21世纪 高等学校本科数学规划教材

概率论与数理统计

Probability and Mathematical Statistics

東北大學出版社
Northeastern University Press

21世纪高等学校本科数学规划教材

概率论与数理统计

Probability and Mathematical Statistics

东北大学出版社

·沈 阳·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 /崔文善，邵新慧，黄己立 主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2006.8
（21 世纪高等学校本科数学规划教材）

ISBN 7-81102-288-5

Ⅰ．概…　Ⅱ．①崔…　②邵…　③黄…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教材　②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 096710 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：184mm×260mm
印　　张：9.5
字　　数：250 千字
出版时间：2006 年 8 月第 1 版
印刷时间：2006 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：孟　颖　刘宗玉　　　　责任校对：张淑萍
封面设计：唐敏智　　　　　　　　责任出版：秦　力

定　　价：15.00 元

前　言

进入 21 世纪以来，我国的高等教育有了突飞猛进的发展，教材建设也取得了长足的进步．目前，科学技术日新月异，随着计算机的广泛应用及数学软件的普及，世界已全面进入信息时代，这些无疑对基础课教材，特别是数学课教材提出了更新、更严格的要求．正是在这样一种形势下，我们在总结多年本科数学教学经验、探索本科数学教学发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上，编写出这本适于本科生各专业使用的概率论与数理统计教材．

本书依据教育部制订的“概率论与数理统计课程教学基本要求”编写而成，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了概率论与数理统计课程教学时数减少的趋势．本书具有以下特色：

第一，突出概率论与数理统计的基本思想和基本方法．突出基本思想和基本方法的目的在于让学生在学习过程中较好地了解各部分内容的内在联系，在总体上把握概率论与数理统计的思想方法；帮助学生掌握基本概念，理顺概念之间的联系，提高教学效果．在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会概率论与数理统计的本质和概率论与数理统计的价值．

第二，加强基本能力培养．本书的例题、习题较多，在解题方法方面有较深入的论述，其用意就是让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程，精通解题技巧，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的．

第三，贴近实际应用．本书对基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引出．例题和习题多采用一些在客观世界，即自然科学、工程技术领域、经济管理领域和日常生活中经常面临的现实问题，希望以此来提高学生学习概率论与数理统计的兴趣和利用概率论与数理统计知识解决实际问题的能力．

全书共分 8 章，包括随机事件与概率、随机变量及其概率分布、随机变量的联合概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计和假设检验等内容．各章后均配有习题，书后附有习题参考答案．

本书是多所院校合作的结晶，参加院校有（以校名首字笔画为序）：天津师范大学津沽学院、东北大学、东华理工学院长江学院、北京林业大学、北京化工大学北方学院、江西师范大学科学技术学院、安徽建筑工业学院、沈阳药科大学、青岛理工大学琴岛学院、莱阳农学院、浙江工商大学、湖北民族学院、新疆农业大学科学技术学院．

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不足之处，敬请读者不吝赐教．

作　者

2006 年 2 月

《概率论与数理统计》编写人员

主　　　编： 崔文善　邵新慧　黄己立

副　主　编： 李红军　金义明　胡忠盛

其他编写人员：（以姓氏笔画为序）

牛玉玲　朱素婷　李晓萍　沙依甫加玛丽
杨万必　张好治　费罗曼　蔡国华

目　　录

第一章　随机事件与概率

在自然界及人类的社会活动中，可以观察到各种现象．这些现象大体上可以分为两种类型：一类是确定性现象，例如电荷的排斥与吸引，一定气压下液体的沸腾温度等，即在一定条件下进行观察或试验，其结果是确定的，是人们可以预知的；另一类现象则是不确定现象，人们在未作观察或试验之前，并不能预知其结果．例如抛掷一枚硬币，不能预知向上的是正面还是反面．但当对这些不确定现象进行大量、重复的观察后，会发现其结果具有一定的统计规律性．将这种在每次试验中呈现不确定性，而在大量重复试验中又呈现某种统计规律性的现象称为随机现象．概率统计就是研究随机现象及其统计规律性的一门学科，在自然科学及社会科学的诸多领域具有广泛的应用．

第一节　基本概念

一、随机试验

为了研究随机现象，人们通常要进行大量的观察、试验．将具有以下特点的试验称为随机试验：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验结果是可观察的，所有可能的结果是明确的；

(3) 每次试验之前不能确定会出现哪种结果．

随机试验的一个可能的结果称为样本点或基本事件，记作 ω；随机试验的所有可能的结果称为样本空间，记作 Ω．

例 1.1　抛掷一枚骰子观察所出现的点数．可能出现的结果为 1，2，3，4，5，6，则 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$．

例 1.2　记录某电话传呼台 1h 内收到的呼叫数．可能的结果是 0，1，2，…；$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$．

例 1.3　观察一只灯泡的使用寿命．可能出现的结果可以是任一非负实数，$\Omega=[0, \infty)$．

二、随机事件

在随机试验中，人们除了关心试验的结果本身外，往往还关心试验的结果是否具备某一指定的可观察的特征，将这一可观察的特征称为一个随机事件，简称事件，通常用 A，B，…表示．例如在例 1.1 中，若以 A 表示“得到的为偶数点”，则 $A=\{2, 4, 6\}$，B 表示“得到的点数大于 3”，则 $B=\{4, 5, 6\}$．这里 A，B 均为随机事件，它们都是由 Ω 中若干个样本点构成的．

因此，准确地讲，随机事件是由若干个样本点组成的集合，或说是样本空间的某个子集．若某个事件 A 发生，当且仅当该事件所包含的某个样本点出现．

由一个样本点组成的事件，称为基本事件．在随机试验中，人们往往关心的是一些较复

杂的结果，如上述分析中出现的事件 $A=\{2, 4, 6\}$，$B=\{4, 5, 6\}$. 这些结果包含了多个样本点，相对于基本事件，把它们称为复合事件.

把样本空间 Ω 也作为一个事件，因为在每次试验中 Ω 必然发生，常称 Ω 为必然事件. 类似地，把空集 $\varnothing$ 也作为一个事件，它在每次试验中都不会发生，称为不可能事件.

三、事件的运算及运算律

随机事件是一个集合，因此事件之间的关系及运算可以按集合论中的知识处理.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生，则导致事件 B 发生，即 A 中的每一个样本点均属于B，称 B 包含A，记作 $A\subset B$. 若 $A\subset B$，且 $B\supset A$，则称 A 与B 相等，记作 $A=B$.

2. 事件的和(或并)

"事件 A 与B 至少有一个发生"这一事件称为事件 A 与B 的和(或并)，记作 $A\cup B$.

一般地，n 个事件A_1，A_2，…，A_n 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；可列个事件 A_1，A_2，… 的和事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，它们均表示所列诸事件中至少有一个发生.

3. 事件的交(或积)

"事件 A 和B 同时发生"这一事件称为事件 A 与B 的交(或积)，记作 AB.

一般地，n 个事件A_1，A_2，…，A_n 的交事件记为$A_1A_2\cdots A_n$；可列个事件 A_1，A_2，… 的交记为 $A_1A_2\cdots$，它们均表示所列诸事件全都同时发生.

4. 事件的差

"事件 A 发生而B 不发生" 这一事件称为事件 A 与B 的差,记作 $A-B$.

5. 互斥(互不相容)事件

若事件 A 与B 不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$，称事件 A 与B 是互不相容事件.

6. 互逆(对立)事件

对于事件 A 与B,若 $AB=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$，称 A 与B 为互逆事件，此时称 B 为A 的逆事件，记作 $\overline{A}$，称作"非 A"，表示 A 不发生. 此时显然有 $B=\overline{A}$，$A=\overline{B}$，于是有

$$A\overline{A}=\varnothing,\ A\cup\overline{A}=U,\ \overline{\overline{A}}=A.$$

7. 事件的运算律

与集合的运算类似，事件也有相应的运算律：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A(BC)=(AB)C$；

(3) 分配律　$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$,$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$；

(4) 德·摩尔根定律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这些运算律均可以推广到有限个和可列个事件的情形.

上述关于事件的各种关系与运算可直观地用图形(文氏图)来表示(见图 1.1).

另外,事件之间的关系及其运算与集合论中集合之间的关系与运算是一致的. 表 1.1 给出了两者之间的对应关系.

例 1.4　将下列事件用事件 A，B，C 表示出来.

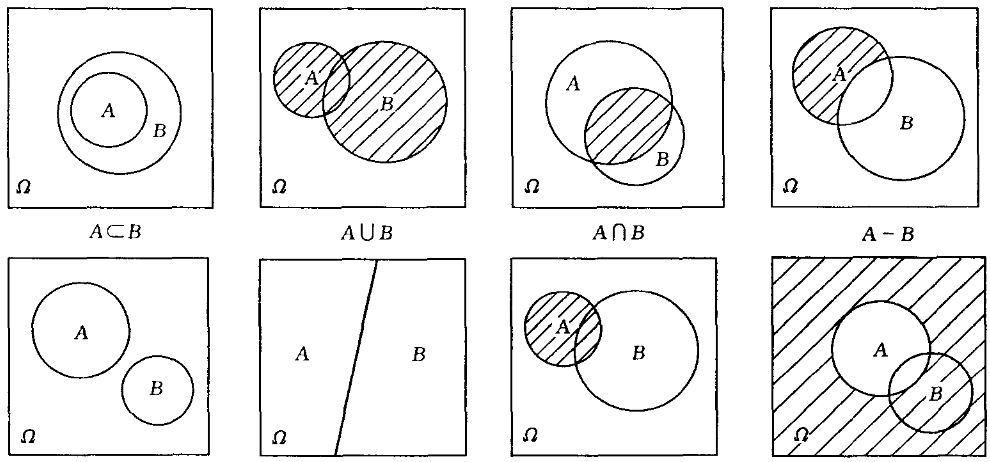
(1) 3 个事件中至少有 1 个发生　$A\cup B\cup C$；

(2) 3 个事件中只有 A 发生　$A\overline{B}\overline{C}$；

(3) 3 个事件中恰好有 2 个事件发生　$(AB\bar{C})\cup(A\bar{B}C)\cup(\bar{A}BC)$;

(4) 3 个事件中至少有 2 个事件发生　$(ABC)\cup(AB\bar{C})\cup(A\bar{B}C)\cup(\bar{A}BC)$;

(5) 3 个事件中不多于 1 个事件发生　$(\bar{A}\bar{B}\bar{C})\cup(A\bar{B}\bar{C})\cup(\bar{A}B\bar{C})\cup(\bar{A}\bar{B}C)$.



$A\subset B$　　$A\cup B$　　$A\cap B$　　$A-B$

A 与 B 互不相容(互斥)　　A 与 B 互逆　　A　　$\bar{A}$

图 1.1

表 1.1

记　号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	事件	子集
$\bar{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A\subset B$	A 发生导致 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	A 与 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	A 与 B 至少有一个发生	A 与 B 的和集
AB	A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	A 发生而 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	A 与 B 是互斥的	A 与 B 无相同元素

例 1.5　在掷骰子的试验中，A 表示“点数不大于 4”，B 表示“出现偶数点”，C 表示“出现奇数点”，试写出如下事件中的样本点：$A\cup B$，AB，$B-A$，$A-B$，$\overline{B\cup C}$，$(A\cup B)C$.

解　由题意知

$$A=\{1,2,3,4\},\ B=\{2,4,6\},\ C=\{1,3,5\},$$

则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,6\};$$
$$A\cap B=\{2,4\};$$

$B-A=\{6\}$;

$A-B=\{1, 3\}$;

$\overline{B\cup C}=\overline{B}\cdot\overline{C}=\varnothing$;

$(A\cup B)C=\{1, 2, 3, 4, 6\}\cdot\{1, 3, 5\}=\{1, 3\}$.

四、概率的定义及其性质

1. 概率的定义

简单地说，概率是用来描述随机事件发生可能性大小的. 在概率论发展的历史上，关于概率的定义有很多，本节只介绍其中的两种.

(1) 概率的统计定义

在 n 次重复试验中，事件 A 出现的次数记作 $n(A)$，设 $f_n(A)=\dfrac{n(A)}{n}$，显然 $f_n(A)$是事件 A 出现的频率. 当试验重复次数 n 增加时，频率 $f_n(A)$在某一常数 p 附近摆动，n 越大，摆动幅度越小，将频率的这个稳定值 p 称为事件A 的概率，记作

$$P(A)=p.$$

概率的统计定义非常直观地解释了事件概率的含义，但是在现实生活中，人们无法把一个试验无限次地重复下去，因此用此定义求某一事件的概率十分困难. 于是就有了概率的古典定义、几何定义和主观定义等. 这些定义分别适用于某一类随机现象. 那么如何给出适用于一切随机现象的概率的一般定义呢? 1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫首次提出了概率的公理化定义. 这一公理化体系迅速得到举世公认，是概率论发展史上的一个里程碑.

(2) 概率的公理化定义

定义 1.1 设 Ω 为一个样本空间，A 是其中的任意一个事件，与 A 对应的一个实数 $P(A)$如果满足：

(ⅰ) $P(A)\geqslant 0$; (1.1)

(ⅱ) $P(\Omega)=1$; (1.2)

(ⅲ) 若 A_1, A_2, …互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing$ ($i\neq j$; i, $j=1, 2, \cdots$)，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1.3}$$

成立，称 $P(A)$为事件 A 的概率.

由概率的公理化定义可推出概率的其他性质.

2. 概率的基本性质

定理 1.1 设 $P(A)$表示事件 A 的概率，则

(ⅰ) $P(\varnothing)=0$; (1.4)

(ⅱ) 若 A_1, A_2, …, A_n 互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing$ ($i\neq j$; i, $j=1, 2, \cdots, n$)，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i); \tag{1.5}$$

(ⅲ) 对任意两事件 A, B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.6}$$

证 (ⅰ) 因 $\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$，由式(1.3)，有

$$P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots,$$

再由式(1.1)，即可推出 $P(\varnothing)=0$.

(ⅱ) $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots)$,
由式(1.3)及(1.4)即可推出

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(ⅲ) 由于 $A\cup B=A\cup B\bar{A}$，且 $A\cdot(B\bar{A})=\varnothing$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B\bar{A}). \tag{1.7}$$

但
$$B=BA\cup B\bar{A},\ (BA)\cdot(B\bar{A})=\varnothing,$$
故
$$P(B)=P(BA)+P(B\bar{A}). \tag{1.8}$$

将式(1.8)代入(1.7)即可推出式(1.6)成立.

推论 1.1　对任意两个事件 A 与 B，$A\supset B$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(B),\ P(A)\geqslant P(B). \tag{1.9}$$

证　由 $A\supset B$，知 $A=B\cup(A-B)$，$B(A-B)=\varnothing$.

由式(1.5)知 $P(A)=P(B)+P(A-B)$，则式(1.9)前一等式得证. 再由前式及 $P(A-B)\geqslant 0$，即得式(1.9)的后式.

推论 1.2　对任意事件 A，有

$$P(\bar{A})=1-P(A). \tag{1.10}$$

证　因 $\Omega=A\cup\bar{A}$，$A\bar{A}=\varnothing$，由式(1.2)及(1.5)知

$$1=P(\Omega)=P(A)+P(\bar{A}),$$

即证得式(1.10).

推论 1.3　(一般加法公式)对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.11}$$

证　当 $n=2$ 时，式(1.11)即是式(1.6)，一般情况可用数学归纳法证明.

由概率定义推出的概率的基本性质在概率计算中起重要作用.

例 1.6　已知 $P(\bar{A})=0.5$，$P(\bar{A}B)=0.2$，$P(B)=0.4$，求(1) $P(AB)$;(2) $P(A-B)$;(3) $P(A\cup B)$;(4) $P(\bar{A}\bar{B})$.

解　(1) 由于 $AB\cup\bar{A}B=B$，且$(AB)(\bar{A}B)=\varnothing$，由定理 1.1 中的(ⅱ)知

$$P(AB)+P(\bar{A}B)=P(B),$$

于是

$$P(AB)=P(B)-P(\bar{A}B)=0.4-0.2=0.2;$$

(2) $P(\bar{A})=0.5$，故 $P(A)=0.5$，由于 $A=(AB)\cup(A-B)$，且 AB 与 $A-B$ 互斥，故

$$P(A)=P(AB)+P(A-B)$$

所以
$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3;$$

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7$;

(4) $P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$.

第二节　古典概型和几何概型

一、古典概型

概率的公理化定义给出了概率的严格的数学定义，但在处理实际问题时，按照此定义很难求出相应的概率值．在本节，介绍一类特殊情形——古典概型，它是一类最简单的概率模型，因为简单，曾经是概率论早期发展阶段的主要研究对象，也正因为如此，而今被称为“古典概型”．

定义 1.2　将满足如下两个条件的概率模型称为古典概型：

(1) 随机试验的样本空间只含有有限个样本点；

(2) 每一个样本点发生的可能性相同．

定理 1.2　在古典概型中，设样本空间 Ω 中有 n 个样本点，A 是 Ω 中事件且 A 中有 k 个样本点，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}. \tag{1.12}$$

证　设 $\Omega=\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$，由古典概型定义可知 $P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})$．另外各样本点之间是两两互斥的，于是有

$$1=P(\Omega)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\}\right)=\sum_{i=1}^{n}P(\{\omega_i\})=nP(\{\omega_i\}),$$

即得

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由于 A 含有 k 个样本点，不妨设 $A=\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_n}\}$，则

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{\omega_{i_j}\})=\frac{k}{n}.$$

例 1.7　一个袋子中装有 10 个大小相同的球，其中 3 个黑球，7 个白球，求

(1) 从袋子中任取一球，这个球是黑球的概率；

(2) 从袋子中任取两球，刚好 1 个白球 1 个黑球的概率以及 2 个球全是白球的概率．

解　(1) 从试验的叙述可知，这是一个古典概型，且从 10 个球中任取 1 个，共有 C_{10}^1 种取法．由于 10 个球中有 3 个是黑球，取到黑球的取法共有 C_3^1 种，设事件 A 表示“取到的球是黑球”，则

$$P(A)=\frac{C_3^1}{C_{10}^1}=\frac{3}{10}.$$

(2) 10 个球中任取 2 球，共 C_{10}^2 种取法，其中有 1 个白球、1 个黑球的取法是 $C_3^1\cdot C_7^1$ 种，两个球均是白球的取法是 C_7^2 种．设 B 表示“刚好取到 1 个白球、1 个黑球”，C 表示“2 个球均是白球”，则

$$P(B)=\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15},$$

$$P(C)=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}.$$

例 1.8 某单位新录用了 15 名工作人员，其中有 3 名女士. 将他们随机地平均分到 3 个科室，问

(1) 每一个科室恰好分到一名女士的概率是多少?

(2) 3 名女士分到同一科室的概率是多少?

解 由已知可知，样本空间中样本点总数 $n=C_{15}^5C_{10}^5C_5^5=15!/(5!)^3$. 设 A 表示“每一个科室恰好分到一名女士”，B 表示“3 名女士分到同一科室”.

(1) 将 3 名女士平均分配的分法为 $A_3^3=3!$ 种，其余 12 名人员的分法为 $12!/(4!)^3$，所以

$$P(A)=\frac{3!\cdot 12!/(4!)^3}{15!/(5!)^3}=\frac{25}{91};$$

(2) 将 3 名女士分到同一科室共有 $C_3^1=3$ 种，其余 12 名人员的分法为 $12!/(2!5!5!)$种，所以

$$P(B)=\frac{3\cdot 12!/(2!5!5!)}{15!/(5!)^3}=\frac{6}{91}.$$

例 1.9 将 3 个球随机地放在 4 个杯子中，求杯中球的最多个数分别为 1，2，3 的概率.

解 设 A 表示“杯中球的最多个数为 1”，B 表示“杯中球的最多个数为 2”，C 表示“杯中球的最多个数为 3”. 样本空间所含样本点数为 4^3 个，最多个数为 1，事件所含样本点数为 P_4^3，所以

$$P(A)=\frac{P_4^3}{4^3}=\frac{3}{8}.$$

最多个数为 3，则有利事件数为 C_4^1，所以

$$P(B)=\frac{C_4^1}{4^3}=\frac{1}{16};$$

最多个数为 2 的概率可利用式(1.10)求得，即

$$P(C)=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}.$$

例 1.10 某班有 10 名学生是同一年出生的(这年按 365 天计算)，试求下列事件的概率:

(1) 至少有两人是同一天出生的;

(2) 至少有一人是 10 月 1 日出生的.

解 (1) 利用逆事件概率的性质来求. 样本空间样本点总数为 365^{10}，没有 2 个人是同一天出生的事件数为 P_{365}^{10}，设 A 表示“至少有两人是同一天出生的”，所以

$$P(A)=1-\frac{P_{365}^{10}}{365^{10}};$$

(2) 没有人在 10 月 1 日出生的事件数为 364^{10}，设 B 表示“至少有一人是 10 月 1 日出生的”，所以

$$P(B)=1-\frac{364^{10}}{365^{10}}.$$

例 1.11 从 5 双不同的手套中任取 4 只，试问其中至少有 2 只配成一双的概率多大?

解 随机试验为从 10 只手套中任取 4 只，故 Ω 共有 C_{10}^4个样本点.

设 A 表示“至少有 2 只配成一双”，则事件 $\overline{A}$ 表示“取出 4 只全不配对”. 为了计算 $\overline{A}$ 中所含样本点的个数，先从 5 双中任取 4 双，共有 C_5^4 种取法，再从取出的每双中各取 1 只. 由于在每双中取 1 只共有 C_2^1 种取法，故共有 $C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1=2^4$ 种取法，所以 $\overline{A}$ 中共有样本

点数为 $C_5^4\cdot 2^4$ 个，于是

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_5^4\cdot 2^4}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

例 1.12 在 0～9 等 10 个整数中无重复地任意取 4 个数字，试求所取到的 4 个数字能组成四位偶数的概率.

解 $\Omega=\{$从 10 个数字中任取 4 个进行排列$\}$，它含有 P_{10}^4个样本点.

设 A＝{排成的是四位偶数}. 下面分析事件 A 中所含的样本点数：先从 0，2，4，6，8 等 5 个偶数中任取 1 个放在个位，有 P_5^1 种排法，然后从剩下的 9 个数字中任取 3 个排到剩余的 3 个位置，有 P_9^3 种排法，故个位上是偶数的排法共 $P_5^1\times P_9^3$ 种. 但其中包含“0”位于千位上的情况，故应从总体中排除此种情况的排列数：$P_1^1\times P_4^1\times P_8^2$（“0”排在千位上，有 P_1^1 种，剩下的 4 个偶数任选一个排在个位上，再从剩下的 8 个数字中任选两个排在十位及百位上），故事件 A 共含有 $P_5^1\times P_9^3-P_1^1\times P_4^1\times P_8^2=56\times 41$ 个样本点，所以

$$P(A)=\frac{56\times 41}{P_{10}^4}=\frac{41}{90}\approx 0.455\,6.$$

例 1.13 从 1～100 等 100 个整数中任取 1 个，试求取到的整数能被 6 或 8 整除的概率.

解 Ω 表示从 100 个整数中任取 1 个，则共含 100 个样本点.

设$A=\{$取到的整数能被 6 整除$\}$；$B=\{$取到的整数能被 8 整数$\}$.

考查 A，设 100 个整数中有 x 个数能被 6 整除，则

$$6x\leqslant 100,$$

所以

$$x=16,$$

即 A 中含 16 个样本点. 同理 B 中含 12 个样本点.

再考查 AB，类似分析有 $24y\leqslant 100$，所以

$$y=4,$$

即 AB 含有 4 个样本点.

所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{16}{100}+\frac{12}{100}-\frac{4}{100}=0.24.$$

二、几何概型

古典概型是处理样本空间含有有限个样本点的概率概型. 本节将考查样本空间为一个线段、平面区域或空间立体等的等可能随机试验的概率模型，这种模型一般是采用几何的方法求解，故将其称为几何概型.

先看几个简单的例子.

例 1.14 某人午觉醒来，发现表停了，他打开收音机，想听电台报时，设电台每个整点报时一次，求他等待时间短于 10min 的概率.

因电台每隔 1h 报时一次，自然可以认为这个人打开收音机时处于两次报时之间，例如 (13:00，14:00)，而且取各点的可能性是一样的，要遇到等待时间短于 10min，只有当他打开收音机的时间正好处于 13:50 至 14:00 之间才有可能，故相应的概率为$\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$.

例 1.15 如果汽车每 5min 到达车站一次，某人随机地来到此车站，假设汽车均是准点到达，求该人候车时间不超过 2min 的概率.

由于乘客来到车站的时间具有随机性，可以认为在 0～5min 期间的各点被选中的可能性均是一样的，故相应的概率为$\frac{2}{5}$.

例 1.16　在 500mL 自来水中有一个大肠杆菌，今从中随机取出 2mL 水样放到显微镜下观察，求发现大肠杆菌的概率.

由于取水样的随机性，所求概率等于水样的体积与总体积之比$\frac{2}{400}$.

总之，在这类问题中，试验的可能结果是某区域 Ω 中的一个点. 这个区域可以是一维的，也可以是二维的，还可以是三维的，甚至可以是 n 维的，这时不管是可能结果全体或是所关心的结果均是无限的. 因而等可能性是通过下列方式给出其确切含义的：点落在某区域 Ω 中任意区域 A 的可能性大小与区域 A 的度量(长度、面积和体积等)成正比，而与其位置及形状是无关的. 即

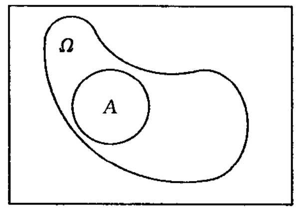


图 1.2

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}}.$$

值得指出的是，若在一个线段投点，上述定义中的度量指的是线段的长度；若在一个平面区域上投点，度量指的是区域的面积；若在一个空间立体上投点，度量指的是体积.

例 1.17(会面问题)　两人相约 7:00 到 8:00 在某地会面，先到者等候另一人 20min，过时就可离去，试求这两人能会面的概率.

解　记 7:00 为计算时刻的 0 时，以 min 为单位，并设 x 及 y 分别表示甲、乙两人到达会面地点的时刻，由题意知样本空间为

$$\Omega=\{(x,\ y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60\}.$$

以 A 表示“两人能会面”，由图 1.3 分析知

$$A=\{(x,\ y)\,|\,(x,\ y)\in\Omega\quad\text{且}\quad |x-y|\leqslant 20\}.$$

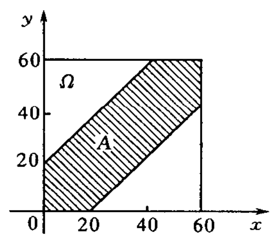


图 1.3

根据题意知 Ω 和 A 均表示平面上的某个区域，故是一个几何概型问题，于是

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

第三节　条件概率与独立性

一、条件概率的定义

在很多实际问题中，常常会遇到在“事件 B 发生”的条件下求事件 A 发生的概率问题，这样的概率称为条件概率，记为 $P(A|B)$.

由于事件 B 的发生或多或少对事件 A 都有所影响，所以一般情况下 $P(A|B)$与 $P(A)$ 并不相等.

例 1.18　甲乙两台机床生产同一种零件，共 100 个，质量情况如下：甲机床生产了 40 个，其中有 5 个次品；乙机床生产了 60 个，其中有 10 个次品. 现从这批零件中任取一个进行检验，求取出的零件是甲机床生产的概率；若已知取出的是正品，求是甲机床生产的概率.

解　设 A 表示“取出零件是甲机床生产的”，B 表示“取出的零件是正品”，则