十五

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

数学建模案例集

杨启帆　李浙宁
王聚丰　涂黎晖　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

数学建模案例集

教育科学“十五”国家规划课题研究成果

数学建模案例集

杨启帆　李浙宁
王聚丰　涂黎晖　编著

高等教育出版社

内容简介

本书内容共分为上、下两篇，上篇包含了我们挑选的 20 个数学建模案例，下篇则为 2003—2005 三年中浙江大学校内数学建模竞赛赛题的 6 篇参考论文。书中的案例有的是根据文献资料改编加工而成的，有的是根据我们自己的日常科研项目简化提炼出来的，也有的是在学生课外研究论文的基础之上改写而成的。全书涉及面广，大部分内容是我们在教改过程中自己动手撰写编著的。为了方便读者阅读理解，我们尽量采用了较为通俗易懂的叙述方式，对问题的背景知识也作了必要的介绍。

本书是为普通高等院校数学建模教学和学生数学建模竞赛培训编写的教学参考用书，可供学习数学建模的高校学生和对建模感兴趣的广大科技人员参考。书中各案例之间彼此独立，不存在任何内在联系，读者在使用时完全可以根据自己的兴趣随意挑选阅读。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模案例集/杨启帆 李浙宁 王聚丰 涂黎晖编著.—北京：高等教育出版社，2006.7

ISBN 7-04-019577-1

Ⅰ.数… Ⅱ.①杨…②李…③王…④涂… Ⅲ.数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 060113 号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 董达英 **封面设计** 张申申 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 张 岚 **责任校对** 金 辉 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京嘉实印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com

开 本	787×960 1/16	**版 次**	2006 年 7 月第 1 版
印 张	17.75	**印 次**	2006 年 7 月第 1 次印刷
字 数	330 000	**定 价**	20.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 19577-00

总　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心（以下简称“教研中心”）在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组（亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组）。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题。2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础，作为体现教学内容

和教学方法的知识载体，在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此，在课题研究过程中，各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果，并和教学实际结合起来，认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革，组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师，编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案，以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信，随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入，特别是随着教育部“高等学校教学质量和教学改革工程”的启动和实施，具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003年4月

前　言

改革开放以来，我国经济建设发生了史无前例的变化，科学技术成为第一生产力，GDP保持长期高速度增长，一个初步繁荣昌盛的新中国呈现在了世人的面前。国家建设需要大批创新性的研究型人才和创新性的应用型人才，作为国家建设人才培养基地的高等院校承担着为国家培养、输送各方面人才的重任，不应当只对学生传授书本知识，更重要的是要让他们学会如何应用书本知识，学会如何将在课堂中学到的知识转变为探索奥秘的武器。

会应用其实是一种本领、一种能力。知识和能力是相辅相成的，缺乏知识的能力是一种低层次的能力，而缺乏能力的知识则是一种僵死的知识。知识与能力缺一不可，缺少任一方面都不可能成为一个符合国家需求的创新型建设人才。传统的教学模式一般比较注重对学生的知识传授，但往往在一定程度上忽略了对学生能力的培养。为了加强对学生综合素质和创新能力的培养，多年来，我们在浙江大学开展教学改革，作为教学改革的突破口，我们对浙大学生及浙大的两个二级学院——浙江大学宁波理工学院和浙江大学城市学院的学生开展了各种形式的数学建模教学，并取得了显著的人才培养效益。我们开展的教改项目通过国家级鉴定并获得了国家级教学成果奖，开设的数学建模课被教育部授予首批国家级精品课程。2005年，我们编著的适用于重点院校理工类教学的"'十五'国家级规划教材"和适用于一般高校教学的"教育科学'十五'国家规划课题研究成果"教材《数学建模》相继出版，为我校数学建模教学改革打下了较好的基础。

数学建模教学不同于其他数学课程的教学，光靠老师讲课、学生听课是远远不够的，除了课堂教学以外，还需要学生在课外进行较多数量的、有一定难度的建模实践。数学建模教学涉及的面广，研究的课题可以来自自然科学、社会科学的各个领域，初学者往往把握不住研究方向，不知道应当从何处下手，因而也需要参考较多的书籍和文献资料。为了让学生能有更多的实践机会，除了让学生自行选择感兴趣的研究课题以外，我们也收集了一批较简单的课题，供学生挑选研究，本书就是在此基础上编写而成的。书中的建模实例大多散见于文献资料中，有些是教师为研讨班的教学需要而整理改写成的，有些是根据我们平时的科研项目简化提炼出来的、也有一些是在学生研究论文的基础上修改而成的。全书共分为上下两篇，上篇包含了我们在宁波理工学院使用过的部分数学建模参考案例（共20个），是我们举办研讨班的产物；下篇则是2003—2005年浙江大学

(含两个二级学院)学生数学建模竞赛的参考论文。需要特别强调的是,数学建模通常并无标准答案。书中的论文仅仅是论文作者对该研究课题的一己之见,未见得一定正确,更未见得是最好的解答。我们将其整理出版的目的有二:其一,是想为初学者提供一些学习建模的参考资料;其二,这些建模论文的观点和方法尚有不少可商榷之处,有些做得还不够好或还不够深入,希望能起到抛砖引玉的作用。顺便说明一下,下篇中的6篇论文(每题一篇)并不是我校学生数学建模竞赛的最佳论文(至少我们的看法是这样)。在编著本书时,出于方便,我们只是从少数提交了电子版的论文中挑选了几篇写得较好的,作了一些必要的整理修改。由于竞赛时间较短,我们不可能要求学生写出非常深入的文章。我们采用这些文章,其目的只是想为那些对我校竞赛题目有兴趣的读者提供一份参考材料而已。

本书是为了配合数学建模教学和学生数学建模竞赛培训而编著的一本参考用书,读者既可以将书中的文章当作案例来参考,也可以将文章提出的问题看成是数学建模的课题或竞赛题自行解答,解答完以后再来看文章,看看自己的解答是否比书中的解答更全面、更深入。坦诚地讲,对书中的许多文章我们并不十分满意,有些文章研究得较为肤浅(如上篇中的几个较简单的模型),有些文章研究的课题本身较难定量化研究,因而文章也写得较为平淡、使人感到新意不大(如“草原的命运”及2003年、2005年浙大竞赛A题等)。出过数模竞赛题的同志都知道,出一个好的数模竞赛题和挑选出一个好的科研项目一样困难,课题既要有较大的实际意义,又要有研究的拓展空间,从而有可能得到较好的研究成果。作为竞赛题,还要考虑到学生的实际水平,既不能太难、不能涉及面过广、专业性过强,又不能太容易,失去了课题研究的味道,变成了一道练习题。要编写出一本好的建模案例书也同样困难,假如读者认为本书有些文章还值得一读的话,我们出版本书的目的也就算是达到了。

顺便说明一下,本书是由4位编著者分头编写而成的,写完以后,李浙宁、杨启帆两位老师又各自通改了一遍。由于原始材料来源不同,文章编写者的风格也不尽相同,每篇文章在使用符号、书写习惯、描写手法上肯定有不少欠统一之处,望读者见谅。好在这些文章之间是完全独立的,即使存在差异也应当不至于影响到读者阅读本书。

鉴于编著者见识不广、学识有限,书中的不妥之处一定不少、错误也在所难免,欢迎同行及读者批评指正。

编著者

2006年2月于浙江大学宁波理工学院

郑 重 声 明

目　录

上　篇

（数学建模案例选）

下　篇

（2003—2005 年浙江大学数学建模竞赛赛题及参考答卷）

上　篇

（数学建模案例选）

案例1 奇妙的多项式

数学到底有什么用？很多人，尤其是很多学数学不多的人会有这个疑问．在这里不妨反问一下，要是没有用为什么还会有这么多人学习和研究数学呢？先看一个例子，数论，即关于自然数的理论，在很长一段时间里被一些人看成是没有实际应用价值，只有理论意义的数学，哥德巴赫猜想（每一个大于等于 6 的偶数总可以表示为两个奇素数的和，即所谓“1＋1”）有什么用？素数有无穷多个又有什么用？然而，随着科学技术的发展，数论也开始找到了它的用武之地，成为我们设计密码的工具（见密码学中的 RSA 公开密钥体制[2]）．在对保密的需求程度越来越高的今天，智慧的人类开始研究如何设置密码，于是自然地产生了“密码学”．因此，可以这样讲，任何理论上的发现都是有用的，也许只不过我们还没有发现它的用途而已．本文将通过一个小小的例子说明，运用数学需要有技巧．

人们通过概念和思维来认识世界，观察、归纳和演绎推理在人们认识事物的过程中起着关键的作用．数学作为一种有力的工具推动了科学的发展，要认识事物的规律必须先建立能较好反映该事物规律的数学模型．古人曾在测量、建筑、历法、天文等方面，应用算术、几何、三角等方法，解决了生产和生活中的实际问题．在近代科学发展中，牛顿建立了万有引力定律，麦克斯韦建立了电磁场理论，这些都是数学模型取得成功的典型范例．近百年来，人们通过建立数学模型，在认识世界、改造世界方面取得了更多的成绩．在力学、物理学等领域中，人们建立了空气动力学方程组、黏性流体的 Navier-Stoke 方程组、弹性力学方程组等等．在其他领域，通过建立数学模型来研究实际课题的实例也层出不穷．美国经济学家列昂杰夫的投入—产出模型、马尔萨斯的人口模型、Logistic 模型、兰切斯特关于军备竞赛的模型、天气预报中的正压模式和斜压模式模型等等．总之，模型化方法已成为研究问题的基本方法．近几十年来，随着电子计算机技术的发展，模型化方法更显示了其价值与活力．为了培养学生运用数学知识和计算机技术解决实际问题的能力，在数学教学中，渗透数学建模思想，演示数学建模过程，引导学生进行建模实践，是提高学生综合素质与实际能力的有效手段．下面，我们拟从一个简单的问题出发，展示问题的分析和模型的构建过程，使学习数学模型的学生对什么是数学模型、如何建立模型，及如何应用有一个大概的了解．

一、问题的提出

假设你现有质量分别为 1 克、2 克和 3 克的砝码各 1 枚，问只用这些砝码各

一次你能称出哪几种质量的物体来？而对每种质量确定的物体又有多少种不同的称量方案？

当然，该问题拥有的砝码个数很少，只需要对砝码进行组合搭配就能很容易地推算出来．为了方便起见，我们把不取砝码的特殊情况也看成是一种称量方案，将其质量视为 0 克．经过简单分析，本问题中各种可能的称量情况如下表 1 所示：

表 1　简单砝码称量问题的解

拥有砝码情况	称量种数		称量方案		数学模型（一）$Q(x)$	数学模型（二）$Q(x,y,z)$
	可称物体的质量种数 n	被称量物体质量克数 m	称量的方案数 P	实际称量方案（重物＝砝码）		
3 枚 1 克 2 克 3 克	7	$m_1=0$	$P_1=1$	无砝码	$(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^3)=1+x+x^2+2x^3+x^4+x^5+x^6$	$(1+x)\cdot(1+y^2)\cdot(1+z^3)=1+x+y^2+(z^3+xy^2)+xz^3+y^2z^3+xy^2z^3$
		$m_2=1$	$P_2=1$	1 克＝1 克		
		$m_3=2$	$P_3=1$	2 克＝2 克		
		$m_4=3$	$P_4=2$	3 克＝(1＋2)克或 3 克		
		$m_5=4$	$P_5=1$	4 克＝(1＋3)克		
		$m_6=5$	$P_6=1$	5 克＝(2＋3)克		
		$m_7=6$	$P_7=1$	6 克＝(1＋2＋3)克		

上述表格中的最后两列是什么意思，我们将在后面加以说明．通过上面的表格可以看出，问题的答案由 3 个参数组成：一是我们拥有的砝码可以称出的物体质量的“种数”n（7 种）；二是这 n 种质量的实际“克数”$m=\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}=\{0,1,2,3,4,5,6\}$；三是每种质量的称量“方案数”$P=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}=\{1,1,1,2,1,1,1\}$．那么这三组数据之间到底有什么内在的联系呢？能否用一个具体的数学表达式（模型）将 n,m,P 这三组数据同时表示出来呢？

二、问题分析和数学模型

考虑仅拥有 1 枚 K_1 克重的砝码的最简单情形，显然此时可以称量的物体的质量种数 $n=2$，两种物体的实际质量 $m=\{m_1=0,m_2=K_1\}$，每种质量的称量方案数 $P=\{P_1=1,P_2=1\}$．观察各种数学表达式，容易发现二项式 $x^0+x^{K_1}=1+x^{K_1}$ 的项数是 2，指数是 0 和 K_1，系数是 1 和 1，刚好和可称质量的“种数”$n=2$，可称量物体质量即“克数”的类别 $m=\{m_1=0,m_2=K_1\}$ 和每种质量的称量“方案数”$P=\{P_1=1,P_2=1\}$一一对应．显然，给定 1 枚 K_1 克重的砝码，用此对

应方法，可以唯一地确定一个二项式 $1+x^{K_1}$；反过来，任意给定一个形如 $1+x^{K_1}$ $(=x^0+x^{K_1})$ 的二项式，用它含有的项数(2 项)、每一项的指数(0 和 K_1)以及每一项的系数(1 和 1)可以表示出拥有 1 枚 K_1 克重的砝码称量物体时的各种称量情况. 这也就是说 $1+x^{K_1}$ 可以作为拥有 1 枚 K_1 克重砝码的称重情况的数学模型.

现在假定我们有两枚砝码，其质量分别为 K_1 克和 K_2 克，不妨先假定 $K_1\neq K_2$. 于是称量情况是 K_1 克的砝码可称质量 $\{0,K_1\}$、K_2 克的砝码可称质量 $\{0,K_2\}$，把两种砝码搭配在一起，可称的质量有以下几种：

(1) $0+0=0$(表示两个砝码都不取)；

(2) $K_1+0=K_1$(表示只取第一个砝码而不取第二个)；

(3) $0+K_2=K_2$(表示只取第二个而不取第一个)；

(4) K_1+K_2(表示两个砝码都取到)，

故共有四种可称的物体质量数. 注意到当两个二项式相乘时，一个因式中的每一项都乘遍另一个因式中的每一项，且某两项相乘时有系数相乘、指数相加的规律，则由两枚单一的砝码(K_1 克，K_2 克)对应的两个二项式之积恰好对应着两枚砝码所对应的多项式：

$$(1+x^{K_1})(1+x^{K_2})=(1+x^{K_1})+(1+x^{K_1})x^{K_2}=1+x^{K_1}+x^{K_2}+x^{K_1+K_2}. \quad (1)$$

上面多项式的指数刚好反映了拥有 K_1 和 K_2 两个砝码时可称质量的各种情况：可称质量分别为 $0,K_1,K_2$ 和 K_1+K_2，共 4 种不同的质量(多项式有 4 个项，每项的指数就是可以称量的质量)，且每种质量的称量方案均数为 1 种(由于 $K_1\neq K_2$，方案数就是多项式各项前的系数). 因而我们认定 $(1+x^{K_1})(1+x^{K_2})=(1+x^{K_1})+(1+x^{K_1})x^{K_2}=1+x^{K_1}+x^{K_2}+x^{K_1+K_2}$ 是拥有 K_1 和 K_2 克两枚砝码的称重问题的数学模型.

通过上面对于一个砝码和两个质量不等的砝码的情形的分析，我们猜测在有质量分别为 $K_1,K_2,\cdots,K_n$ 克的 n 个砝码下，其所对应的数学模型应该为：

$$Q(x)=(1+x^{K_1})(1+x^{K_2})\cdots(1+x^{K_n}). \quad (2)$$

那么究竟该怎么去确认其正确性呢？前面的分析只是保证了我们在砝码个数为一个和两个的情况下成立，要确定上面这个表达式对于所有的正整数 n(n 个不同质量的砝码的情况)都成立，还需用数学归纳法加以证明. 在(2)的基础上倘若再增加 1 枚 K_{n+1} 克重的砝码，则可称量物体的质量数除原有 n 个砝码的可称量质量数外，还要增加在每一个原有质量上都加 K_{n+1} 克后所得的各种质量数，于是对应的数学模型为：

$$\begin{aligned}&(1+x^{K_1})\cdots(1+x^{K_n})+(1+x^{K_1})\cdots(1+x^{K_n})\cdot x^{K_{n+1}}\\&=(1+x^{K_1})\cdots(1+x^{K_n})(1+x^{K_{n+1}}).\end{aligned} \quad (3)$$

将上述结果运用于本章开头的问题，可以不用观察的方法，而用数学模型的

表达式解答如下：在拥有1,2,3克重的砝码各一枚的称重模型为：

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)=1+x+x^2+2x^3+x^4+x^5+x^6. \tag{4}$$

该展开式显示可称量的质量有7(含有7个项)种，即0,1,2,3,4,5和6克(每一项的指数). 由于x^3的系数是2，故称3克的方案有2种，而称其余6种质量的方案均为1种(每一项前面的系数).

通过上面并不复杂的分析，相信大家已经看懂了表格中倒数第二列是怎么回事了，那么最后一列又该作如何解释呢？请看下面的分析.

三、模型改进

$(1+x^{K_1})(1+x^{K_2})\cdots(1+x^{K_n})$作为拥有质量分别为$K_1,K_2,\cdots,K_n$克的$n$个砝码的数学模型，虽然比较贴切地解决了称量"种数"、"克数"和"方案数"的问题，但其具体的称量方案并没有反映出来，而且从第二部分的分析来看，我们必须要求$K_i \neq K_j, i \neq j$，即任何两个砝码质量不一样，这显然阻碍了对更一般的问题的归纳. 为了进一步解决这一问题，我们可以对模型进行调整：采取对不同质量的砝码在上述模型中换用不同的变量表示，也就是不同变量代表不同质量的砝码，如下式所示：

$$(1+x_1^{K_1})(1+x_2^{K_2})\cdots(1+x_n^{K_n}). \tag{5}$$

在上式的展开式中可以发现每一项的系数都为1，各项的次数则是按照x_i的系数之和来计算的. 此时新模型的展开式中各项的次数即为可称质量的"克数"，且同次的克数只计算一次，所有项中不同次数的个数为称量的"种数"，同次项中所包括的项数为其次数所标示质量的称量"方案数"，每一项各变量指数的相加式表示具体的"称量方案". 例如，对拥有1克、2克、3克砝码的问题，若分别用x,y,z记1克、2克、3克的砝码，解答表1中最后一列的数学模型(二)：

$$\begin{aligned}Q(x,y,z)&=(1+x)(1+y^2)(1+z^3)\\&=1+x+y^2+(z^3+xy^2)+xz^3+y^2z^3+xy^2z^3.\end{aligned}$$

所表达的信息是称量0,1,2,4,5和6克只有一种方案，称量3克的有两种方案，且具体的称量方案为3克砝码一枚或1克、2克砝码各一枚，和表1所述完全吻合.

综上，表1中的数学模型(二)和数学模型(一)是同一个问题的两种不同的模型，而模型(二)多携带了一种信息，即具体的称量方案也被表示出来了，但其缺点是当拥有的砝码个数较多时，运算工作量将会大大增加.

多项式相乘还可这样被利用，还可以赋予蕴藏这样的实际背景，意想不到吧！