普通高等教育规划教材

组合数学

◆ 殷剑宏 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育规划教材

组合数学

殷剑宏　编著

机械工业出版社

本书以组合计数问题为重点，介绍了组合数学的基本原理与思想方法，内容包括基本计数问题、生成函数、递推关系、容斥原理、Pólya 计数、组合设计与编码等。本书取材侧重于体现组合数学在计算机科学，特别是算法分析领域中的应用。每章都精选了适量例题与习题，并在书末附有部分习题解答。

本书可用作高等学校计算机、数学、信息安全、电子、通信等专业高年级本科生教材，也可供相关专业教学、科研和工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

组合数学/殷剑宏编著. —北京：机械工业出版社，2006.1
普通高等教育规划教材
ISBN 7-111-18167-0

Ⅰ.组… Ⅱ.殷… Ⅲ.组合数学—高等学校—教材
Ⅳ.O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 154097 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
策划编辑:苏颖杰　责任编辑:苏颖杰　版式设计:霍永明
责任校对:王　欣　封面设计:张　静　责任印制:李　妍
北京中兴印刷有限公司印刷
2006 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
850mm×1168mm 1/32 · 10 印张 · 266 千字
定价：17.00 元

前　言

组合数学是一门古老的学科。公元1666年，天才数学家、计算机先驱莱布尼兹为它起名为“组合学”(Combinatorics)，并预言了这一数学分支的诞生。如今，组合数学的思想和技巧不仅影响着数学的许多分支，而且广泛地应用于自然、社会的几乎所有学科领域。特别是其枚举与计数思想、算法分析理论、编码技术等对计算机科学尤为重要。同时，计算机科学的迅速发展，又为组合数学的崛起注入了生机与活力。因此，国内外越来越多的高校，纷纷把组合数学列为计算机、数学、信息安全、电子、通信等众多专业的核心课程。

我们知道，算法研究是计算机科学的核心，而算法分析却需要更多的组合数学思想。为此，本书前5章以组合计数问题为重点，详细介绍了组合数学的基本原理与思想方法，对许多理论及方法进行了初等描述，同时对生成函数、递推关系、Pólya计数等抽象深奥的理论进行了巧妙处理，使不熟悉近世代数的读者，只需要预先学习第5.1～5.4节及第6.1节，便可轻松地进行本书的系统学习与研究。当然，具备较好的近世代数基础，对学习组合数学，将是如虎添翼、锦上添花。本书第6章对组合设计与编码做了简明介绍，使读者对该领域有初步了解。

本书充分展示了组合数学在研究离散量的结构和相互间关系方面的独到之处，在内容取材与安排上，各章之间既相互联系，具备教材的系统性和科学性，同时各章又相对独立，自成体系，体现了既便于学生学习又便于教师教学的思想。另外，每章都精选了适量例题与习题，书末附有习题部分解答。读者在认真解题的过程中，不仅能巩固基本概念和基本理论，提高自己组合分析

的能力，而且能充分享受组合数学的美妙与神奇。

本书全面贯彻了《中国计算机科学与技术学科教程2002》（简称CCC2002，由教育部评审）的指导思想，能在大纲规定的教学学时内达到“组合数学”课程的教学目标。同时，本书还全面贯彻了国务院学位委员会关于《同等学力人员申请硕士学位计算机科学与技术学科综合水平全国统一考试大纲及指南》的思想。

编　者

目　　录

第 1 章　基本计数问题

计数问题是组合数学中研究得最多的内容. 事实上,任何一门学科都要涉及计数问题. 尤其对于计算科学,计数问题更具有它特殊的意义. 我们知道,算法研究是计算机科学的核心. 而研究算法就要分析算法的时间复杂性和空间复杂性,即对算法所需的运算量和存储单元作出估计. 为此,我们先引入基本的计数技术. 这些方法几乎是所有计数技术的基础.

1.1　加法原则与乘法原则

1.1.1　加法原则

令 S 为给定的非空集合, $A=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$, 若

(1) $S_i\subseteq S, S_i\neq\varnothing, i=1,2,\cdots,n$;

(2) $S_i\cap S_j=\varnothing, i\neq j, i、j=1,2,\cdots,n$;

(3) $\bigcup_{i=1}^{n}S_i=S$.

则称 A 为集合 S 的**划分**,其中 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为该划分的**块**.

加法原则　设 $\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$ 为集合 S 的划分. 则 S 中元素的个数可以通过找出该划分的每一块中元素的个数来确定,我们把这些数相加,得到

$$|S|=|S_1|+|S_2|+\cdots+|S_n|$$

在应用加法原则时,我们通常先要描述性地定义块,即把问题分成互相排斥的若干情形,而这些情形包括了所有的可能. 应用加法原则的技巧就在于把要被计数的集合 S 划分成“不太多的易于

处理的部分".

加法原则还可叙述为:如果有 p 种方法能够从一堆物品中选择一个物品,而有 q 种方法也能够从另外一堆物品中选择一个物品,那么从这两堆中选择一个物品的方法共有 $p+q$ 种.这种形式的加法原则很容易推广到多于两堆的情况.

1.1.2 乘法原则

乘法原则 令 S 是 n 元组 $\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$ 的集合,其中第一个元素 a_1 有 r_1 种选择,第二个元素 a_2 有 r_2 种选择,…,第 n 个元素 a_n 有 r_n 种选择,则 S 中共有 $r_1\times r_2\times\cdots\times r_n$ 个元素.

乘法原则的第二种形式为:如果第一项任务有 p 个结果,而不论第一项任务的结果如何,第二项任务有 q 个结果,那么这两项任务连续执行就有 $p\times q$ 个结果.这种形式的乘法原则也很容易推广到 n 项任务连续执行的情形.

例 1 用 a,b,c,d,e,f 构成三字母串,允许字母重复且包含字母 e,共能构成多少个?

解 把所有满足要求的三字母串分成如下三类:

(1) 第一位置为 e,即形如 e□□,由乘法原则,共有 $6\times6=36$ 个.

(2) 第二位置为 e,即形如□e□,为与(1) 不同,第一位置不能取 e,由乘法原则,有 $5\times6=30$ 个.

(3) 第三位置为 e,即形如□□e,为与(1) 、(2) 不同,第一、二位均不能取 e,有 $5\times5=25$ 个.

综上分析,由加法原则知共有 $36+30+25=91$ 个满足题意要求的三字母串.

例 2 有 5 本不同的英文书,6 本不同的日文书和 8 本不同的中文书,从中取出两本书(不计次序) ,当这两本书是不同的语种时,有多少种不同的取法?

解 由题意可分成三类:

(1) 一本为英文书,一本为日文书,有 $5\times6=30$ 种取法;

(2) 一本为英文书,一本为中文书,有 $5\times8=40$ 种取法;

(3) 一本为日文书,一本为中文书,有 $6\times8=48$ 种取法.

再由加法原则,合乎题意的取法共有 $30+40+48=118$ 种.

例 3 有 5 个相同的苹果,8 个相同的橘子,从中选取任意个(非零),有多少种不同取法?

解 水果的一种取法可表示为序偶 $\langle a,b\rangle$,其中 a 为所取的苹果数,b 为所取的橘子数,而 $a=0,1,2,3,4,5$;$b=0,1,2,3,4,5,6,7,8$. 由乘法原则,有 $6\times9=54$ 种. 由于要求非零,故不选 $\langle 0,0\rangle$,因此满足题意要求的取法有 $54-1=53$ 种.

例 4 在 1000 到 9999 之间有多少个各位数字不同的奇数?

解 第一步,确定第四位数,第四位数可取 1,3,5,7,9 共五种选择;第二步,确定第一位数,由于第一位不能取 0,也不能取第四位已选定的数,所以有八种选择;第三步,确定第二位数,有八种选择;第四步,确定第三位数,有七种选择. 由乘法原则,满足题意的数共有 $5\times8\times8\times7=2240$ 个.

1.2 集合的排列与组合

定义 1.2.1 从 n 个元素的集合 S 中任取 r 个元素,按照一定的次序排成一列,称为 n 个元素集合 S 的 r **排列**. n 个元素集合 S 的 n 排列简称为 S 的**全排列**. n 个元素集合 S 的 r 排列的数目记作 P_n^r 或 $P(n,r)$.

显然,若 $r>n$,则 $P_n^r=0$;对每一正整数 n,$P_n^1=n$. 并规定对非负整数 n,$P_n^0=1$.

例如,若 $S=\{1,2,3\}$,则 S 的 3 个 1 排列是 1,2,3;S 的 6 个 2 排列是 12,13,21,23,31,32;S 的 6 个 3 排列是 123,132,213,231,312,321. 集合 S 没有 4 排列,因为 S 的元素个数少于 4.

定理 1.2.1 对于正整数 n 和 r,$r\leqslant n$,有

$$P_n^r=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$$

证明 在构造 n 个元素集合的一个 r 排列时,可以用 n 种方法选择第一项,不论第一项如何选出,都可以用 $n-1$ 种方法选择

第二项，…，不论前 $r-1$ 项如何选出，都可以用 $n-(r-1)$ 种方法选择第 r 项. 根据乘法原则，这 r 项可以用 $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$ 种方法选出. 证毕.

定义 $n!$（读作 n 的阶乘）为

$$n! = n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1$$

并约定 $0! = 1$，于是有

$$P_n^n = n!, P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

定义 1.2.2 从 n 个元素的集合 S 中任取 r 个元素，组成一个 S 的子集，称为 n 个元素集合 S 的 r **组合**. n 个元素集合 S 的 r 组合的数目记作 C_n^r 或 $C(n,r)$.

显然，若 $r>n$，有 $C_n^r=0$；若 $r>0$，有 $C_0^r=0$. 且容易看出，对非负整数 n，有 $C_n^0=1, C_n^1=n, C_n^n=1$. 特别地，规定 $C_0^0=1$.

比如，若 $S=\{1,2,3,4\}$，那么 $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$ 是 S 的 4 个 3 组合.

定理 1.2.2 若 $0\leqslant r\leqslant n$，r 和 n 为整数，则

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

证明 令 S 是一个 n 个元素的集合. S 的每个 r 排列都恰由下面的两个任务连续执行的结果而产生：

(1)从 S 中任选出 r 个元素；

(2)将所选出的 r 个元素以某种顺序排成一列.

执行第一个任务的方法数为 C_n^r，执行第二个任务的方法数则是 $P_r^r=r!$. 根据乘法原则，有 $P_n^r = r!\,C_n^r$. 而 $P_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$，因此得到

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

证毕.

推论 1.2.1 对于 $0\leqslant r\leqslant n$，r 和 n 为整数，有 $C_n^r = C_n^{n-r}$.

定理 1.2.3 有 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$（$n$ 为非负整

数).这个值等于 n 个元素集合的所有组合的总个数.

证明 n 个元素集合 S 的每一个组合是 S 对于 $r=0,1,2,\cdots,n$ 的一个 r 组合.由加法原则知,S 的所有组合的总个数为 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$.

也可以如下计算 S 的所有组合的总个数:

令 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.在选取 S 的一个组合时,对 n 个元素的每一个都有两个选择:x_1 要么在这个组合里,要么不在这个组合里;x_2 要么在这个组合里,要么不在这个组合里;…;x_n 要么在这个组合里,要么不在组合里.因此,由乘法原则,存在 2^n 种方法使得我们可以形成 S 的一个组合.使两种方法相等就完成了定理的证明.证毕.

定理1.2.3的证明是通过计数得到恒等式的一个例子.对同一个计数问题用两种不同的方法计数,然后令所得出的两个结果相等.这种"双计数"技术是组合数学中的一种强大方法.

例1 从7位女同学和4位男同学中选出4人,且至少有2位女同学,问有多少种选法?

解 按题意可分成三类:

(1)4人中2男2女,有 $C_4^2\times C_7^2=126$ 种;

(2)4人中1男3女,有 $C_4^1\times C_7^3=140$ 种;

(3)4人都是女同学,有 $C_7^4=35$ 种.

由加法原则,共有 $126+140+35=301$ 种符合题意的选取方法.

例2 将 a,b,c,d,e,f 进行全排列,问:

(1)字母 b 正好在字母 e 的左邻的排列有多少种?

(2)字母 b 在字母 e 的左边的排列有多少种?

解 (1)把 be 看作一个整体字符,满足题意的排列即为 $\{a,be,c,d,f\}$ 的全排列,故有 $5!$ 种排列.

(2)将 $\{a,b,c,d,e,f\}$ 的所有全排列分成如下两类:

$A=\{\square\square\cdots\square\mid 其中\ b\ 在\ e\ 的左边\}$

$B=\{\square\square\cdots\square\mid 其中\ b\ 在\ e\ 的右边\}$

定义函数 $f:A\to B$,且 $f(\cdots b\cdots e\cdots)=(\cdots e\cdots b\cdots)$,即 f 将

A 中的任一排列的 b 与 e 的位置互换,保持其余字母位置不变,得到 B 的一个排列. 显然 f 为双射(或一一对应函数),故 $|A|=|B|=\frac{1}{2}\times 6!$.

前面考虑的排列是在直线上进行,即 r **线排列**. 若在圆周上进行排列,即 r **圆排列**,其结果又如何呢?

将 r 个 r 线排列

$$
\begin{gathered}
a_1a_2\cdots a_{r-1}a_r\\
a_2a_3\cdots a_ra_1\\
\vdots\\
a_ra_1a_2\cdots a_{r-2}a_{r-1}
\end{gathered}
$$

的每一个按顺时针首尾相连围成圆排列,得到的是同一个 r 圆排列. 因此,有以下定理:

定理 1.2.4 n 个元素集合的 r 圆排列的个数由 $\frac{P_n^r}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\ r}$ 给出. 特别地, n 个元素的全圆排列的个数是 $(n-1)!$.

例 3 10 个人要围坐一圆桌,其中有两人不愿彼此挨着就坐. 共有多少循环座位排放方法?

解 用 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{10}$表示这 10 个人,其中 a_1,a_2 是彼此不愿意坐在一起的两个人. 考虑 9 个人 $b,a_3,\cdots,a_{10}$围坐圆桌的座位安排,共 8! 个这样的安排方法. 在每一种座位安排中都用 a_1,a_2 或 a_2,a_1 代替 b,就将得到 10 人的一种座位安排且 a_1,a_2 彼此挨着就坐. 因此,a_1,a_2 不坐在一起的座位安排方法总数为 $9!-2\times 8!=7\times 8!$.

以后,在不引起混淆的情况,仍将“线排列”简单说成“排列”.

1.3 重集的排列与组合

前面讨论的排列与组合,是指从 n 个互不相同元素的集合

里，每次取出 r 个互不相同的元素进行排列与组合．然而现实生活中，并不一定是对不同的元素进行排列与组合，为此，先引入重集的概念．

定义 1.3.1 元素可以多次重复出现的集合称为**重集**．元素 a 出现的次数叫做该元素的**重数**．

一般地，重集 S 表示为 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$，其中，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为 S 中 k 个不同类型的元素，$n_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为 a_i 的重数．n_i 是正整数，也可以是 ∞．若 a_i 的重数为 ∞，表示 S 中有无限多个 a_i．

重集 S 的一个 r 排列仍是 S 的 r 个元素的一个有序摆放．若 S 的元素总个数是 n（包括计算重复元素），那么 S 的 n 排列也可称为 S 的全排列．

重集 S 的 r 组合是 S 中的 r 个元素的一个无序选择．因此，S 的一个 r 组合本身就是重集 S 的一个子重集．如果 S 有 n 个元素，那么 S 只有一个 n 组合，即 S 自己．如果 S 含有 k 个不同类型的元素，那么就存在 S 的 k 个 1 组合．

定理 1.3.1 重集 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$ 的 r 排列的个数为 k^r．

证明 在构造 S 的一个 r 排列时，由于 S 的所有元素的重数都是无穷的，因而第一位有 k 种选择，第二位有 k 种选择，$\cdots$，第 r 位有 k 种选择．由乘法原则，S 的 r 排列的个数为 k^r．证毕．

定理 1.3.2 设重集 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$，且 S 的元素个数为 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，则 S 的全排列数为

$$P(n;n_1,n_2,\cdots,n_k)=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$$

证明 因为 S 中有 n_1 个 a_1，在 S 的全排列中要占据 n_1 个位置，这些位置的选法有 $C_n^{n_1}$ 种；再从剩下的 $n-n_1$ 个位置选择 n_2 个位置放置所有的 a_2，有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种选法；类似地，依次选择位置安排 $a_3,a_4,\cdots,a_k$，由乘法原则知，S 的全排列数为

$$
\begin{aligned}
&P(n;n_1,n_2,\cdots,n_k)\\
&=C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)\cdots C(n-n_1-n_2-\cdots\\
&\quad -n_{k-1},n_k)\\
&=\frac{n!}{n_1!\ (n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\ (n-n_1-n_2)!}\cdot\cdots\cdot\\
&\quad\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!\ 0!}\\
&=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}
\end{aligned}
$$

证毕.

定理 1.3.3 重集 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$ 的 r 组合的个数为 C_{k+r-1}^r.

证明 设 S 的一个 r 组合为 $M=\{x_1\cdot a_1,x_2\cdot a_2,\cdots,x_k\cdot a_k\}$, 且 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$. 显然, S 的 r 组合与方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的非负整数解构成一一对应关系. 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的一个非负整数解可表示成长为 $k-1+r$ 的二进制序列

$$\underbrace{11\cdots1}_{x_1\text{个}1}0\underbrace{11\cdots1}_{x_2\text{个}1}0\cdots0\underbrace{11\cdots1}_{x_k\text{个}1}$$

其中, 该序列中有 $k-1$ 个 0. 而该序列是重集 $\{(k-1)\cdot 0, r\cdot 1\}$ 的一个全排列, 故 S 的 r 组合的个数为 C_{k-1+r}^r. 证毕.

定理 1.3.4 设重集 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$, 要求 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 至少出现一次的 r 组合数为 C_{r-1}^{k-1}.

证明 在 S 的 r 组合中, $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 至少要出现一次, 所以 $r\geqslant k$. 设 S 的满足定理条件的任一 r 组合为 $\{x_1\cdot a_1,x_2\cdot a_2,\cdots,x_k\cdot a_k\}$, 则有

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=r,\text{且 } x_i\geqslant 1, x_i\text{ 为整数}(i=1,2,\cdots,k)$$

令 $y_i=x_i-1\ (1\leqslant i\leqslant k)$, 则

$$y_1+y_2+\cdots+y_k=r-k,\text{且 } y_i\text{ 为非负整数}$$

由定理 1.3.3 知, S 的满足定理条件的 r 组合的个数为 $C_{k-1+r-k}^{r-k}=C_{r-1}^{r-k}$. 证毕.

例 1 图 1.1 中，从(0,0)点水平和垂直道路可以走到(m,n)点，求从(0,0)点到(m,n)点的非降路径的条数. 其中 m 与 n 均为正整数.

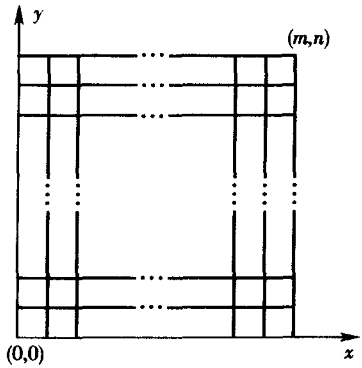

图 1.1

解 从(0,0)点到(m,n)点的非降路径，沿水平方向从左向右走一个单位距离记作 x，沿垂直方向从下向上走一个单位距离记作 y，那么该路径必含 m 个 x 和 n 个 y. 从而，一条路径对应着重集 $S=\{m\cdot x, n\cdot y\}$ 的一个全排列，即一共有 $P(m+n;m,n)=\dfrac{(m+n)!}{m!\ n!}$ 条非降路径.

例 2 设有 16 个字母，其中 a,b,c,d 各四个，从中任取 10 个字母，但每种字母至少取两个，能组成多少个不同的 10 排列？

解 满足题意的 10 排列可分成如下几类：

(1) 一个字母取 4 次，其余各取 2 次. 某一字母取 4 次时，有 $P(10;4,2,2,2)$ 种，共有 $C_4^1\times P(10;4,2,2,2)$ 种.

(2) 两个字母各取 3 次，其余各取 2 次. 某两字母各取 3 次时，有 $P(10;3,3,2,2)$ 种，共有 $C_4^2\times P(10;3,3,2,2)$ 种.

由加法原则，满足题意的 10 排列共有

$C_4^1\times P(10;4,2,2,2)+C_4^2\times P(10;3,3,2,2)=226800$ 个

例 3 已知重集 $S=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c\}$，从 S 中取出 10 个