配合普通高中课程标准实验教科书

新课程导学

数学 选修 2—2

A 版

人民教育出版社中学数学室
广东省教育厅教研室 策划组编

人民教育出版社

配合普通高中课程标准实验教科书

新课程导学

数学　选修 2-2

A版

人民教育出版社中学数学室
广东省教育厅教研室　策划组编

人民教育出版社

配合普通高中课程标准实验教科书

新课程导学

数学　选修　2－2

A 版

人民教育出版社中学数学室
广 东 省 教 育 厅 教 研 室　策划组编

*

人民教育出版社 出版发行

网址：http：//www.pep.com.cn

北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：787 毫米×1 092 毫米　1/16　印张：6.25　字数：130 000

2005 年 12 月第 1 版　2006 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7－107－19263－9
G·12353（课）　定价：7.60 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版科联系调换。

（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

《新课程导学·数学》编委会

丛书主编　吕伟泉　徐　勇

丛书编委会　陈利群　戴立波　黄文毓　黄玉平　刘安妮

梁　山　廖树钊　郭志勇　杨俊瑜　杨加林

徐山洪　曾令鹏

本册主编　黄玉平

编写人员　黄玉平　马清太　李友泉　于发书　刘仁学

洪苑福　姜　峰　郑俊盛　庂国钧　刘瑞祥

责任编辑　李龙才

说　明

本书依据《普通高中数学课程标准（实验）》和人民教育出版社《普通高中课程标准实验教科书·数学 A版》编写，作为学生学习的辅助用书.

本书努力做到面向全体学生，注重不同学生不同的学习需求，将“知识与能力”“学习与自学”“课内与课外”“达标与拓展”“应用与探究”有机结合，使每一个使用本书的学生都能学有所成，学有所得. 本书力求在以下几个方面有所突破.

面向全体：充分考虑学生的不同需要，设置了基础、能力、提高等栏目，使每一个学生都能通过努力，从本书学到知识，取得进步，从而体会学习的乐趣.

注重自学：将提高学生的自学能力作为主要目标之一. 通过阅读思考、课外阅读、背景知识等培养学生的自学兴趣，引导学生掌握自学方法，学会提出问题，思考问题，寻找解决问题的途径和方法，使学生通过自学取得成功.

题目设置：根据教科书的章节结构编选习题，做到与教科书紧密配合. 例题和习题体现新、精及开放、应用、分层等特点. 新主要是指题型新、背景材料新；精主要是指题量少而不影响知识的覆盖，另外还设置了一些开放性、应用性习题. 习题按照基础、能力、提高划分层次.

由于时间仓促，而且本书编写中作了一些新的尝试，编选了大量新题，因此本书可能存在疏漏之处，恳切地期待读者的批评和建议.

编　者

2005 年 11 月

目　　录

第一章　导数及其应用

1.1　变化率与导数

一、问题导入

已知物体运动的路程关于时间的函数，如何求该物体在某一时刻的瞬时速度和瞬时加速度？

二、学习目标

1. 了解变化率的概念及其表示，通过实例经历由平均变化率到瞬时变化率的过程.

2. 了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵；了解导函数的概念.

3. 能通过函数图象直观地理解导数的几何意义.

三、阅读思考

问题 1　平均变化率

对于函数 $y=f(x)$，我们把式子$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$称为函数 $y=f(x)$从 x_1 到 x_2 的平均变化率（average rate of change）. 习惯上用 Δx 表示 x_2-x_1，即 $\Delta x=x_2-x_1$. 可把 Δx 看作是相对于 x_1 的一个“增量”，可用________代替 x_2；类似地，$\Delta f=$________. 此时，平均变化率可表示为$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=$________.

注意　Δx 及 Δf 都是整体符号，而不是 Δ 与 x 或 Δ 与 f 相乘.

问题 2　瞬时变化率

当 $x=x_0$，$\Delta x\to 0$ 时，平均变化率$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$的极限为 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的瞬

时变化率，记作$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$____________.

问题3 函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数定义

我们称函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的瞬时变化率是函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数(derivative)，记作$f'(x_0)$或________，即$f'(x_0)=$________$=$________.

问题4 导数的几何意义

设函数$y=f(x)$，点$A(x_0,f(x_0))$，$B(x_1,f(x_1))$为曲线$y=f(x)$上的两点，则平均变化率$\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$表示曲线上$A$，$B$两点连线的斜率______；当点$B$沿着曲线无限趋近点$A$时，$k_{AB}$无限趋近于切线$AT$的斜率$k$(图1.1-1)．因此，函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数就是切线$AT$的斜率$k$，即$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，切线$AT$的方程是____________________.

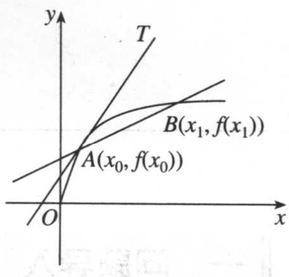

图1.1-1

问题5 导函数

从求函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数的过程可以看到，当$x=x_0$时$f'(x_0)$是一个确定的数．这样，当x变化时，$f'(x)$便是一个函数，我们称它为$f(x)$的导函数（derivative function)，简称导数．$y=f(x)$的导数有时记作y'，即$f'(x)=y'=$____________.

四、基础·能力·提高

基　础

例1 已知物体自由落体运动方程是$h(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$（h的单位：m，t的单位：s，g=9.8 m/s²)．

(1) 求物体在时间段[2.99，3]，[3，3.01]，[3，3.001]内的平均速度．

(2) 求物体在$t=3$ s时的瞬时速度．

解 (1) 在时间间隔为Δt的小时间段$[t_0,t_0+\Delta t]$内，物体的位置改变量为

$$\Delta h=h(t_0+\Delta t)-h(t_0)=\frac{g}{2}(2t_0\Delta t+\Delta t^2),$$

相应的平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{g}{2}(2t_0+\Delta t).$$

当$t_0=2.99$，$\Delta t=0.01$时，$\bar{v}=29.351$ m/s；

当$t_0=3$，$\Delta t=0.01$时，$\bar{v}=29.449$ m/s；

当 $t_0=3$，$\Delta t=0.001$ 时，$\bar{v}=29.405\ \mathrm{m/s}$.

(2) 由 (1)，当 Δt 很小时，平均速度就接近时刻 t_0 的速度. 若 $t_0=3$，当 $\Delta t\to 0$ 时，

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(6+\Delta t)=3g=29.4\ \mathrm{m/s}.$$

所以，物体在 $t=3$ 时的瞬时速度 $v=29.4\ \mathrm{m/s}$.

例 2 选择题

已知函数 $f(x)=2x^2-4$ 图象上的一点 $(1,-2)$ 及邻近一点 $(1+\Delta x,-2+\Delta y)$，则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于（　　）.

(A) 4　　(B) $4x$　　(C) $4+2\Delta x$　　(D) $4+2(\Delta x)^2$

友情提示 选 C.

例 3 填空题

(1) 已知曲线 $y=\frac{1}{x}-1$ 上两点 $A\left(2,-\frac{1}{2}\right)$，$B\left(2+\Delta x,-\frac{1}{2}+\Delta y\right)$，当 $\Delta x=1$ 时，割线 AB 的斜率为________；

(2) 对于 x_0 与 Δx，平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 与________有关，瞬时变化率 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 与________有关；

(3) 一条直线与一条曲线只有一个公共点，此时直线与曲线是相切关系吗？

友情提示 (1) 根据定义得 $-\frac{1}{6}$；(2) 根据定义得 x_0 及 Δx，x_0；(3) 不一定.

例 4 求曲线 $y=4x-x^2$ 在点 $A(-1,-5)$ 处的切线的斜率.

解 因为

$\Delta y=4(-1+\Delta x)-(-1+\Delta x)^2-4\times(-1)+(-1)^2=6\Delta x-\Delta x^2$，

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6\Delta x-\Delta x^2}{\Delta x}=6-\Delta x$，

所以，过 A 切线的斜率为 $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6-\Delta x)=6$.

能　力

例 5 某工厂生产一种产品，日总成本 p（单位：万元）与日产量 x（单位：个）的函数关系为 $p(x)=2x^2+3x+10$，求当日产量为 50 个时的边际成本.

友情提示 边际成本指的是当产量为 50 个时增加单位产量需付出的成本.

解 函数 $p(x)=2x^2+3x+10$ 在 $x=50$ 处的导数为

$$p'(50)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(50+\Delta x)^2+3(50+\Delta x)+10-2\times 50^2-3\times 50-10}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)^2+203\Delta x}{\Delta x}=203.$$

所以，当日产量为 50 个时，边际成本为 203 万元.

例 6 设有一随时间而变化的电流从 0 到 t 这段时间内通过导线横截面的电量为 $q=q(t)$，求在时刻 t_0 时的电流强度（单位时间通过导线横截面的电量).

解 已知从 0 到 t 这段时间内，通过导线横截面的电量为 $q(t)$，那么从时刻 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内通过导线横截面的电量为 $\Delta q=q(t_0+\Delta t)-q(t_0)$，这段时间内的平均电流强度为 $\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{q(t_0+\Delta t)-q(t_0)}{\Delta t}$. 当 $\Delta t\to 0$ 时，平均电流强度的极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{q(t_0+\Delta t)-q(t_0)}{\Delta t}=I_0$$

就是在时刻 t_0 的电流强度，即 $I_0=q'(t_0)$.

提 高

例 7 某汽车起动过程中的位移函数为 $s(t)=2t^3-5t^2$（单位：m)，求 $t=2$ s 时汽车的加速度.

友情提示 先求位移函数的导数得速度函数，再求速度函数在 $t=2$ 时的导数即可.

解 依题意可得汽车起动过程中的速度为

$$v(t)=s'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2(t+\Delta t)^3-5(t+\Delta t)^2-2t^3+5t^2}{\Delta t}=6t^2-10t.$$

所以，$v(t)$在 $t=2$ 时的导数为

$$v'|_{t=2}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{6(2+\Delta t)^2-10(2+\Delta t)-6\times 2^2+10\times 2}{\Delta x}=14.$$

所以，当 $t=2$ s 时，汽车的加速度为 14 m/s^2.

例 8 有一个长方体，长、宽、高分别为 100 m，100 m，50 m. 若从确定的一刻起，在30 s内长、宽均按2 m/s的速度减少，而高以2 m/s的速度增加. 试说明长方体体积在这 30 s时间内的变化情况.

友情提示 此题关键是构造体积关于时间变化的函数.

解 依题意，可设 t s 时长方体的长、宽、高分别为 $100-2t$，$100-2t$，$50+2t$，长方体的体积为 $v(t)$，则

$$v(t)=(100-2t)(100-2t)(50+2t)=8t^3-600t^2+500\ 000.$$

于是

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{8(t+\Delta t)^3-600(t+\Delta t)^2+500\ 000-8t^3+600t^2-500\ 000}{\Delta t}$$

$$=24t^2+24t\Delta t+8(\Delta t)^2-1\ 200t,$$

$$v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=-24(50-t)t.$$

当 $0<t<30$ 时，$v'(t)<0$，即体积在这段时间内单调下降.

友情提示　有条件的同学请试着利用信息技术画出 $v(t)$ 的函数图象，验证以上的解法.

五、挑战自我

基　础

1. 当函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 从 x_1 变化到 x_2 时，函数值的增量与相应自变量的增量之比是函数（　　）.

(A) 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的平均变化率　　(B) 在 x_1 处的变化率

(C) 在 x_2 处的变化率　　(D) 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的导数

2. 在导数定义中，自变量的增量 Δx（　　）.

(A) 大于 0　　(B) 小于 0　　(C) 等于 0　　(D) 不等于 0

3. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是（　　）.

(A) 在 x_0 处的函数值

(B) 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与 x 轴所夹锐角的正切值

(C) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率

(D) 点 $(x_0, f(x_0))$ 与点 $(0, 0)$ 连线的斜率

4. 一个物体的运动方程为 $s=1-t+t^2$（s 的单位：m，t 的单位：s），那么物体在 3 s 时的瞬时速度是（　　）.

(A) 7 m/s　　(B) 6 m/s　　(C) 5 m/s　　(D) 8 m/s

友情提示　$\Delta s=1-(3+\Delta t)+(3+\Delta t)^2-1+3-9^2=\Delta t^2+5\Delta t$，平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\Delta t^2+5\Delta t+6}{\Delta t}=\Delta t+5$，3 s时的瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=5$ m/s.

5. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数是 -1，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线一定（　　）.

(A) 平行于 Ox 轴　　(B) 平行于 Oy 轴

(C) 平分第一、第三象限　　(D) 平分第二、第四象限

6. 质点 M 按规律 $s=2t^2+3$ 作直线运动（s 的单位：m，t 的单位：s），求

(1) 质点 M 在 $0\leqslant t\leqslant 2$ 内的平均速度；

(2) 质点 M 在 $t=2$ s 时的瞬间速度，并思考用平均速度描述质点的运动状态有什么问题？

7. 求曲线 $y=3x^2-4x+2$ 在点 $M(2, 6)$ 处的切线的斜率，并求其切线方程.

能　力

8. 已知圆的面积 $s=\pi r^2$，求 $s'|_{r=2}$，并解释其意义.

9. 已知受制动后的第 t 秒时刻飞轮转过的角度（弧度）由函数 $f(t)=4t-0.3t^2$ 确定. 求

(1) $t=2$ 秒时飞轮转过的角度及此时飞轮的旋转速度；

(2) 飞轮停止转动的时刻.

10. 在抛物线 $y=x^2+x-1$ 上的横坐标为 $x_1=1$ 与 $x_2=3$ 的两点，过这两点引割线，问抛物线上哪一点处的切线平行于所引的割线？

提　高

11. 已知函数 $y=(2x+1)^2$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 0，求 x_0 的值.

12. 根据下列条件，分别画出函数图象在这一点附近的大致形状.

(1) $f(1)=-3$，$f'(-1)=-1$；　　(2) $f(5)=10$，$f'(5)=15$；

(3) $f(4)=4$，$f'(4)=0$；　　(4) $f(-2)=-4$，$f'(-2)=2$.

13. 一个圆的半径以0.1 cm/s的速度增加（假设开始时圆的半径为0 cm），求在半径为10 cm时圆的面积增加的速度.

六、挑战自我参考答案

1. A.　2. D.　3. C.　4. C.　5. D.

6. (1) $\bar{v}=4$ m/s；(2) $v=8$ m/s.　7. $k=8$，l：$8x-y-10=0$.

8. $s'|_{r=2}=2\pi r|_{r=2}=4\pi$，表示当半径为 2 时，圆面积随半径增大的瞬时扩大率.

9. (1) $f(2)=6.8$ 弧度，$f'(2)=2.8$ 弧度/秒；(2) $f'(t)=0$，$t=\frac{20}{3}$ 秒.

10. $P(2，5)$.　11. $-\frac{1}{2}$.　12. 略.　13. $v=6.28$ cm²/s.

1.2　导数的计算

一、问题导入

对于给定的函数 $y=f(x)$，你能很快地求出它的导数吗？

二、学习目标

1. 能根据导数定义求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数.
2. 能利用基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数.
3. 会使用导数公式表.
4. 能求简单的复合函数（仅限于形如 $f(ax+b)$的函数）的导数.

三、阅读思考

问题 1　用定义求导数

由导数的定义知，求函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$可分为三步：

（1）求函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

（2）求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

（3）取极限得导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

说明　求函数 $y=f(x)$的导函数 $f'(x)$的方法与此类似.

问题 2　用定义求几个常用函数的导数

（1）函数 $y=f(x)=C$（C 为常数）的导数

因为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{C-C}{\Delta x}=0$，

所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$.

$y'=0$ 表示函数 $y=C$ 图象上任意一点处的切线的______都是 0. 若 $y=C$ 表示路程关于时间的函数，则 $y'=0$ 可以解释为某物体的瞬时速度始终为______，即一直处于______状态.

（2）函数 $y=f(x)=x^3$ 的导数

因为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$，

所以 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2$.

$y'=3x^2$ 表示函数 $y=x^3$ 图象上点(x, y)处切线的斜率为 $3x^2$，这说明随着 x 的变化，切线的斜率也在变化. 另一方面，从导数作为函数在一点的瞬时变化率来看，当$|x|$较大时，$y=x^3$ 增加得很快，当$|x|$较小时，$y=x^3$ 增加得较慢. 若 $y=x^3$ 表示路程关于时间的函数，则 $y'=3x^2$ 可以解释为：某物体作变速运动，它在时刻 x 的瞬时速度为 $3x^2$.

问题 3　基本初等函数的导数公式

(1) 若 $f(x)=C$（C为常数），则 $f'(x)=0$；

(2) 若 $f(x)=x^n$ （$x\in\mathbf{N}^*$），则 $f'(x)=nx^{n-1}$；

(3) 若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=$______；

(4) 若 $f(x)=\cos x$，则 $f'(x)=$______；

(5) 若 $f(x)=a^x$，则 $f'(x)=a^x\ln a$；

(6) 若 $f(x)=e^x$，则 $f'(x)=$______；

(7) 若 $f(x)=\log_a x$，则 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$；

(8) 若 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=$______.

问题4　导数运算法则

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$（本公式可以推广到 n 个的情形）；

(2) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$；

(3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ $(g(x)\neq 0)$.

问题5　复合函数的导数

一般地，对于两个函数 $y=f(u)$和 $u=g(x)$，如果通过变量 u，y 可以表示成 x 的函数，那么称这个函数为 $y=f(u)$和 $u=g(x)$的复合函数（composite function）．记作 $y=f[g(x)]$.

复合函数 $y=f[g(x)]$的导数和构成它的函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$的导数间关系为 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$．即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

(1) 函数 $y=\ln(2x-1)$可以看成函数 $y=$________和 $u=$________的复合函数，所以 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=($________$)($________$)=$________.

(2) 函数 $y=\frac{1}{4-3x}$可以看成函数 $y=$__________和 $u=$__________的复合函数，所以 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=($________$)($________$)=$________.

四、基础·能力·提高

基　础

例1　用导数定义求函数 $y=2x^2+1$ 在 $x=1$ 处的导数.

解　由 $y=2x^2+1$，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2(x+\Delta x)^2+1-2x^2-1}{\Delta x}$$

$$=\frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}=4x+2\Delta x.$$

又 $x=1$，所以 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+2\Delta x)=4$.

故函数 $y=2x^2+1$ 在 $x=1$ 处的导数为 4.

例 2　求曲线 $y=x^2+2$ 在点 $P(1,3)$处的切线方程.

解　函数 $y=x^2+2$ 在 $x=1$ 处的导数为切线的斜率. 于是

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2+2-1^2-2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2.$$

所以，切线方程为 $y-3=2(x-1)$，即 $2x-y+1=0$.

例 3　根据基本初等函数的导数公式和导数运算法则求下列函数的导数：

(1) $y=x^4-3x^2+1$；　　(2) $y=\sqrt[3]{x}$；

(3) $y=x+e^x-\ln x$；　　(4) $y=\log_2 x+\cos x+3^x$.

解　(1) $y'=4x^3-6x$；　　(2) $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$；

(3) $y'=1+e^x-\dfrac{1}{x}$；　　(4) $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}-\sin x+3^x\ln 3$.

例 4　求下列函数的导数：

(1) $y=(2x^2+3)(3x-2)$；　　(2) $y=(1+\sin x)(1-2x)$.

解　(1)
$$\begin{aligned}y'&=(2x^2+3)'(3x-2)+(2x^2+3)(3x-2)'\\&=4x(3x-2)+3(2x^2+3)\\&=18x^2-8x+9;\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}y'&=(1+\sin x)'(1-2x)+(1+\sin x)(1-2x)'\\&=\cos x\cdot(1-2x)-2(1+\sin x)\\&=(1-2x)\cos x-2(1+\sin x).\end{aligned}$$

例 5　求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+2x}$；　　(2) $y=\tan x$.

解　(1)
$$\begin{aligned}y'&=\frac{(x^2)'(1+2x)-x^2(1+2x)'}{(1+2x)^2}\\&=\frac{2x(1+2x)-2x^2}{(1+2x)^2}=\frac{2x(x+1)}{(1+2x^2)};\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}y'&=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}\\&=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

例 6　求下列函数的导数：

(1) $y=(3x-1)^3$；　　(2) $y=e^{\frac{x}{2}+1}$；

(3) $y=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解 （1）$y=(3x-1)^3$ 可以看作函数 $y=u^3$ 和 $u=3x-1$ 的复合函数，所以

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(u^3)'\cdot(3x-1)'$$
$$=3u^2\times 3=9(3x-1)^2;$$

（2）$y=e^{\frac{x}{2}+1}$ 可以看作函数 $y=e^u$ 和 $u=\frac{1}{2}x+1$ 的复合函数，所以

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(e^u)'\cdot\left(\frac{1}{2}x+1\right)'$$
$$=e^u\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}+1};$$

（3）$y=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ 可以看作函数 $y=\sin u$ 和 $u=3x+\frac{\pi}{4}$ 的复合函数，所以

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\sin u)'\cdot\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)'$$
$$=3\cos u=3\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right).$$

能　力

例 7 利用导数定义，求曲线 $f(x)=x^3+3x+1$ 在点 $P(-1,-3)$ 处切线的倾斜角.

友情提示 要求切线的倾斜角，只需先求出切线的斜率.

解 设切线的倾斜角为 α，依题意，得

$$k=\tan\alpha=f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3-3(\Delta x)^2+6\Delta x}{\Delta x}=6,$$

又 $\alpha\in[0,\pi)$，所以，由 $\tan\alpha=6$，得 $\alpha\approx 89.5°$ 为所求切线的倾斜角.

例 8 若 $f'(x_0)=2$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$ 的值.

解 由导数定义，得 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f[x_0+(-\Delta x)]-f(x_0)}{-\Delta x}$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x_0+(-\Delta x)]-f(x_0)}{(-2)(-\Delta x)}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[x_0+(-\Delta x)]-f(x_0)}{-\Delta x}$$
$$=-\frac{1}{2}f'(x_0)=-1.$$

提　高

例 9 求下列曲线在指定点处的切线方程.

（1）$y=\sqrt{x}$，$x=4$；　　　　（2）$y=\sin x$，$x=\frac{\pi}{3}$.

友情提示　利用导数几何定义即可.

解　（1）因为 $y'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，所以，此曲线在 $x=4$ 处切线的斜率 $k=y'\big|_{x=4}=\frac{1}{4}$.

又当 $x=4$ 时，$y=2$，即切线过点$(4,2)$.

所以，所求切线方程为 $y-2=\frac{1}{4}(x-4)$，即 $x-4y+4=0$.

（2）因为 $y'=(\sin x)'=\cos x$，所以此曲线在 $x=\frac{\pi}{3}$处切线的斜率 $k=y'\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}$.

又当 $x=\frac{\pi}{3}$时，$y=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即切线过点$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

所以，所求切线方程为 $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，即 $x-2y+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}=0$.

例 10　已知函数 $y=ax^{a+b}$的导数为 $y'=6x^2$，求 a，b 的值.

解　$y'=a(a+b)x^{a+b-1}$，比较系数和次数得

$$\begin{cases}a(a+b)=6,\\a+b-1=2.\end{cases}$$

解得 $a=2$，$b=1$.

五、挑战自我

基　础

一、选择题

1. 曲线 $y=x^4$在点$(-2,16)$处的切线的斜率为（　　）.

（A）-2^5　　（B）-2^4　　（C）2^5　　（D）2^4

2. 函数 $y=x^m$ 的导数为 $y=4x^3$，则 m 等于（　　）.

（A）$\frac{3}{2}$　　（B）3　　（C）4　　（D）2

3. 若质点 M 按规律 $s=t^3$ 运动，则 $t=2$ 时的瞬时速度为（　　）.

（A）4　　（B）3　　（C）12　　（D）6

4. 下列结论正确的是（　　）.

（A）若 $y=\frac{1}{\cos x}$，$y'=-\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$　　（B）若 $y=\cos 5x$，则 $y'=-\sin 5x$

（C）若 $y=\sin x^2$，则 $y'=2x\cos x^2$　　（D）若 $y=x\sin 2x$，则 $y'=-2x\sin 2x$