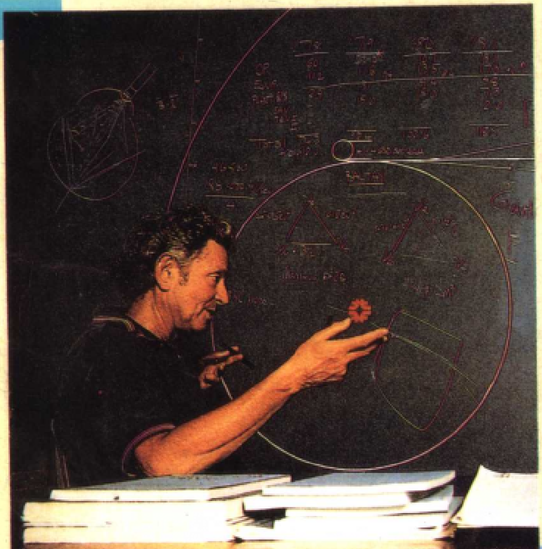
小 学 图 书 馆 百 科 文 库

XIAO XUE TU SHU GUAN BAI KE WEN KU

B·K·W·K

数学名题



中国大百科全书出版社

小学图书馆百科文库

B·K·W·K

数学名题

ISBN 7-5000-5702-4

9 787500 057024 >

ISBN 7-5000-5702-4/G · 10[illegible]
定　　价　　　　7.10元

数学名题

李延林　郭春彦　编著

中国大百科全书出版社
北　京

图书在版编目（CIP）数据

数学名题/李延林，郭春彦编著．—北京：中国大百科全书出版社，1996.8
（小学图书馆百科文库）
ISBN 7-5000-5702-4

Ⅰ．数…　Ⅱ．①李…　②郭…　Ⅲ．初等数学-解题
Ⅳ．012-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 07660 号

中国大百科全书出版社出版发行
（北京阜成门北大街 17 号　邮编 100037）
山东滨州新华印刷厂印装　各地新华书店经销
开本 850×1168　1/32　印张 6.75　字数 153 千字
1996 年 8 月第 1 版　　1997 年 10 月第 3 次印刷
印数 20001～30000
定　价：7.10 元

序

“百年大计，教育为本。”发展教育事业是国家兴盛、民族富强的必由之路。在社会主义现代化建设的过程中，人们越来越清醒地认识到：科技的发展，经济的振兴，乃至整个社会的进步，从根本上说，取决于劳动者素质的提高和大批人才的涌现，一句话，取决于教育。为此，党和国家适时地制定了“科教兴国”的宏伟战略，要求大力发展教育事业。作为这一战略的重要内容，党和国家历来重视基础教育，强调发展教育事业必须从基础抓起，从小学抓起，要求努力改善办学条件，提高师生的科学文化素质。正是在这样的背景下，国家教委提出在全国各地小学建立具有一定藏书数量的小型图书馆。目前，这一要求正在逐步落实，一批适合小学特点、具有一定藏书量的小学图书馆已陆续建立。它对于提高小学教学水平，拓展师生知识视野，营造校园文化氛围，无疑会起到重要作用。

出版大批高质量的图书，为实现“科教兴国”宏伟战略目标服务，为提高广大读者科学文化素质服务，这

是出版工作者义不容辞的责任。多年来，我国出版界在保质保量出版各级各类学校教材的同时，还出版了大量教学辅导读物和学生课外读物，为教育事业的发展提供了强有力的智力支持，给广大师生输送了丰富多采的精神食粮。但在已有的读物中，能够适应小学特点，全面、系统、准确、深入浅出地介绍百科知识的大型丛书，还不多见，这不能不说是一个遗憾。中国大百科全书出版社自建社以来，一直致力于《中国大百科全书》（74卷）的出版，围绕这一工程，用中国大百科全书出版社、知识出版社的名义，出版了多种类型的知识性读物。充分利用百科全书的丰富资源，运用编辑出版百科全书的丰富经验，直接为广大小学师生提供一套百科类知识丛书，是出版社全体同志多年的心愿。为此，我们在国家教委领导同志的支持下，从1992年起，组织首都教育界、科技界近百名专家学者，着手编纂这套《小学图书馆百科文库》。经过4年的努力，这套文库终于与读者见面了。

这套文库可供充实各地小学图书馆之用，但其作用更在于，通过这种途径配合小学教学活动，促进小学教学质量的提高，同时为广大师生提供一种拓展知识视野的课外读物。为了达到这一目的，在文库编纂过程中，编辑和作者进行了认真研究和精心策划。在读者对象的定位上，确定为小学教师、小学高年级学生和学生家长，将知识层次控制在小学及中学水平读者可以理解的范围内。在各科内容的选择上，力求作为课本知识的补充和

延伸。为此，编写过程中参考了小学教学大纲、教材、教学参考书，以使其内容覆盖小学教材中出现的所有知识主题，能够解答学生提出的各种问题。同时，该丛书内容的列选还参考了《中国大百科全书》有关各卷的知识，将小学课本知识加以系统地拓宽和延伸。在编排体例上，采用百科条目或短文的形式，按知识体系顺序编排，以满足读者系统掌握知识的需要，既便于阅读，也便于检索。在表达方法上，该丛书尽量采纳普及读物的写法，适当穿插一些轶闻掌故，以求深入浅出，引人入胜。

作为一套百科类知识丛书，文库在知识的介绍上，还体现了以下几个特点：一是“全”。文库包含思想品德、语文、数学、自然、社会、历史、地理、科技、英语、音乐、美术、体育、实验活动等方面的内容，具有完整的结构，大致体现了学科的知识系统。每个词条的内容，也力求尽量完整，讲清知识主题的来龙去脉。二是“准”。文库以《中国大百科全书》为主要参考书，发扬编辑百科全书的严谨细致的工作作风，在保证准确性的前提下，深入浅出地讲清知识主题，所介绍的知识比一般少儿读物更为准确。三是“新”。文库注意介绍现代科技发展的最新成就和最新知识，其中以新科技内容为主题的就有能源、微电子、电子计算机等。对老的学科，也注意补充新的内容。

这样一套大型小学百科文库的问世，无论在出版界，还是在教育界，都是一件新事。我们希望这套文库能对

提高小学教学水平，增强师生科学文化素质起到积极作用，同时，也期待着广大师生的批评建议。作为一项重点出版项目，我们将根据大家的意见对文库不断进行修订再版，使其成为广大师生得心应手的一部系列工具书。

1996年6月

目　录

猴子分桃问题

有 5 只猴子分一堆桃子,可是怎么也平分不了。于是大家先去睡觉,明天再说。夜里,一只猴子偷偷起来,吃了一个桃子,剩下的桃子正好分成相等的 5 份,它把自己的一份收藏起来就睡觉去了。又有一只猴子偷偷起来,也吃了一个桃子,所剩的桃子也刚好分成相等的 5 份,它把自己的一份收藏起来后也睡觉去了。另外三只猴子先后都照此办理。问这堆桃子开始共有多少个?

这个有趣的问题流传很广,有人还把它编成小故事登在报刊上,李政道博士在 1979 年春专程访问中国科技大学少年班时,曾把这个趣题拿给少年大学生去解。

根据题意,设桃子总数为 N,夜间每只猴子藏起的桃子数分别是 A、B、C、D、E,可列出方程组

$$\begin{cases} N = 5A + 1 \\ 4A = 5B + 1 \\ 4B = 5C + 1 \\ 4C = 5D + 1 \\ 4D = 5E + 1 \end{cases}$$

经逐个代入,可得

$$256N = 3125E + 2101$$

要求这个不定方程的非负整数解,过程比较繁。特别是猴子数目比较大时,计算起来更费事。

著名数理逻辑学家怀德海有一个异乎寻常的想法，先求出负整数特解后，再求正整数解。

设想，当 $E=-1$ 时，由方程

$$256N=3125E+2101$$

得出 $N=-4$。

由于桃子数 N 被连续 5 次分成 5 堆，因此，如果一个数是上述方程的特解，那么此数再加上 5^5 后仍然是方程的解。既然 -4 是特解，于是 $-4+5^5$ 也是解，于是，桃子总数是

$$-4+3125=3121$$

如何理解 -4 是特解呢？怀德海的解释是：假定当初有 -4 个桃子，一只猴子从中硬拿出一个吃掉，还剩下 $-4-1=-5$ 个桃子，分成 5 份，每份恰好是 -1 个桃子。私藏起一份之后，还剩 -4 个桃子，仍然回到没有分以前的情况，照这样的分法，不仅可分 5 次，能一直分下去。因此 -4 是个神奇的特解。这正是怀德海想法的异乎寻常之处。

这个问题可以用还原法解答，依题意列方程，

$$\{【\{[(N-1)\cdot\frac{4}{5}-1]\cdot\frac{4}{5}-1\}\cdot\frac{4}{5}-1】\cdot\frac{4}{5}-1\}\cdot\frac{1}{5}=E$$

其中 N 是桃子总数，E 是第五次分得的每份数，逐次还原可得

$$\begin{aligned}N&=\{\{[(5E+1)\cdot\frac{5}{4}+1]\cdot\frac{5}{4}+1\}\cdot\frac{5}{4}+1\}\cdot\frac{5}{4}+1\\&=\frac{5^5}{4^4}E+(\frac{5}{4})^4+(\frac{5}{4})^3+(\frac{5}{4})^2+\frac{5}{4}+1\\&=\frac{5^5}{4^4}E+\frac{(\frac{5}{4})^5-1}{\frac{5}{4}-1}\\&=\frac{5^5}{4^4}E+\frac{5^5-4^5}{4^4}\end{aligned}$$

$$=\frac{5^5}{4^4}(E+1)-4$$

由于 4 与 5 互质, 只有当$\frac{E+1}{4^4}$取得最小正整数 1 时, 才能得 N 的最小正整数解, 所以

$$E=4^4-1=255$$

$$N=5^5-4=3125-4=3121$$

在这个方法中, 用到了公式

$$a^n-1=(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)(a-1)$$

由此得

$$\left(\frac{5}{4}\right)^4+\left(\frac{5}{4}\right)^3+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}+1=\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^5-1}{\frac{5}{4}-1}$$

更一般地,

$$a^n-b^n=(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})(a-b)$$

下面是这个问题另一种简单解法。

设桃子总数为 x, n 只猴子各自藏起来的桃子数依次为 k_1, k_2, $\cdots$, k_n, 得方程组

$$\begin{cases} nk_1=x-1 \\ nk_2=(n-1)k_1-1 \\ \quad\vdots \\ nk_n=(n-1)k_{n-1}-1 \end{cases}$$

从第二个方程开始, 每个方程的等号两边都加上 n, 得

$$\begin{cases} n(k_2+1)=(n-1)(k_1+1) \\ n(k_3+1)=(n-1)(k_2+1) \\ \quad\vdots \\ n(k_n+1)=(n-1)(k_{n-1}+1) \end{cases}$$

再把这些等式两边乘起来，得

$$n^{n-1}(k_n+1)=(n-1)^{n-1}(k_1+1)$$

因为对于任何自然数 n，$n-1$ 的每个质因数都不是 n 的因数，所以 k_1+1 必是 n^{n-1}的倍数。记作

$$k_1+1=k\cdot n^{n-1}$$

将此式代入

$$nk_1=x-1$$

得

$$\begin{aligned} x &= n(n^{n-1}k-1)+1 \\ &= n^n k-(n-1) \end{aligned}$$

取 $k=1$，得最小正整数解为

$$x=n^n-n+1$$

令 $n=5$，得本题中桃子总数为

$$5^5-5+1=3121$$

在这种解法中，我们推导出了一个一般公式

$$x=n^n-n+1$$

对于任意的 $n(n>2)$只猴子的情况，只需将 n 代入公式，就可得桃子的总数。

虫蚀算问题

一个算式中，一个数字也没有，只给出表示存在数的空格，或者只给少数几个数，其他数用空格代替。问这些空格中应当填上什么数。如图 1。

“虫蚀算”意思是原有的数字都让虫子吃掉了，请你把这些被吃掉的数字重新算出来。早在 1781 年日本数学家藤田贞资在他的《精要算法》中就有比较复杂的虫蚀算题，有人还称这类问题为“无字天书”。

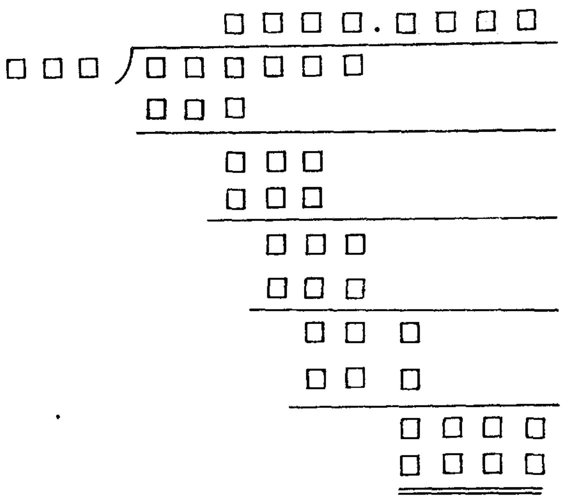


图 1

观察图 1 所表示的算式，从什么地方着手填数呢？式中的被除数下移位中有移两位和三位数的，由此提供了填数“0”的线索。

对式中的被除数及其下面各行标上行数，并且先填“0”到恰当的空格中(见图 2)。在图 2(10)式□000 中只有一个数没有填，是空格最少的一行，且这四位数又能被除数除尽，于是先设法填出这一行中的空格数。

在一些空格上先填入代数字母，这样便于叙述。由(10)式 $c000$，可能出现两种情况：$b=5$, $a=0$，或 $a=5$, b 为偶数。但是如果 $a=0$，(9)式中的 d 必是 0，进而得 $c=0$，说明(9)式已被除数除尽，与原题不符，因此只有 $a=5$, b 为偶数。

$a=5$，则 d 必然是 5，c 也是 5，(9)式就是 5000。

由□□$a\times b=5000$ 及 b 是偶数，可试出 b 只能是 8，进而得除数等于 625。

因为 $625\times2=1250$ 是四位数，可是 (4)、(6)、(8)式中都是

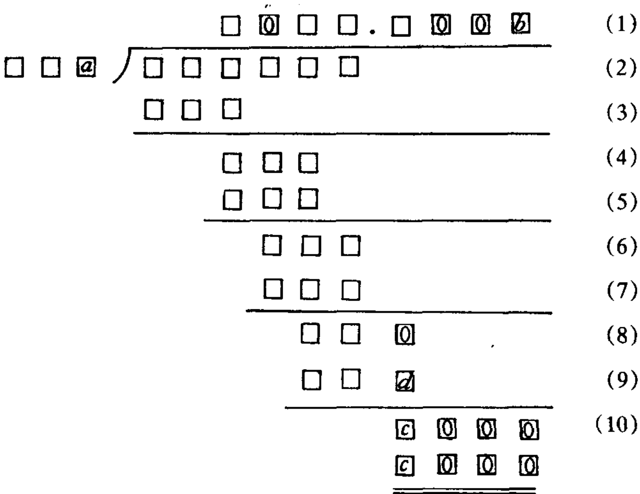


图 2

三位数，说明都应商 1。

这样便得商数是 1011.1008，除数又是 625，其他空格中的数随之即出。结果是：

```
          1 0 1 1. 1 0 0 8
6 2 5 ) 6 3 1 9 3 8
        6 2 5
          6 9 3
          6 2 5
            6 8 8
            6 2 5
              6 3 0
              6 2 5
                5 0 0 0
                5 0 0 0
```

上述除式算题完全不同于一般的除法，解这类题需要良好的

推理能力，推理之初的突破口很重要，此题是选择了确定数“0”为突破口。

下面再看一个仅给了一个数，其他均为空格的虫蚀算问题（见图 3—1）。

$$\begin{array}{rcccccl}
 & & \square & \square & \square & & (1)\\
\times & & & 8 & \square & & (2)\\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & & (3)\\
 & \square & \square & \square & & & (4)\\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & & (5)
\end{array}$$

图 3—1

注意到，图 3—1 中（1）式与（4）式都是三位数，而（1）式的 8 倍是（4）式，所以（1）式的首位数字是 1，（4）式的首位数字不是 8 就是 9。又因为（5）式是四位数，且（3）式是四位数，所以（4）式的首位数一定是 8，同时可得（3）式的首位数字是 1，（5）式的首位数字是 9。因而算式可以补成：

$$\begin{array}{rcccc}
 & & 1 & \square & \square\\
\times & & & 8 & \square\\
\hline
 & 1 & \square & \square & \square\\
 & 8 & \square & \square & \\
\hline
 & 9 & \square & \square & \square
\end{array}$$

图 3—2

因为（1）式的 8 倍为（4）式，所以（1）式的第 2 位数不是 0 就是 1，但是，如果（1）式的第 2 位数是 0，那么（3）式就应当是三位数，而（3）式是四位数，所以（1）式的第 2 位数是 1。

再看（1）式、（2）式和（3）式，$11\square\times\square=1\square\square\square$，可以认定乘数必定是 9，也就是说（2）式的末位数是 9。于是算式继续补成图 3—3 的形式