东方教育 EAST EDUCATION

普通高等教育“十五”国家级规划教材经典同步辅导丛书

材料力学 II

第4版

同步辅导及习题全解

普通高等教育国家规划教材研究中心

东方教育教材研发中心

新 华 出 版 社

普通高等教育“十五”国家级规划教材经典同步辅导丛书

材料力学Ⅱ

第 4 版

同步辅导及习题全解

普通高等教育国家规划教材研究中心
东方教育教材研发中心

新 华 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

材料力学同步辅导及习题全解/王飞编著.

北京:新华出版社,2006.3

ISBN 7-5011-7394-X

Ⅰ.材… Ⅱ.王… Ⅲ.材料力学—高等学校—教学参考资料

Ⅳ.TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 005304 号

东方教育教材研发中心
经典同步辅导丛书编委会

前 言 / Preface

《材料力学》是现代理工科院校本科教学中一门重要的课程，尤其对于材料、力学等专业尤其重要。浙江大学《材料力学》(第四版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《材料力学同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点。考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

1. 学习要求：根据考试大纲的要求，总结各章重要知识点。

2. 知识网络图：以图表的形式贯穿各章知识网络，提纲挈领，统领全章，使知识体系更加系统化。

3. 内容概要：串讲概念，总结性质和定理，知识全面系统。

4. 典型题型与解题技巧：精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并引导学生思考问题，能够举一反三，拓展思路。

5. 考研真题链接：精选历年考研真题进行深入的讲解。

6. 同步自测：根据各章的学习要求，精选了适量的自测题目，并附有答案。读者可以通过这些自测题目进一步掌握本章的内容要领，巩固和加深对本章知识的理解，增强解决问题的能力，并检查自己对所学知识的掌握程度。

7. 课后习题全解：本书给出了浙江大学《材料力学》(第四版)各章习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程，而且还对解题思路或方法做了简要的说明。

编写本书时，依据大学本科现行教材及教学大纲的要求，参考了清华大学、北京大学、同济大学、浙江大学、复旦大学等高等院校的教材，并结合教学大纲的要求进行编写。

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助。同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

东方教育教材研发中心

目 录 / Contents

第十二章 弯曲的几个补充问题

第十三章 能量方法

第十四章 超静定结构

第十五章 平面曲杆

第十六章 厚壁圆筒和旋转圆盘

第十七章　矩阵位移法

第十八章　杆件的塑性变形

第十二章

弯曲的几个补充问题

学习要求

本章主要研究了弯曲的几个补充问题,实际上是弯曲问题的进一步研究。弯曲中心问题是本章的一个考点,本章着重于基本概念,同时也会涉及用奇异函数和有限差分法求变形的问题。

知识网络图

- 非对称弯曲
  - 正应力:$\sigma = \dfrac{M_z(I_y y - I_{yz}z)}{I_y I_z - I_{yz}^2} + \dfrac{M_y(I_z z - I_{yz}y)}{I_y I_z - I_{yz}^2}$
  - 中性轴方位:$\tan\theta = \dfrac{z_0}{y_0} = -\dfrac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{M_y I_z - M_z I_{yz}}$
- 特例
  - 非对称纯弯曲
    - $M_y = 0, M_z \neq 0$,平面弯曲
    - $M_y \neq 0, M_z \neq 0$,两种平面弯曲的组合
  - 非对称横力弯曲

开口薄壁杆件 —— 剪应力：$\tau = \dfrac{F_{Sy}S_z^*}{I_z t} + \dfrac{F_{Sz}S_y^*}{I_y t}$ —— 弯曲中心

奇异函数求弯曲变形 —— 定义：

$$\langle x-a \rangle^n = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)^n, & x > a \end{cases}$$

积分规则：

$$\int_{-\infty}^{x} \langle x-a \rangle^n \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}, & x > a \end{cases}$$

—— M,θ,y 的普遍方程

有限差分法 —— 把求解微分方程问题转变为求解代数方程组的一种数值法

内容概要

1. 非对称弯曲

梁无纵向对称面，或虽有纵向对称面但载荷并不在该对称面内的弯曲称为非对称弯曲，讨论非对称弯曲的应力仍以纯弯曲理论为基础，以平面假设和纵向纤维间无正应力为前提。

最普遍的情况是在包含杆件轴线的任意纵向平面内，作用一对纯弯曲力偶矩。这时，可把这一力偶矩分解成作用于 xy 和 xz 两坐标平面内的 M_z 和 M_y，于是得相应的弯曲正应力为

$$\sigma = \frac{M_z(I_y y - I_{yz} z)}{I_y I_z - I_{yz}^2} + \frac{M_y(I_z z - I_{yz} y)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \tag{12-1}$$

式中，x 轴向右为正，y 轴向下为正，z 轴向后为正。

若以 y_0, z_0 表示中性轴上任一点的坐标，则因中性轴上各点的正应力等于零，应有

$$\sigma = \frac{M_z(I_y y_0 - I_{yz} z_0)}{I_y I_z - I_{yz}^2} + \frac{M_y(I_z z_0 - I_{yz} y_0)}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 0 \tag{12-2}$$

这是中性轴的方程式，表明中性轴是通过原点（截面形心）的一条直线。如以 θ 表示由 y 轴到中性轴的夹角，且以反时针方向为正，则

$$\tan\theta = \frac{z_0}{y_0} = -\frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{M_y I_z - M_z I_{yz}} \tag{12-3}$$

2. **非对称弯曲中的特例**

❶ $M_y = 0, M_z \neq 0$，xOy 平面内作用纯弯曲力偶矩 M_z，且 xOy 平面为形心主惯性平面（y，z 轴为截面形心主惯性轴），即 $I_{yz} = 0$，问题简化为平面弯曲，则

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z}, \theta = \frac{\pi}{2} \tag{12-4}$$

此时，中性轴与 z 轴重合。

垂直于中性轴的 xOy 平面，既是梁的挠曲线平面，又是弯曲力偶矩 M_z 的作用平面。对于实体杆件，若弯曲力偶矩 M_z 的作用平面平行于形心主惯性平面，而不是与它重合，M_z 的作用平面与挠曲线所在平面是相互平行的。

❷ $M_y \neq 0, M_z \neq 0$，但 xOy，xOz 同为形心主惯性平面，y，z 为截面形心主惯性轴，即 $I_{yz} = 0$。问题简化为形心主惯性平面内的弯曲，即两个平面弯曲的叠加，则

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{12-5}$$

$$\tan\theta = -\frac{M_z I_y}{M_y I_z} \tag{12-6}$$

❸ 非对称横力弯曲。对实体杆件，在通过形心的横向力作用下，一般省略扭转变形，把载荷分解成作用于 xOy，xOz 两个平面内的横向力，分别计算 M_y，M_z，再把纯弯曲的正应力公式用于横力弯曲正应力的计算。

3. **弯曲中心**

对任意横截面的杆件，沿形心主惯性轴 y 和 z 轴方向的剪应力的合力（即剪力）的作用线，总通过截面所在平面上的一固定点。该点称为截面的弯曲中心。当横向外力通过弯心时，杆件只有弯曲而无扭转。弯曲中心的位置仅与截面的几何形状和尺寸有关，与所加载荷的大小及方向无关。弯曲中心必在横截面对称轴上，但不一定在横

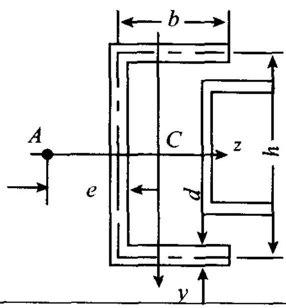
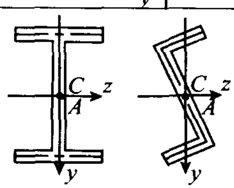
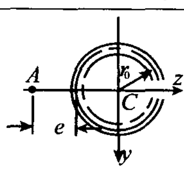
截面上。

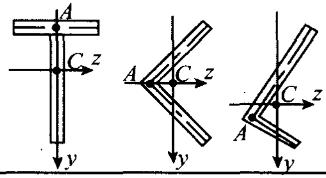
弯曲中心与截面的形心是两个不同的概念。当截面具有两个对称轴或具有一个反对称中心时，弯心与形心重合，但一般情况下，两者不在同一位置。

实体杆件或闭口薄壁杆件的抗扭刚度较大，且弯曲中心通常在截面形心附近，因而当横向力通过截面形心时，如也向弯曲中心简化，则扭矩不大，所以扭转变形可以省略。开口薄壁杆件的抗扭刚度较小，如横向力不通过弯曲中心，将引起比较严重的扭转变形。

表 12－1 给出了几种开口薄壁截面弯曲中心位置：

表 12－1　几种开口薄壁截面的弯曲中心位置

截　面　形　状	弯曲中心 A 的位置
	$e=\dfrac{b^2h^2\delta}{4I_z}$
	与形心重合
	$e=r_0$

截　面　形　状	弯曲中心 A 的位置
	两个狭长矩形条 中心线之交点

4. **开口薄壁杆件的剪应力**

当横向力作用在开口薄壁杆件横截面的弯曲中心时，杆件只有弯曲而无扭转，即横截面上只有弯曲正应力和弯曲剪应力，而无扭转剪应力，截面边缘上的剪应力与截面边界相切且沿壁厚均匀分布，可以导出截面上任一点处的剪应力，即

$$\tau=\frac{F_{Sy}S_z^*}{I_z t}+\frac{F_{Sz}S_y^*}{I_y t} \tag{12-7}$$

式中，y，z 轴——横截面的形心主惯性轴；

F_{Sy}，F_{Sz}——横截面上平行于 y，z 轴的剪力；

S_y^*，S_z^*——所求剪应力点以外一侧截面面积对 y，z 轴的静矩；

I_y，I_z——整个横截面面积对 y，z 轴的惯性矩，t 为该点处的壁厚。

5. **奇异函数求弯曲变形**

奇异函数定义如下：

$$\langle x-a\rangle^n=\begin{cases}0, & x<a\\(x-a)^n, & x>a\end{cases} \tag{12-8}$$

其积分规则为

$$\int_{-\infty}^{x}\langle x-a\rangle^n\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}, & x>a\end{cases} \tag{12-9}$$

用奇异函数表示的梁弯矩，梁变形的普遍方程为

$$M=\sum_{j=1}^{n}M_{ej}\langle x-l_i\rangle^0+\sum_{j=1}^{n}P_j\langle x-l_i\rangle^1+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2!}q_j\langle x-l_i\rangle^2 \tag{12-10}$$

$$EI\theta = EI\theta_0 + \sum_{j=1}^{n} M_{ej}\langle x-l_i\rangle^1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2!}P_j\langle x-l_i\rangle^2 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3!}q_j\langle x-l_i\rangle^3 \tag{12-11}$$

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 x + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2!}M_{ej}\langle x-l_i\rangle^2 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3!}P_j\langle x-l_i\rangle^3 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4!}q_j\langle x-l_i\rangle^4 \tag{12-12}$$

该方法应用时注意：

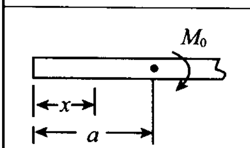
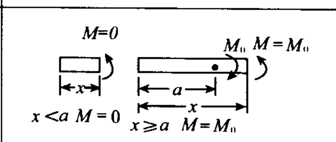
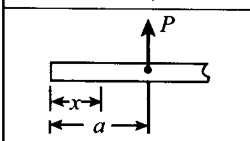
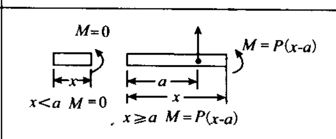
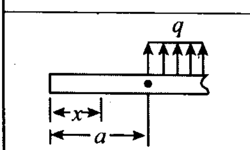
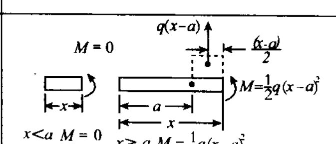
(1) 坐标原点应选在梁的最左端；

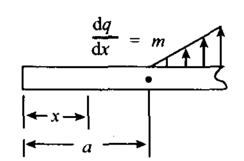
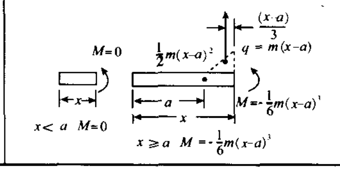
(2) 外力 q 与 P 向上为正，反之为负；顺时针旋转的外力偶 M_e 为正，反之为负；

(3) 分布载荷应一直延续到梁的最右端。如分布载荷 q 仅作用在梁内某一区段，则应将分布载荷延至梁的最右端，并在延伸部分同时加上大小相等的反向分布载荷 q；

(4) 以上各式，应从坐标原点写至梁的最右端，如须求梁中间某一截面处的弯矩，转角或挠度时，凡 $\langle x-l_i\rangle$ 为负值的各项均去掉，剩下的就是 M,θ,y 方程中应有的各项。

表 12－2　常见载荷下梁任意截面上的奇异函数

载　荷	奇异函数	函数含义
	$\boxed{M = M_0\langle x-a\rangle^0}$	
	$\boxed{M = P\langle x-a\rangle^1}$	
	$\boxed{M = \frac{q\langle x-a\rangle^2}{2}}$	

载　荷	奇异函数	函数含义
	$M=-\dfrac{m\langle x-a\rangle^3}{6}$	

6. **有限差分法**

有限差分法是一种数值法，把求解微分方程的问题转变为求解代数方程组。

典型题型与解题技巧

【例 1】 确定壁厚为 δ，半径为 r 的薄壁截面的弯曲中心（见图 12－1）。

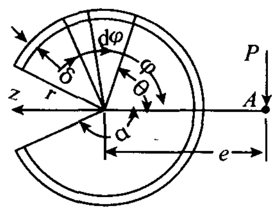


图 12－1

解题分析 本题是开口薄壁杆件弯曲中心的确定问题。先由 $\tau=\dfrac{F_S S_z^*}{I_z\delta}$ 求出剪应力，再由合力矩定理 $Pe=\int_A \tau r\mathrm{d}A$ 确定弯曲中心。

解题过程 在与 z 轴夹角为 θ 处，其剪应力为

$$\tau=\frac{F_S S_z^*}{I_z\delta}$$

式中

$$I_z=\int_A y^2\mathrm{d}A=\int_{-\alpha}^{\alpha}(r\sin\varphi)^2\delta r\mathrm{d}\varphi=r^3\delta(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$S_z^*=\int_A y\mathrm{d}A=\int_\theta^\alpha r\sin\varphi\delta r\mathrm{d}\varphi=r^2\delta(\cos\theta-\cos\alpha)$$

故 θ 处剪应力为

$$\tau(\theta)=\frac{F_S}{I_z}r^2(\cos\theta-\cos\alpha)$$

对圆心取矩，则有

$Pe = \int_A r\tau \mathrm{d}A = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F_s}{I_z} r^3 (\cos\theta - \cos\alpha) r\delta \mathrm{d}\theta =$

$\frac{F_s r^4 \delta}{I_z}\int_{-\alpha}^{\alpha}(\cos\theta - \cos\alpha)\mathrm{d}\theta = \frac{2F_s r^4 \delta}{I_z}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$

代入 I_z，$F_s = P$，且 $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$，整理得

$$e = \frac{4r}{2\alpha - \sin 2\alpha}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，得到半圆形开口薄壁截面的弯曲中心，$e = \frac{4r}{\pi}$；

当 $\alpha = \pi$ 时，得到圆形开口薄壁截面的弯曲中心，$e = 2r$。

【例 2】 试用奇异函数求图 12－2 所示梁的挠曲线方程。

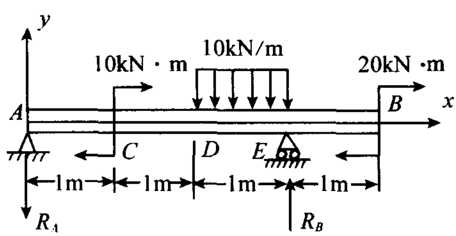


图 12－2

解题分析 用奇异函数求挠曲线方程，先求支反力，确定各段的弯矩方程，写成奇异函数形式，积分确定挠曲线方程。

解题过程 由平衡条件求出支座反力：

$$R_A = \frac{25}{3}\mathrm{kN} \qquad R_B = \frac{55}{3}\mathrm{kN}$$

则各段弯矩方程为

AC 段：

$$M(x) = -\frac{25}{3}x$$

CD 段：