 利用行列式的值讨论含字母系数的二元一次方程组的解是本单元的难点之一. 解题时常涉及分类讨论思想的应用，需注意分类时应不重不漏；如果利用数形结合的思想解题，也需分类讨论两直线的性质.

本例中，方程组的解集为空集，可以有以下几种情形：(1) 方程②无解，此时 $a=1$；(2) 方程①、②均有解，但方程组无解.

解 (1) 当方程②的解集是空集时，将 $a=1$ 代入方程①成立.

(2) 当方程①、②的解集均非空时，原方程组可化为

$$\begin{cases} 3ax-y=6a+1, & ③ \\ (a^2-1)x+(a-1)y=2. & ② \end{cases}$$

当 $D=\begin{vmatrix} 3a & -1 \\ a^2-1 & a-1 \end{vmatrix}=(4a+1)(a-1)=0$，即 $a=-\frac{1}{4}$ 时，

$D_x=\begin{vmatrix} 6a+1 & -1 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix}=(2a-1)(3a-1)\neq 0$，此时方程组无解.

综上，得 $a=1$，$a=-\frac{1}{4}$ 时，方程组的解集是空集.

请你思考

已知方程组 $\begin{cases} \frac{y-3}{x-2}=a+1, \\ (a^2-1)x+(a-1)y=15 \end{cases}$ 的解集是空集，求实数 a 的值.

随 堂 应 用

应用一 二阶行列式(一)

1. 行列式 $\begin{vmatrix} \sqrt{a-1} & 1 \\ 1 & \sqrt{1-a} \end{vmatrix}$ 的值是________.

2. 方程 $\begin{vmatrix} \lg x^2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的解是________.

3. 不等式 $\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的解集是________.

4. 若 $y=\begin{vmatrix} (a+1)x & 1 \\ 5-4a & 1 \end{vmatrix}$ 在 $x\in[0,2]$ 内的函数 y 的值有正有负，则 a 的取值范围是________.

5. 等比数列$\{a_n\}$中的项满足$\begin{vmatrix} a_4 & 5 \\ 2 & a_8 \end{vmatrix}=0$，则$a_3a_6a_9$的值是________.

应用二　二阶行列式(二)

1. 若方程$\begin{vmatrix} (a-1)x & 1 \\ ax+1 & ax \end{vmatrix}=0$无实根，则实数$a$的取值范围是________.

2. 方程组$\begin{cases} \sin t x-\cos t y=t, \\ x+y=2 \end{cases}$有实根的充要条件是________.

3. 已知方程组$\begin{cases} 4x+3y=1, \\ kx+(k-1)y=3 \end{cases}$的解中的$x$、$y$的值相等，求$k$的值及方程组的解.

4. 已知函数$y=\begin{vmatrix} x^2 & 2k \\ x & 1 \end{vmatrix}$在区间$[2,+\infty)$内是单调递增函数，求实数$k$的取值范围.

5. 无论k为何实数，方程组$\begin{cases} kx-y+2=0, \\ 2x+3y+t=0 \end{cases}$恒有一组相同的解，求实数$t$的值.

分　层　达　标

基础型

一、填空题

1. 计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}=$______；(2) $\begin{vmatrix} x-1 & x^3 \\ 1 & x^2+x+1 \end{vmatrix}=$______；

(3) $\begin{vmatrix} \cos 3x & -\sin x \\ \sin 3x & \cos x \end{vmatrix}=$______.

2. 方程$x^2-kx+k=0$有实根的充要条件可用二阶行列式表示为________.

3. 已知$\triangle ABC$的顶点$A(-1,-2)$，$B(6,1)$，$C(0,0)$，则面积$S_{\triangle ABC}$的值为________.

4. 若方程$\begin{vmatrix} x-2a & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix}=0$有正实根，则实数$a$的取值范围是________.

5. 若方程组$\begin{cases} t^2x-(t+1)y=t, \\ (t-1)x-(t+1)y=1 \end{cases}$有唯一解，则实数$t$的值是________.

6. 方程组$\begin{cases} tx+y=t+1, \\ x+ty=2t \end{cases}$$(t\neq 0)$有唯一解的条件是________，唯一解是________.

二、选择题

7. 行列式$\begin{vmatrix} \log_2 48 & \log_2 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$的值为(　　).

(A) 42　　(B) 24　　(C) 12　　(D) 3

8. $\begin{vmatrix} 1 & k^2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\geqslant 0$是方程$kx^2-x+k=0$有实根的(　　).

(A) 充分且非必要条件　　(B) 必要且非充分条件

(C) 充分且必要条件　　(D) 非充分且非必要条件

9. 方程组$\begin{cases}|x|+|y|=1,\\|x|-y=0\end{cases}$的解的个数为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

10. 若方程组$\begin{cases}kx-y+m=0,\\(2k-1)x-y+4=0\end{cases}$有无穷多组解,则实数(　　).

(A) $k=1$　　(B) $m=4$　　(C) $k=1$ 且 $m=4$　　(D) $k=1$ 或 $m=4$

三、解答题

11. 求证:$\begin{vmatrix}la_1 & ka_1\\la_2 & ka_2\end{vmatrix}=0$.

12. 若 $a\neq1$,且方程组$\begin{cases}(a-1)x-(a^2-1)y=0,\\x+2y=3\end{cases}$的解 x 和 y 相等,求实数 a 的值.

13. 利用行列式解方程组:$\begin{cases}ax+by=a^2+b^2,\\bx+ay=2ab.\end{cases}$($|a|\neq|b|$)

14. 甲、乙两人合作完成一项工程需 24 天;若乙先干 10 天后甲加入,则还需 20 天完成.问:甲、乙单独完成这项工程各需多少天?

提高型

一、填空题

1. 已知行列式

① $\begin{vmatrix}5 & 1\\8 & 2\end{vmatrix}$;② $\begin{vmatrix}5 & 8\\1 & 2\end{vmatrix}$;③ $\begin{vmatrix}1 & 5\\2 & 8\end{vmatrix}$;④ $\begin{vmatrix}5 & 3\\8 & 6\end{vmatrix}$;⑤ $\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{vmatrix}$;⑥ $\begin{vmatrix}0 & 0\\2 & 6\end{vmatrix}$;⑦ $\begin{vmatrix}5 & 11\\8 & 18\end{vmatrix}$.

(1) 计算各行列式的值:① 的值为________;② 的值为________;③ 的值为________;④ 的值为________;⑤ 的值为________;⑥ 的值为________;⑦ 的值为________.

(2) 观察结果,试完成下列问题:

① 把行列式的各行变为相应的列,行列式的值__________.

② 把行列式的两行(或两列)对调,行列式的值__________.

③ 把行列式的某一行(或某一列)所有元素都乘以某数 k,等于将原来行列式的值__________.

④ 如果行列式的某两行(或某两列)的对应元素成比例,那么行列式的值________.

⑤ 如果行列式的某一行(或某一列)的所有元素都为零,那么行列式的值________.

⑥ 把行列式的某一行(或某一列)的所有元素都乘以某数 k,加到另一行(或另一列)的对应元素上,行列式的值__________.

2. 计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix}x+1 & x^3\\1 & x^2-x+1\end{vmatrix}=$____________;(2) $\begin{vmatrix}\tan75^\circ-\tan15^\circ & \sqrt{3}\\\tan75^\circ\cdot\tan15^\circ & 1\end{vmatrix}=$____________;

(3) $\begin{vmatrix}\lg(\sqrt{1+x^2}-x) & \lg(\sqrt{1+x^2}+x)\\-1 & 1\end{vmatrix}=$____________.

3. 在$\triangle ABC$中,若$\begin{vmatrix}a & \cos B\\b & \cos A\end{vmatrix}=0$成立,则$\triangle ABC$的形状是__________.

4. 若关于 x、y 的方程组$\begin{cases}x\sin A-y\sin A=-\cos A,\\x\cos A+y\cos A=\sin A\end{cases}$有唯一解,则实数 A 的取值范围

是________.

5. 方程组$\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=-1,\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{y}=-6\end{cases}$的解是________.

6. 若方程组$\begin{cases}3x+5y-k-2=0,\\ 2x+3y-k=0\end{cases}$的解是方程 $2x-y=4$ 的解,则 k 的值是________.

二、选择题

7. 若方程$\begin{vmatrix}|x+1| & -1\\ |x-1| & 1\end{vmatrix}=a$ 的解集非空,则实数 a 的取值范围是(　　).

(A) $a<-2$　　(B) $a>2$　　(C) $a<-2$ 或 $a>2$　　(D) $a\geqslant 2$

8. 方程组$\begin{cases}(a-1)x-(a-1)y=1,\\ (a+1)x+(a-1)y=3\end{cases}$有唯一解的充要条件是(　　).

(A) $a\neq 0$　　(B) $a\neq 1$　　(C) $a\neq 0$ 或 $a\neq 1$　　(D) $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$

9. 方程组$\begin{cases}ax-y+1=0,\\ |x|-y=0\end{cases}$的解 x 和 y 相等,则实数 a 的取值范围是(　　).

(A) $a\leqslant -1$　　(B) $-1<a<1$　　(C) $a<1$　　(D) $-1\leqslant a\leqslant 1$

10. 若不论 k 取何值,方程组$\begin{cases}kx+y-1=0,\\ x-my+1=0\end{cases}$都有解,则实数 m 的值是(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

三、解答题

11. 当 a 取哪些整数时,方程组$\begin{cases}x+y=a+3,\\ 5x+3y=31\end{cases}$的解是正数?

12. 已知 c、d 不全为零,求证$\dfrac{ax+b}{cx+d}$的值与 x 无关的充要条件是:$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=0$.

13. 已知等差数列$\{a_n\}$中的项 a_m、a_n 满足$\begin{vmatrix}a_m & n\\ a_n & m\end{vmatrix}=0$,试求 a_{m+n}的值.

14. (1) 求下列方程组的解:① $\begin{cases}2x+3y=4,\\ 5x+6y=7;\end{cases}$ ② $\begin{cases}2x+3y=4,\\ 3x+5y=7;\end{cases}$ ③ $\begin{cases}x+3y=5,\\ 2x+5y=8.\end{cases}$

(2) 已知关于 x、y 的方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$与方程组①有相同的解,试判断数列 a_1,b_1,c_1 与数列 a_2,b_2,c_2 分别是什么数列.

第二单元　三阶行列式

综　合　导　学

知识要点

1. 掌握三阶行列式展开的对角线法则,会用这个法则展开三阶行列式.

2. 理解三阶行列式的余子式、代数余子式概念，会求三阶行列式中对应于某个元素的代数余子式，能按一行(或一列)展开三阶行列式.

3. 掌握三元一次方程组有唯一解的条件，在有唯一解的情况下，会用三阶行列式解三元一次方程组.

4. 能通过三元一次方程组的系数行列式对它的解的情形作判断.

例题剖析

例 1 利用对角线法则计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

分析 三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$ 是一种算式的记号，其对角线展开法则如图 9-2 所示.

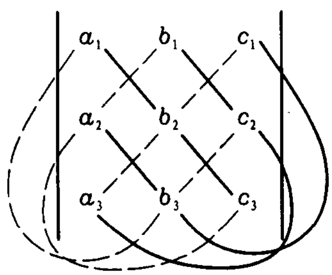

图 9-2

图中实线上三个元素的积添上正号；虚线上三个元素的积添上负号.

解 (1) 原式$=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8-0\times1\times3-2\times(-1)\times8-1\times(-4)(-1)=-4$；

(2) 原式$=2\times(-2)\times1=-4$.

例 2 已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

(1) 写出元素 b^2 的余子式、代数余子式 B_3；

(2) 将行列式按第三行展开；

(3) 若 a、b、c 都是整数，试判断行列式的值是否能被$(a-b)$整除；

(4) 试判断三点 $A(a,a^2)$，$B(b,b^2)$，$C(c,c^2)$能否构成三角形.

分析 将 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 中划去 a_1 所在的行和列后，剩下的元素保持原来的位置关系而组成的行列式，$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 叫做元素 a_1 的余子式. 把余子式添上相应的符号，如 $A_1=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 叫做元素 a_1 的代数余子式，第 i 行第 j 列(i、$j=1$、2、3)元素的代数余子式的符号是$(-1)^{i+j}$.

三阶行列式可以按其任意一行(或一列)展开成该行(或该列)元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 这种降阶的方法，一方面可以简化计算，另一方面还可以推广到 n 阶行列式的运算.

以(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x_3,y_3)为顶点的三角形面积等于 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 的绝对值. 若面积为零，则三

点共线.

解 (1) 元素 b^2 的余子式是 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix}$，代数余子式 $B_3=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix}$；

(2) 原式 $=a^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix}-b^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix}+c^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$

$$=a^2(c-b)-b^2(c-a)+c^2(b-a)$$

$$=a^2(c-b)-b^2(c-b+b-a)+c^2(b-a)$$

$$=(c-b)(a^2-b^2)-(b^2-c^2)(b-a)$$

$$=(a-b)(b-c)(-a-b+b+c)$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a);$$

(3) 由 a、b、c 都是整数，可知行列式的值能被 $(a-b)$ 整除；

(4) 由(3)知：当 a、b、c 互不相等时，$\triangle ABC$ 的面积不等于零，即此时能构成三角形.

例 3 已知关于 x、y、z 的方程组：$\begin{cases} kx+y+6z=1, \\ x+ky+2kz=1, \\ x+y+kz=1. \end{cases}$

(1) 试求出 k 的值，使得方程组有唯一解；

(2) 写出方程组的唯一解.

分析 三元线性方程组解的讨论，是本节的难点. 教材仅要求就唯一解情况给出方程组的解，对于 $D=0$ 情况下，方程组何时有无穷多组解，何时无解，不做详细讨论.

唯一解公式是利用代数余子式或对角线法则展开得出的，学习中要掌握这种解方程组的基本思想和方法，知道它可以推广到一般线性方程组.

解 ∵ $D=\begin{vmatrix} k & 1 & 6 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=k^3-2k^2-5k+6=(k-1)(k+2)(k-3)$.

(1) 当 $D\neq 0$，即 $k\neq 1$，$k\neq -2$，且 $k\neq 3$ 时，方程组有唯一解；

(2) 在(1)的条件下，

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=k^2-7k+6=(k-1)(k-6),$$

$$D_y=\begin{vmatrix} k & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2k \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}=-k^2+k=k(1-k),$$

$$D_z=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=k^2-2k+1=(k-1)^2.$$

所以当 $k\neq 1$，$k\neq -2$ 且 $k\neq 3$ 时，方程组有唯一解：

$$\begin{cases} x = \dfrac{k-6}{(k+2)(k-3)}, \\ y = \dfrac{k}{(k+2)(3-k)}, \\ z = \dfrac{k-1}{(k+2)(k-3)}. \end{cases}$$

思维误区

例 4 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

错解 利用对角线法则展开得行列式的值为 0.

分析 行列式初步学习中,应了解对角线法则只适用于二、三阶行列式的计算. 四阶以上的行列式计算,目前我们可以通过代数余子式等方法降阶运算.

正解 原式$=1\times(-1)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}+0\times(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$+3\times(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}+0\times(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=5.$$

方法指导

三点共线的充要条件的应用.

例 5 设$\{a_n\}$是等差数列,p、q、$r\in\mathbf{N}$,试求 $\begin{vmatrix} p & a_p & 1 \\ q & a_q & 1 \\ r & a_r & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

分析 用行列式符号识记几何中的一些结论,形式简捷,便于记忆,如三点共线的充要条件等. 学习中,可以借此机会,复习所学的知识.

解 由等差数列的通项公式,得

$$a_n = nd + a_1 - d.$$

因此,(n,a_n)是直线

$$y = dx + a_1 - d$$

上的点,于是由三点(p,a_p)、(q,a_q)、(r,a_r)共线的充要条件,得 $\begin{vmatrix} p & a_p & 1 \\ q & a_q & 1 \\ r & a_r & 1 \end{vmatrix}=0$.

请你思考

在$\triangle ABC$中已知 $\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & 0 \\ \cos B & \cos A & 0 \\ \sin C & \sin B & 1 \end{vmatrix}=0$,试确定三角形形状.

随 堂 应 用

应用一　三阶行列式(一)

1. 方程$\begin{vmatrix} 12 & 18 & 24 \\ 75 & 81 & 87 \\ 123 & x & 135 \end{vmatrix}=0$的解是________.

2. 求解下列方程或不等式：

(1) $\begin{vmatrix} x & 1 & \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{x} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=0$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & \lg x \\ 0 & 1 & 1 \\ \lg x & -3 & \lg x \end{vmatrix}>0$.

3. 在$\triangle ABC$中，$\begin{vmatrix} \tan A & 1 & 1 \\ 1 & \tan B & 1 \\ 1 & 1 & \tan C \end{vmatrix}$的值为________.

4. 不等式$\begin{vmatrix} \lg x & 0 & 1 \\ \lg^2 x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}<0$的解集是________.

5. 若(a,b)满足$\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$，则$2^a+4^b$的最小值是__________.

应用二　三阶行列式(二)

1. 若方程组$\begin{cases} 2x+y-4=0, \\ 3kx+4y-6=0, \\ x-y-2=0 \end{cases}$有唯一解，则实数$k$的值等于________.

2. 若$A(2,0)$、$B(-1,3)$、$C(k,k^2)$三点不能构成三角形，则k的值是________.

3. 方程组$\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x+3y+z=5, \\ x-3y+3z=12 \end{cases}$的解是_____.

4. 关于x、y、z的方程组$\begin{cases} \sin^2\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y+z=1, \\ \cos^2\theta+\cos\theta\cdot y+z=3, \\ a^2x+ay+z=2.\ (a>1) \end{cases}$有唯一解的充要条件是________.

5. 已知$k<0$，且$\triangle ABC$的顶点为$A(0,0)$、$B(2-k,0)$、$C\left(0,1-\dfrac{2}{k}\right)$，试求三角形面积的最小值及相应的$k$的值.