全国各类成人高等学校招生考试
应试指导及模拟试题丛书

专科起点升本科

高等数学（二）

王海英　李　广　主编

清华大学出版社

全国各类成人高等学校招生考试应试指导及模拟试题丛书

专科起点升本科

高等数学(二)

王海英　李　广　主编

内容简介

本书紧密结合2002年最新修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》,采取同步练习的形式,对高等数学的内容进行梳理,使考生在掌握基本内容的基础上对考试的重点内容进一步复习、巩固、检验、提高。模拟试题全部按照新大纲的试卷结构和题型要求进行编写,使考生在熟悉新题型的同时强化考试重点内容,并附有2002年的考试试卷供考生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学（二）/王海英，李广主编.—北京：清华大学出版社，2003
（全国各类成人高等学校招生考试应试及模拟试题丛书）专科起点升本科
ISBN 7-302-06367-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①王… ②李… Ⅲ. 高等数学-成人教育：高等教育-升学参考资料
Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第012020号

出 版 者：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
责任编辑：苗建强
封面设计：秦　铭
版式设计：仝昌林
印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：北京国马印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：185×260　印张：16.5　字数：378千字
版　次：2003年10月第1版　2003年10月第1次印刷
书　号：ISBN 7-302-06367-2/O・286
印　数：1～5000
定　价：21.00元

前　言

为了帮助参加全国各类成人高等教育专科段的广大考生顺利通过全国各类成人高等学校专科起点专升本科入学考试，我们特组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授，按照新大纲编写了复习考试系列配套教材——《全国各类成人高等学校招生考试应试指导及模拟试题丛书》。本套丛书包括《政治》、《英语》、《大学语文》、《高等数学》(一)、《高等数学》(二)、《民法》、《教育理论》、《文艺理论》和《医学综合》共9册。

本书紧密结合2002年最新修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，采取同步练习的形式，对高等数学的内容进行梳理，使考生在掌握基本内容的基础上对考试的重点内容进一步复习、巩固、检验和提高。模拟试题全部按照新大纲的试卷结构和题型要求进行编写，使考生在熟悉新题型的同时强化考试重点内容，并附有2002年的考试试卷供考生参考。此外，还根据《复习考试大纲》的要求、命题难易比例和考试题型比例，设计了“考纲要求”、“知识精讲”、“典型题解析”和“同步训练与参考答案”内容。

考纲要求——对新考试大纲中所列的知识点和要求进行详细的阐述，起到大纲内容的延伸、细化的作用。

知识精讲——对新考试大纲所涵盖的全部内容，包括考核的基本知识点、重点、难点和综合运用点都一一进行阐述，让考生对基本内容有更多的了解和把握。

典型题解析——同时精选了典型试题，力求突出考试内容的要求、考试题型的了解以及解题技巧的训练。

同步训练与参考答案——为了让考生了解和掌握各章节的内容，每章都以强化练习题的方式涵盖所有考纲考点，以利于考生的复习和备考，体现了最新考试题型，并对试卷命题的特点和趋势有宏观的把握。

本书由王海英、李广总编，其他编写人员还有张文红、王瑛红、金晓威、赵春民、陈启顺、王晓堂、王春光等，这些教师都工作在教学第一线，具有很高的教学理论和实践水平。

限于作者水平，书中疏漏之处难免，欢迎同行和读者批评指正。

目　录

第一章　函数、极限、连续 …… 1
第一节　函数 …… 2
一、函数的概念 …… 2
二、函数的性质 …… 5
三、反函数、隐函数 …… 7
四、复合函数 …… 8
五、基本初等函数 …… 9
六、初等函数 …… 13
七、同步训练与参考答案 …… 13
第二节　极限 …… 16
一、数列极限的概念 …… 16
二、数列极限的性质 …… 16
三、函数极限的概念 …… 18
四、函数极限的性质 …… 20
五、无穷小量与无穷大量 …… 21
六、两个重要极限 …… 23
七、同步训练与参考答案 …… 26
第三节　连续 …… 28
一、函数连续的概念 …… 28
二、函数在一点处连续的性质 …… 33
三、同步训练与参考答案 …… 34

第二章　一元函数微分学 …… 38
第一节　导数与微分 …… 39
一、导数概念 …… 39
二、导数的四则运算与导数的基本公式 …… 43
三、求导方法 …… 44
四、高阶导数的概念 …… 47
五、微分 …… 48
第二节　中值定理及导数的应用 …… 51
一、中值定理 …… 51
二、洛必达法则 …… 54
三、函数增减性的判定法 …… 62

四、函数的极值与极值点、最大(小)值 …… 63
五、曲线的凹凸性、拐点 …… 69
六、曲线的渐近线 …… 70
七、函数图形的描绘法 …… 71
八、同步训练与参考答案 …… 73

第三章　一元函数积分学 …… 88
第一节　不定积分 …… 89
一、不定积分 …… 89
二、基本积分公式 …… 90
三、换元积分法 …… 91
四、分部积分法 …… 96
五、简单有理函数的积分 …… 99
六、同步训练与参考答案 …… 101
第二节　定积分 …… 106
一、定积分的概念 …… 106
二、定积分的性质 …… 107
三、定积分的计算 …… 109
四、无穷区间的广义积分 …… 115
五、定积分的应用 …… 117
六、同步训练与参考答案 …… 125

第四章　多元函数微积分初步 …… 132
第一节　多元函数 …… 132
一、多元函数的定义 …… 132
二、多元函数的定义域 …… 133
三、二元函数的几何意义 …… 134
第二节　二元函数的极限与连续的概念 …… 135
一、二元函数的极限 …… 135
二、二元函数的连续性 …… 136
第三节　偏导数与全微分 …… 138
一、一阶偏导数 …… 138
二、二阶偏导数 …… 139
三、全微分 …… 141
第四节　复合函数的偏导数、隐函数的偏导数 …… 142
一、复合函数的偏导数 …… 142
二、隐函数的偏导数 …… 145
第五节　二元函数的无条件极值 …… 147

第六节　二重积分……………………………………………………………… 149
一、二重积分的概念 ……………………………………………………… 149
二、二重积分的性质 ……………………………………………………… 149
三、直角坐标系下的二重积分计算 ……………………………………… 150
四、同步训练与参考答案 ………………………………………………… 155

附录一……………………………………………………………………………… 177
附录二……………………………………………………………………………… 183
附录三……………………………………………………………………………… 191

第一章　函数、极限和连续

考纲内容与要求

【考纲要求】

(一)函数

(1)函数的概念:函数的定义、函数的表示法、分段函数、隐函数.

(2)函数的简单性质:单调性、奇偶性、有界性、周期性.

(3)反函数:反函数的定义、反函数的图像.

(4)函数的四则运算与复合运算.

(5)基本初等函数:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

(6)初等函数.

(二)极限

(1)数列极限的概念:数列、数列极限的定义.

(2)数列极限的性质:惟一性、有界性、四则运算法则、两面夹定理、单调有界数列极限存在定理.

(3)函数极限的概念:函数在一点处极限的定义,左、右极限及其与极限的关系,x 趋于无穷($x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$)时函数的极限,函数极限的几何意义.

(4)函数极限的性质:惟一性、四则运算法则、两面夹定理.

(5)无穷小量和无穷大量:无穷小量和无穷大量的定义、无穷小量和无穷大量的关系、无穷小量的性质、无穷小量的阶.

(6)两个重要极限:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

(三)连续

(1)函数连续的概念:函数在一点连续的定义,左连续和右连续,函数在一点连续的充分必要条件,函数的间断点及其分类.

(2)函数在一点处连续的性质:四则运算连续性、复合函数连续性.

(3)闭区间上连续函数的性质:有界性定理、最大值与最小值定理、介值定理(包括零点定理).

(4)初等函数的连续性.

【考试要求】

(一)函数

(1)理解函数的概念,会求函数的表示式、定义域及函数值,分段函数的定义域、函数值,并会作出简单的分段函数图像.

(2)理解函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性.

(3)了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图像),会求单调函数的反函数.

(4)熟练掌握函数的四则运算与复合运算.

(5)掌握基本初等函数的性质及图像.

(6)了解初等函数的概念.

(7)会建立简单实际问题的函数关系式.

(二)极限

(1)了解极限的概念(对极限定义中"ε-N"、"ε-δ"、"ε-M"等形式的描述不作要求),掌握函数在一点处的左极限与右极限,以及函数在一点处极限存在的充分条件.

(2)了解极限的有关性质,掌握极限的四则运算法则.

(3)理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系.会进行无穷小量阶的比较(高阶、低阶、同阶和等价).会用等价无穷小量代换求极限.

(4)熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

(三)连续

(1)理解函数在一点处连续与间断的概念,理解函数在一点处连续与极限存在之间的关系,掌握判断函数(含分段函数)在一点处连续的方法.

(2)会求函数的间断点及确定其类型.

(3)掌握在闭区间上连续函数的性质,会用它们证明一些简单命题.

(4)理解初等函数在其定义区间上连续,并会利用函数连续性求极限.

第一节　函　　数

一、函数的概念

(一)函数的定义

设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y,变量 y 随变量 x 而变化,如果变量 x 在实数集合 D 中取某个数值时,变量 y 依照某一规律 f 总有一个确定的数值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的**函数**,记为

$$y = f(x)$$

其中 x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**或**函数**.

定义域　使函数 f 有定义的自变量的取值范围 D,称为函数的**定义域**,记为 $D(f)$.

值域　函数 y 的取值范围,称为函数的**值域**,记为 $Z(f)$.

函数的定义有五个因素:自变量 x 表示主动变化的变量;定义域 D 表示自变量 x 的变化范围;因变量 y 在函数关系中是一个被动的、随自变量 x 的变化而变化的变量;x 和 y 的对应规律 f 表示因变量 y 关于自变量 x 的对应关系,使对 D 中每一个值 x,相应地确定惟一的对应值 $y=f(x)$;值域 Z 表示因变量的变化范围.

如果两个函数的对应关系 f 和定义域 D 都相同,则称这两个函数是相同的,否则就表

示这两个函数是不同的.

【例 1.1】 下列各对函数中 $f(x)$,$g(x)$为同一函数的为　　　　[　　].

A. $f(x)=x-1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$　　　　B. $f(x)=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}$ 与 $g(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

C. $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $g(x)=x$　　　　D. $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

【解析】 应选 B. 因为

A. 定义域不同. $f(x)$的定义域$(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域是

$$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty).$$

B. $f(x)$的分母、分子可约去 x,得到 $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$,这与 $g(x)$相同.

C. 定义域不同. $f(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

D. 两个函数的定义域的对应法则不同. 当 $x\geqslant 0$ 时,有 $x=\sqrt{x^2}$;而当$x<0$时,有 $-x=\sqrt{x^2}$.

小结　求函数的定义域时,应考虑以下情况:

(1)分式的分母取值不能为零;

(2)偶次根的根式应该为非负数;

(3)对数符号下的式子(真数部分)只能是正的;

(4)反正弦函数、反余弦函数符号下的式子只能介于 -1 和 1(包括 -1 和 1)之间;

(5)若函数式有两项,其定义域是两项定义域的公共部分;

(6)对于表示应用问题的函数关系,其自变量的取值范围应使实际问题有意义.

【例 1.2】 确定下列函数的定义域:

(1)$y=\ln(3-2x)$;　　(2)$y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$;　　(3)$y=\ln(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

【解析】 (1)因为 $3-2x>0$,即 $2x<3$,所以 $x<\dfrac{3}{2}$,故函数的定义域为$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$.

(2)因为$\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$,即 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$. 化简不等式得

$$-2\leqslant x-1\leqslant 2,\text{即 }-1\leqslant x\leqslant 3$$

故函数的定义域为$[-1,3]$.

(3)设 $y_1=\ln(x-1)$,$y_2=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

对于 y_1,要求 $x-1>0$,即 $x>1$,所以 y_1 的定义域为$(1,+\infty)$.

对于 y_2,要求 $x+1>0$,即 $x>-1$,所以 y_2 的定义域为$(-1,+\infty)$.

由于 $y=y_1+y_2$,所以函数 y 的定义域是上述两个定义域的公共部分,即 $x>1$. 所以函数的定义域为$(1,+\infty)$.

【例 1.3】 已知函数 $f(x)$的定义域是$(0,1)$,求函数 $f(x^2)$的定义域.

【解析】 由于 $f(x)$的定义域是$(0,1)$,因此求 $f(x^2)$的定义域的问题就变成了求 x 的取值范围,使得 $x^2\in(0,1)$. 显然,当 $x\in(0,1)$时,可使 $x^2\in(0,1)$;但当 $x\in(-1,0)$时,也可使 $x^2\in(0,1)$,所以 $f(x^2)$的定义域为$(-1,0)\cup(0,1)$.

【例 1.4】 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-6x+5}$的定义域.

A. $-2\leqslant x\leqslant 2$; B. $-2\leqslant x\leqslant 1$ 及 $1\leqslant x\leqslant 5$;

C. $-2\leqslant x\leqslant 5$; D. $-2\leqslant x<1$ 及 $1<x\leqslant 2$.

【解析】 由于函数表达式中偶次方根号下的表达式必须大于或等于零,即 $4-x^2\geqslant 0$,因此 $-2\leqslant x\leqslant 2$. 由于函数表达式中分母不能为零,即 $x^2-6x+5\neq 0$,因此 $x\neq 1$ 及 $x\neq 5$. 综合之. 有 $-2\leqslant x<1$ 及 $1<x\leqslant 2$.

(二)函数的表示法

常用的函数表示法有以下三种形式:

1. 公式(解析式)

对自变量 x 和常数施以四则运算、乘幂、指数运算、取对数、取三角函数等数学运算所得到的数学式子,称为**解析表达式**. 用解析表达式表示的一个函数,就称为函数的**解析法**,也称为**公式法**. 例如

$$y=f(x)=4x+e^{\sin x}+\ln(1+x^2)$$

高等数学中所讨论的函数,绝大多数都是由解析法来表示的,这主要是便于对解析表达式进行各种运算,便于研究函数的性质.

2. 表格法

在实际应用中,常把自变量 x 所取的值与对应的函数值列成表格,用以表示函数关系.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

这种表示法就称为函数的**表格法**. 例如,我们经常使用的各种数学用表、统计报表等.

3. 图示法

在平面直角坐标系 Oxy 中,一般用 x 轴上的点表示自变量的取值,用 y 轴上的点表示因变量的取值. 对给定的函数 $y=f(x)$,在定义域 $D(f)$ 中的每一个点 x 与相应的函数值 $f(x)$ 就确定了平面直角坐标系中的一个点 $P(x,y)$,当自变量 x 在 $D(f)$ 中变动时,点 P 就在坐标平面上进行相应的移动,于是便得到平面上的一条函数曲线,这就是函数的**图示法**(如图 1-1 所示).

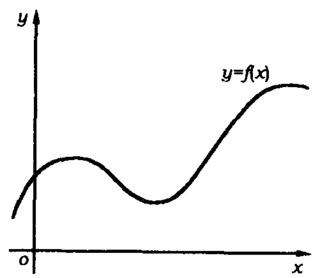

图 1-1

(三)分段函数

在函数的解析式表示法中,有时会遇到对于定义域内自变量 x 的不同值,不能用一个统一的公式表示,而要用两个或两个以上的公式来表示,用这种方法表示的函数关系,称为**分段函数**.

对于分段函数,需要注意以下四点:

(1)用两个或多个式子表示函数关系时,它表达的是一个整体函数,不是多个函数.

(2)分段函数的定义域是各个部分自变量 x 取值范围之和.

(3)在不同的子区间,函数的对应规则也不同.

(4)在分段点处,函数的取值.

【例 1.5】 设 $y=\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$,求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$.并作出函数 $y=\varphi(x)$的图形.

【解析】 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2},\quad \varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \varphi(-2)=0$$

$y=\varphi(x)$的图形如图 1－2 所示.

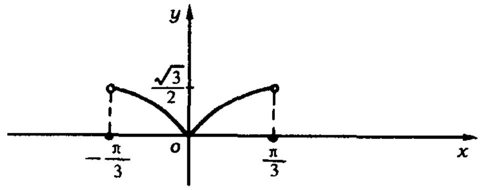

图　1－2

【例 1.6】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1\\ 1, & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$,且 $g(x)=f(x^2)+f(x-1)$,求 $g(x)$的定义域.

【解析】 因为 $f(x)$的定义域为$[-2,2]$,所以

$$\begin{cases}0\leqslant x^2\leqslant 2\\ -2\leqslant x-1\leqslant 2\end{cases}\qquad 解得\begin{cases}-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\ -1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

所以函数 $g(x)$的定义域为$[-1,\sqrt{2}]$.

【例 1.7】 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & |x|<2\\ x, & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$,则 $f(x+1)$的定义域为______.

【解析】 因为 $f(x)$的定义域为$(-2,3]$,故 $-2<x+1\leqslant 3$,即 $-3<x\leqslant 2$,所以 $f(x+1)$的定义域为$(-3,2]$.

二、函数的性质

(一)单调性

对于任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$,且 $x_1<x_2$,

如果 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内单调增加;

如果 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内严格单调增加,记作 $f(x)\uparrow,x\in(a,b)$;

如果 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内单调减少;

如果 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在(a,b)内严格单调减少,记作 $f(x)\downarrow,x\in(a,b)$.

(严格)单调增加和(严格)单调减少的函数统称为**单调函数**.

(二)奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域是以原点为对称的区间,对 $x\in D$:

奇函数:$f(-x)=-f(x)$,图形对称于坐标原点.

偶函数:$f(-x)=f(x)$,图形对称于 y 轴.

若以上二式均不成立,则称 $f(x)$为非奇非偶函数.

【例 1.8】 判断函数 $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$的奇偶性.

【解析】 因为 $f(-x)=\frac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\frac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$为偶函数.

【例 1.9】 判断函数 $f(x)=x(x-1)(x+1)$的奇偶性,并说出其图形的对称性.

【解析】 因为 $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$,所以是奇函数,其图形关于原点对称.

(三)有界性

设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果存在一个正数 M,使得对于(a,b)内的任意一点 x,总有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内是有界的.

设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果存在一个数 B,使得对于(a,b)内的任意一点 x,总有 $f(x)\leqslant B$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内是有上界的;如果存在一个数 A,使得对于(a,b)内的任意一点 x,总有 $f(x)\geqslant A$,则称函数 $f(x)$在(a,b)内是有下界的.

【例 1.10】 判断函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$,$(-\infty<x<+\infty)$的有界性.

【解析】 因为$(|x|-1)^2\geqslant 0$,即 $x^2+1\geqslant 2|x|$,$\frac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$.所以$\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$,故 $f(x)$,$(-\infty<x<\infty)$是有界函数.

【例 1.11】 函数 $y=\frac{1}{x^2}$在区间$(0,1)$内是 [ ].

A. 单调增加有界的　　B. 单调增加无界的

C. 单调减少有界的　　D. 单调减少无界的

【解析】 因为在区间$(0,1)$内,函数 $y=\frac{1}{x^2}$的值随 x 的增大而减少,所以是单调减少的.又因为当 $x>0$ 时,只要 x 的值充分小,$y=\frac{1}{x^2}$的值就可以变得充分的大.也就是说,对于预先给定的任意大的正数 M,只要正数 x 满足关系式$x\leqslant\frac{1}{\sqrt{M}}$.总有 $y>M$,所以 $y=\frac{1}{x^2}$在$(0,1)$内是无界的.故答案为 D.

(四)周期性

对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个不等于 0 的常数 l,使得关系式 $f(x+l)=f(x)$对于$(-\infty,+\infty)$中任何 x 的值都成立,则称 $f(x)$是以 l 为周期的周期函数.此时 l 的整数倍也是$f(x)$的周期.通常称满足这个等式的最小正数 l 为函数的周期.

【例 1.12】 函数 $f(x)=\tan(4\pi x+3)$的最小正周期是______.

【解析】 $\frac{1}{4}$.

因为 $\tan(4\pi x+3+\pi)=\tan\left[4\pi\left(x+\frac{1}{4}\right)+3\right]=\tan(4\pi x+3)$,故最小正周期是$\frac{1}{4}$.

【例 1.13】 下列函数中为周期函数的是　　　　[　　].

A. $y=\sin x^2$　　　　B. $y=\arcsin 2x$

C. $y=x|\sin x|$　　　　D. $y=\tan(3x-2)$

【解析】 D.

因为 $\tan\left[3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2\right]=\tan(3x+\pi-2)$

$$=\tan[(3x-2)+\pi]$$

$$=\tan(3x-2)$$

故 $y=\tan(3x-2)$是以$\frac{\pi}{3}$为周期的周期函数.

值得注意的是,通常我们所说的周期函数的周期是指最小正周期,但是并非每一个周期函数都有最小周期.例如 $f(x)=c$(c 为常数),因为任何实数 $a\neq 0$ 都是它的周期,所以 $f(x)$没有最小周期.

三、反函数、隐函数

(一)反函数

1. *反函数的定义*

设已知函数为 $y=f(x)$.如果由此解出的 $x=\varphi(y)$是一个函数,则称它为 $f(x)$的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$,并称 $f(x)$为**直接函数**.

由于习惯上往往用字母 x 表示自变量,而用字母 y 表示函数,为了与习惯一致,通常将 $x=\varphi(y)$自变量 y 改写成 x,而将函数 x 改写成 y,于是 $y=f(x)$的反函数就变为 $y=\varphi(x)$,记为 $y=f^{-1}(x)$.

2. *反函数存在定理*

如果函数 $y=f(x)$的定义域 $D(f)=X$,值域为 $Z(f)=Y$ 是严格单调增加(或减少)的,则它必定存在反函数 $x=\varphi(y)$,其定义域 $D(\varphi)=Y$,值域为 $Z(\varphi)=X$,并且也是严格单调增加(或减少)的.

3. *反函数的图形*

反函数 $y=\varphi(x)$与直接函数 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

4. *求反函数的步骤*

第一步:从直接函数 $y=f(x)$中解出 $x=\varphi(y)$,看它是否能成为函数;

第二步:如果 $x=\varphi(y)$是函数,将字母 x 换成y,将字母 y 换成x,得 $y=\varphi(x)$,这就是 $y=f(x)$的反函数.

【例 1.14】 (9402) 函数 $f(x)=2^{x-1}$的反函数 $f^{-1}(x)$等于　　　　[　　].

A. $\log_2(x+1)$　　B. $1+\log_2 x$　　C. $\frac{1}{2}\log_2 x$　　D. $2\log_2 x$

【解析】 由 $y=2^{x-1}$解出

$$x=\log_2(2y)=1+\log_2 y$$

x 与 y 互换得　$y=1+\log_2 x$.

所以选 B.

(二)隐函数

称 $y=f(x)$的函数为**显函数**.其特点是因变量 y 单独地在等号的一边,而另一边则仅仅是自变量 x 的表达式$f(x)$.

称由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数关系为**隐函数**.其特点是函数 y 没有用仅含自变量x的公式 $f(x)$来表示.

四、复合函数

设 y 是u 的函数:$y=f(u)$,而 u 又是x 的函数:$u=\varphi(x)$.又设 X 表示函数$u=\varphi(x)$的定义域的一个子集.如果对于在 X 上的每一个取值x 所对应的 u 值,函数 $y=f(u)$有定义,则 y 通过$u=\varphi(x)$而成为 x 的函数,记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

这个函数叫做由函数 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**,它的定义域为 X,u 叫做**中间变量**.

【例 1.15】 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $f[f(x)]=$______.

【解析】 由于 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,可知函数的依赖关系式为 $f(*)=\dfrac{1}{f(*)}$.因此当 $x\neq0$ 时

$$f[f(x)]=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x.$$

【例 1.16】 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$,则 $f(x)=$______.

【解析】 设 $u=x+1$,则 $x=u-1$,可得

$$f(u)=(u-1)^2+3(u-1)+5=u^2+u+3$$

因此,$f(x)=x^2+x+3$.

另外,也可以将表达式右端凑成$(x+1)$的表达式

$$f(x+1)=(x^2+2x+1)+(x+1)+3=(x+1)^2+(x+1)+3$$

因此,$f(x)=x^2+x+3$.

【例 1.17】 设 $f(x)=\ln x$,$g(x)=e^{2x+1}$,则 $f[g(x)]=$______.

【解析】 $f[g(x)]=\ln[g(x)]=\ln(e^{2x+1})=2x+1$.因此,$f[g(x)]=2x+1$.

小结 函数符号的运用问题可分为两类:

1.已知函数 $f(x)$和 $g(x)$的表达式,求函数 $f[g(x)]$的表达式.

这类问题相当于已知函数 $y=f(u)$及函数 $u=g(x)$,求复合函数 $f[g(x)]$.

2.已知 $f[g(x)]$的表达式,求 $f(x)$的表达式.

这类问题的求解方法有两种途径:

(1)令 $u=g(x)$,从中反解出 $x=\varphi(u)$,求出 $f(u)$的表达式,再将 u 换为x,即得$f(x)$的表达式.

(2)将 $f[g(x)]$的表达式凑成 $g(x)$的函数关系式.然后将所有 $g(x)$的位置换为 x,则得 $f(x)$.

五、基本初等函数

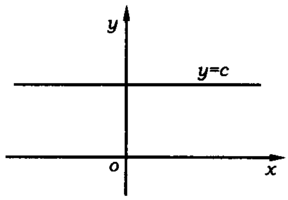

图 1-3

(一)常量函数：$y=c$(常数)，$x\in(-\infty,+\infty)$

常量函数是偶函数，其图形如图 1-3 所示.

(二)幂函数：$y=x^a$(a 为实数)

幂函数随着实数 a 的不同，其定义域和性质都有很大差别，然而不论 a 取何实数，x^a 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，且其图形必通过点(1,1). 对幂函数 $y=x^a$ 中的 a 取一些特殊的值，其表现形式为：

当 $a=1$ 时，$y=x$；定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$(-\infty,+\infty)$. 该函数为奇函数，单调增加函数. 其图形如图 1-4 所示.

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$y=x^{\frac{1}{2}}$；定义域：$[0,+\infty)$，值域：$[0,+\infty)$. 该函数为非奇非偶函数，单调增加函数. 其图形如图 1-5 所示.

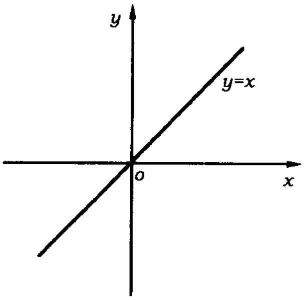

图 1-4

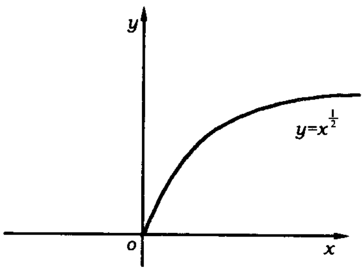

图 1-5

当 $a=2$ 时，$y=x^2$；定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$[0,+\infty)$. 该函数为偶函数，非单调函数. 其图形如图 1-6 所示.

当 $a=-1$ 时，$y=\frac{1}{x}$；定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 该函数为奇函数，非单调函数. 其图形如图 1-7 所示.

当 $a=3$ 时，$y=x^3$；定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$(-\infty,+\infty)$. 该函数为奇函数，单调增加函数. 其图形如图 1-8 所示.

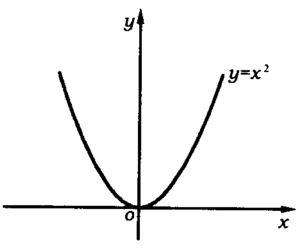

图 1-6

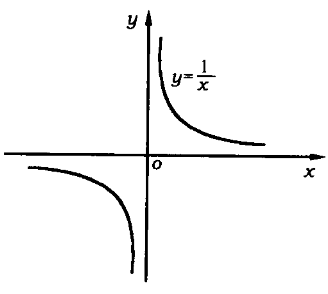

图 1-7

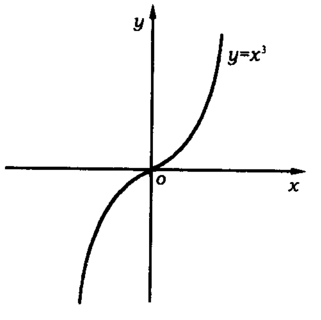

图 1-8

当 $a\neq 0$ 时,不论 a 取何实数,$y=x^a$ 都不是周期函数,在定义域内是无界的.

(三)指数函数:$y=a^x(a>0,a\neq 1)$

函数定义域:$(-\infty,+\infty)$,值域:$(0,+\infty)$.

由于不论 x 取何值,总有 $a^x>0$,且 $a^0=1$,所以它的图形总是在 x 轴的上方,且通过点 $(0,1)$,当 $a>1$ 时,y 单调增加;当 $0<a<1$ 时,y 单调减少.

该函数是非奇非偶函数,非周期函数,非有界函数.其图形如图 1-9 所示.

(四)对数函数:$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

函数定义域:$(0,+\infty)$,值域:$(-\infty,+\infty)$.

该函数不论 a 取何值,对数曲线都要通过点(1,0).

当 $a>1$ 时,y 单调增加;当 $0<a<1$ 时,y 单调减小.

该函数是非奇非偶函数、非周期函数、非有界函数,它与指数函数互为反函数.其图形如图 1-10 所示.

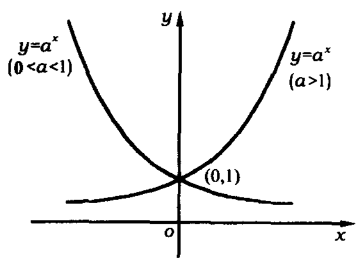

图 1-9

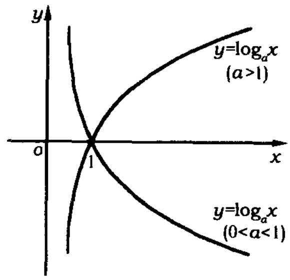

图 1-10

(五)三角函数

(1)$y=\sin x$. 函数定义域:$(-\infty,+\infty)$,值域:$[-1,1]$.

该函数为有界函数、奇函数、周期为 2π 的周期函数;在$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$内单调增加$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,在$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$内单调减少$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.其图形如图 1-11 所示.

(2)$y=\cos x$. 函数定义域:$(-\infty,+\infty)$,值域:$[-1,1]$.

该函数为有界函数、偶函数、周期为 2π 的周期函数;在$[2k\pi-\pi,2k\pi]$内单调增加$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,在$[2k\pi,2k\pi+\pi]$内单调减少$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.其图形如图 1-12 所示.

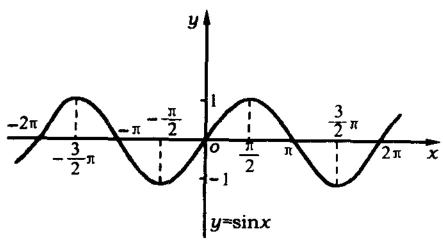

图 1-11

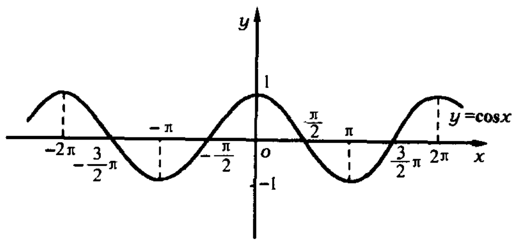

图 1-12