



全国中小学教师继续教育网
www.teacher.com.cn



东北师范大学网络教育学院学历教育系列教材

JISUAN

计算方法

F A N G F A

东北师范大学网络教育学院 组编



高益明 / 编



东北师范大学出版社

Northeast Normal University Press



JISUAN

计算方法

数值计算方法与数值分析

© 2008 年 10 月



数值计算方法与数值分析

数值计算方法与数值分析



全国中小学教师继续教育网
www.teacher.com.cn



东北师范大学网络教育学院学历教育系列教材

JISUAN

计算方法

F A N G F A

东北师范大学网络教育学院 组编



高益明 / 编



东北师范大学出版社 长春

Northeast Normal University Press

图书在版编目(CIP)数据

计算方法/高益明编. —长春:东北师范大学出版社,
2006.3
ISBN 7 - 5602 - 4379 - 7

I. 计... II. 高... III. 计算方法 IV. 0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 011906 号

☐责任编辑:李敬东 ☐封面设计:宋 超

☐责任校对:李震宇 ☐责任印制:栾喜湖

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号(130024)

电话:0431—5687213

传真:0431—5691969

网址:<http://www.nenup.com>

电子函件:sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

长春市永昌印业有限公司印刷

长春市义和路 25—1 号 邮编:130021

2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷

幅面尺寸:170 mm×227 mm 印张:14.5 字数:240 千

印数:0 001 — 3 000 册

定价:17.50 元

课程说明

一、课程的性质与任务

“计算方法”是东北师范大学网络教育学院应用数学专业专科起点本科学历教育专业课程。计算方法是随着计算机的产生、发展而建立的一个重要数学分支,性质是研究建立应用计算机解决各种数学问题的数值计算方法与理论,目的是提供计算机上实际可行的、理论可靠的、计算复杂性好的各种常用数值算法,内容主要包括数值逼近,数值代数,微分方程数值解法等。计算方法既具有理论上的高度抽象性与严密逻辑性,又具有应用的广泛性和高度技术性。

二、课程的目的与要求

1. 学习目的

(1) 通过学习了解数值计算方法的作用特点与基本思想,了解每种算法建立的实际背景和数学原理,掌握每种算法的适用范围、使用条件和计算公式,并能熟练地解决实际问题。

(2) 通过对各种算法的理论分析及推理论证方法的学习,培养和提高学生的逻辑思考和论证问题的能力。

(3) 通过主要算法公式与算法设计思想的学习,使学生能用自然语言或图示方法或算法语言表达算法,为其利用计算机解决实际数学问题奠定良好基础。

2. 学习要求

学生应具有数学分析、常微分方程(或高等数学)、高等代数(或线性代数)基础知识。

目 录

课程说明	1
第一章 绪 论	1
第一节 计算方法的研究对象与特点	1
第二节 误差的来源与表示法	2
第三节 误差的传播与控制	6
第二章 插值法	13
第一节 拉格朗日插值	13
第二节 牛顿插值	20
第三节 厄米特插值	24
第四节 分段低次插值	30
第三章 函数逼近	41
第一节 最小二乘法	41
第二节 正交多项式	48
第三节 最佳平方逼近	54
第四章 数值积分	64
第一节 内插求积公式	64
第二节 梯形公式与辛卜生公式	69
第三节 复化求积公式	73
第四节 数值微分公式	78

第五章 线性方程组的直接解法	86
第一节 高斯消元法	86
第二节 主元素消元法	93
第三节 矩阵三角分解法	97
第六章 线性方程组的迭代解法	109
第一节 向量和矩阵的范数	110
第二节 雅可比迭代法	115
第三节 高斯 - 塞德尔迭代法	121
第七章 求矩阵特征值与特征向量	134
第一节 乘幂法与逆幂法	135
第二节 对称矩阵的雅可比法	141
第八章 非线性方程求根	154
第一节 区间二分法	155
第二节 切线法	157
第三节 弦位法	162
第四节 一般迭代法	168
第九章 常微分方程数值解法	178
第一节 欧拉法与改进欧拉法	178
第二节 龙格 - 库塔法	183
第三节 单步法的收敛性与稳定性	188
综合测试题 (A)	199
综合测试题 (B)	201
参考答案	203
参考文献	224
后 记	225

第一章 绪 论



学习目标

1. 知道误差及其主要来源与传播.
2. 掌握误差(绝对误差、相对误差)、误差限、准确数位和有效数字及其求法.



导 学

本章 1.1 中介绍了计算方法的研究对象与特点及学习中应注意的问题. 大多数数值方法都是近似方法, 即使方法是精确的, 由于舍入误差的存在, 其计算结果也未必能令人满意. 就是说, 对于数值计算方法的讨论及应用, 必然要涉及误差. 因此, 在讨论具体数值方法之前, 先介绍必备的误差基本知识. 在本章 1.2 中介绍了误差的四种主要来源, 在数值方法的理论和应用中只涉及截断误差和舍入误差. 在 1.2 中还介绍了误差限、相对误差限、准确数位和有效数字及其求法. 它们为以后各章的学习作了必要的铺垫. 在 1.3 中介绍了四则运算的误差和数值计算中控制误差传播应注意的几个问题.

第一节 计算方法的研究对象与特点

计算方法是计算数学的一个主要部分. 计算数学是数学科学的一个重要分支, 研究用计算机求解各种数学问题的数值计算方法及其理论. 为了具体说明计算方法的研究对象, 我们考察用计算机解决科学计算问题时经历的几个过程:

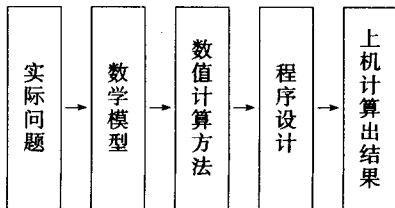


图 1 - 1

由实际问题应用有关科学知识和数学理论建立数学模型这一过程,通常作为应用数学的任务,而根据数学模型提出求解的数值计算方法直到编出程序上机算出结果这一过程,则是计算数学的任务,也是计算方法研究的对象.计算方法的内容包括函数的数值逼近、数值微分与数值积分、非线性方程数值解、数值线性代数、常微和偏微分方程数值解等.

计算方法也称“数值分析”,但不应片面地理解为各种数值方法的简单罗列和堆积,同数学分析一样,它也是一门内容丰富、研究方法深刻、有自身理论体系的课程,既有纯数学的高度抽象性与严密科学性的特点,又有应用的广泛性与实际试验的高度技术性的特点,是一门与计算机使用密切结合的实用性很强的数学课程.概括起来有下列四个特点:

第一,面向计算机,算法只能包括加、减、乘、除运算和逻辑运算(这些运算是计算机能直接处理的运算).

第二,有可靠的理论分析,能任意逼近并达到精度要求.对近似算法既要保证收敛性和数值稳定性,又要对误差进行分析.

第三,要有好的计算复杂性.时间复杂性好是指节省时间,空间复杂性好是指节省存储空间.

第四,要有有效的数值实验,即一个算法除了要满足上述三点外,还要通过数值试验证明是行之有效的.

根据计算方法课程的特点,学习时我们首先要注意掌握方法的基本原理和思想,应用的范围对象,使用条件,计算公式与步骤,要重视误差分析、收敛性及稳定性的基本理论,要通过数值实例,学习使用各种数值方法解决实际计算问题.由于本课内容包括了微积分、代数、常微分方程的数值方法,因此,读者必须掌握这几门课的基本内容.

练习 1.1

1. 计算方法的研究对象与特点是什么?
2. 学习计算方法应注意什么问题?

第二节 误差的来源与表示法

一、误差的来源

1. 模型误差

在解决实际问题时,首先是要对实际问题作定量分析,建立起反映已知量和未

知量之间关系的数学模型. 这种数学模型往往忽略了一些次要因素. 因此, 数学模型本身就包含着误差, 我们把这种误差称为模型误差.

2. 观测误差

在数学模型中常包含若干参数, 它们大多是通过实验观测得到的, 因此不可避免带有误差, 这种误差称为观测误差.

3. 截断误差

在求解数学模型时, 通常选用有效的数值方法. 数值方法计算中常常用有限过程(如取有限项、有限次)代替无限过程(无限项、无限次), 由此产生的误差称为截断误差.

4. 舍入误差

在实际计算中, 根据需要或受计算工具限制, 常常只能取有限位数字进行计算, 这样产生的误差称为舍入误差.

总括起来, 误差主要有模型误差、观测误差、截断误差、舍入误差. 在计算方法中主要讨论的是截断误差和舍入误差.

二、误差的表示方法

近似数的误差表示法, 也就是表示近似数精确度的方法, 在不同场合表示的方法不同.

1. 误差与误差限

为了讨论方便, 设 x^* 为准确值, x 为其近似值.

定义 1.1 近似值 x 与准确值 x^* 的差

$$\Delta(x) = x - x^* \quad (1.1)$$

称为近似值 x 的误差, 或称绝对误差.

误差可正可负, 当误差为正时, 近似值偏大, 称为强近似. 当误差为负时, 近似值偏小, 称为弱近似. 在同一量的不同近似值中, $|\Delta x|$ 越小, x 越精确.

一般情况下, 准确值 x^* 往往是不知道的, 所以误差 Δx 不可能准确求出, 但根据具体测量或取值方法, 可以估计出误差绝对值不超过某个正数 ϵ , 即

$$|x - x^*| \leq \epsilon \quad (1.2)$$

则称 ϵ 为近似值 x 的(绝对)误差限.

由此可得准确值的 x^* 取值范围

$$x - \epsilon \leq x^* \leq x + \epsilon$$

通常表示为

$$x^* = x \pm \epsilon \quad (1.3)$$

例 1 用一把具有毫米刻度的米尺,测得某张桌子的长度为 1235 mm,求这张桌子长度的准确值的范围.

解:由米尺的精度我们知道,这个近似值的误差不会超过半个毫米,故

$$|x - x^*| = |1235 - x^*| \leq 0.5(\text{mm})$$

$$1234.5 \leq x^* \leq 1235.5$$

这表明这张桌子的准确长度在区间 $[1234.5, 1235.5]$ 内,写成数值表达式的形式为

$$x^* = 1235 \pm 0.5(\text{mm})$$

例 2 已知 $x^* = \pi = 3.14159\cdots$, 求近似值 $x_1 = 3.14, x_2 = 3.142, x_3 = 3.1416$ 的误差限.

$$\text{解: } |\Delta(x_1)| = |3.14 - \pi| = |-0.00159\cdots| < 0.002$$

$$|\Delta(x_2)| = |3.142 - \pi| = |-0.00041\cdots| < 0.0005$$

$$|\Delta(x_3)| = |3.1416 - \pi| = |-0.000007\cdots| < 0.000008$$

所以误差限

$$\epsilon_1 = 0.002, \epsilon_2 = 0.0005, \epsilon_3 = 0.000008$$

2. 相对误差与相对误差限

定义 1.2 近似值 x 的误差 $\Delta(x)$ 与准确值 x^* 的比值

$$\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{x^*} = \frac{x - x^*}{x^*} \quad (x^* \neq 0) \quad (1.4)$$

称为近似值 x 的相对误差.

一般地,在同一量或不同量的近似值中,相对误差的绝对值 $|\delta(x)|$ 越小,近似值 x 越精确.

由于准确值 x^* 未知, $\delta(x)$ 的准确值无法求出,同样地,我们往往可以求出一个正数 ϵ_r , 使

$$|\delta(x)| = \left| \frac{x - x^*}{x^*} \right| \leq \epsilon_r \quad (1.5)$$

则称正数 ϵ_r 为近似值 x 的相对误差限. 在实际计算时,由于 ϵ 较小,通常取

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{|x|} \quad (|x| \neq 0)$$

例 3 已知 $x^* = \pi = 3.14159\cdots, y^* = \sqrt{2} = 1.41421\cdots$, 求 π 的近似值 $x = 3.14, \sqrt{2}$ 的近似值 $y = 1.41$ 的相对误差限.

解:因为

$$|\delta(x)| = \left| \frac{3.14 - \pi}{\pi} \right| < 0.0006, |\delta(y)| = \left| \frac{1.41 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right| < 0.003$$

所以相对误差限

$$\epsilon_r(x) = 0.0006, \epsilon_r(y) = 0.003$$

3. 准确数位与有效数字

在科学计算中,人们常把非零十进制数写成介于 0.1 与 1 之间的小数乘以 10 的幂的浮点数形式,如:

$$12347800 = 0.123478 \times 10^8, -0.00001986 = -0.1986 \times 10^{-4}$$

对于一个任意非零十进制数 a 表示为

$$a = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \times 10^m \quad (1.6)$$

定义 1.3 设浮点近似数

$$x = \pm 0.x_1 x_2 \cdots x_p \cdots \times 10^m$$

若 x 的误差限 ϵ 不超过 10^{m-p} 位的半个单位,即

$$\epsilon \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-p} \quad (1.7)$$

则称近似数 x 准确到 10^{m-p} 位. 当 $p=n$ 时,则称 x 是具有 n 位有效数字的有效数. 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别称为第 1 位,第 2 位, $\cdots$, 第 n 位有效数字. 由定义 1.3 可知,准确数位越多的近似数 x 越精确.

例 4 $\pi = 3.141592654 \cdots$, 取 $x = 3.142$ 为 π 的近似值. 验证 x 有几位有效数字.

解: 因为 $|\pi - 3.142| = 0.000407 < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, 所以取 $\epsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$

又因为 $m=1, m-p=-3$, 即 $p=4$, 则 3.142 具有 4 位有效数字, 即为 3, 1, 4, 2

例 5 以 $\frac{22}{7} = 3.1428571 \cdots$ 作为 π 的准确值, 它准确到哪位?

解: 因为 $|\pi - 3.1428571 \cdots| < \frac{1}{2} \times 10^{-2}$, 所以可取 $\epsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$

由定义得 x 为准确到 10^{-2} 位的近似值.

练习 1.2

1. 举例说明什么是模型误差和观测误差.
2. 举例说明什么是截断误差和舍入误差.
3. 已知 $x^* = \sqrt{2}$, 求近似值 $x = 1.414$ 的误差限, 相对误差限.
4. 已知 $x^* = \pi$, 求近似值 $x_1 = 3.142, x_2 = 3.14135$ 的有效数字或准确数位.

第三节 误差的传播与控制

一、函数运算的误差

设函数 $y=f(x_1, x_2)$ 在点 (x_1^*, x_2^*) 附近可微, 观测得到近似点为 (x_1, x_2) . 由多元微分知, 函数的误差(改变量)

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_1, x_2) - f(x_1^*, x_2^*) \approx \\ df &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta(x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta(x_2)\end{aligned}\quad (1.8)$$

函数的相对误差

$$\begin{aligned}\delta(f) &= \frac{\Delta f}{f} \approx \\ &= \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta(x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta(x_2) \right)\end{aligned}$$

由 $\Delta(x_1) = x_1\delta(x_1)$, $\Delta(x_2) = x_2\delta(x_2)$ 得

$$\delta(f) \approx \left(\frac{x_1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \delta(x_1) + \left(\frac{x_2}{f} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \delta(x_2) \quad (1.9)$$

由公式(1.8)和(1.9)容易求出简单四则运算的误差.

1. 和的误差

设 $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, 由 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 1$, (1.8)和(1.9)得

$$\begin{aligned}\Delta(x_1 + x_2) &\approx \Delta(x_1) + \Delta(x_2) \\ \epsilon(x_1 + x_2) &\approx \epsilon(x_1) + \epsilon(x_2)\end{aligned}$$

$$\delta(x_1 + x_2) \approx \frac{x_1}{x_1 + x_2} \delta(x_1) + \frac{x_2}{x_1 + x_2} \delta(x_2)$$

$$\epsilon_r(x_1 + x_2) \approx \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right| \epsilon_r(x_1) + \left| \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right| \epsilon_r(x_2)$$

2. 差的误差

设 $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, 由 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -1$, (1.8)和(1.9)得

$$\Delta(x_1 - x_2) \approx \Delta(x_1) - \Delta(x_2)$$

$$\varepsilon(x_1 - x_2) \approx \varepsilon(x_1) + \varepsilon(x_2)$$

$$\delta(x_1 - x_2) \approx \frac{x_1}{x_1 - x_2} \delta(x_1) - \frac{x_2}{x_1 - x_2} \delta(x_2)$$

$$\varepsilon_r(x_1 - x_2) \approx \left| \frac{x_1}{x_1 - x_2} \right| \varepsilon_r(x_1) + \left| \frac{x_2}{x_1 - x_2} \right| \varepsilon_r(x_2)$$

当 $x_1 \approx x_2$ 时, 相对误差 $\delta(x_1 - x_2)$ 可能会很大.

3. 积的误差

设 $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, 由 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2, \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$, (1.8) 和 (1.9) 得

$$\Delta(x_1 x_2) \approx x_2 \Delta(x_1) + x_1 \Delta(x_2)$$

$$\varepsilon(x_1 x_2) \approx |x_2| \varepsilon(x_1) + |x_1| \varepsilon(x_2)$$

$$\delta(x_1 x_2) \approx \delta(x_1) + \delta(x_2)$$

$$\varepsilon_r(x_1 x_2) \approx \varepsilon_r(x_1) + \varepsilon_r(x_2)$$

4. 商的误差

设 $f(x_1, x_2) \approx \frac{x_1}{x_2}$, 由 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{x_2^2}$, (1.8) 和 (1.9) 式得

$$\Delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx \frac{x_2}{x_2^2} \Delta(x_1) - \frac{x_1}{x_2^2} \Delta(x_2)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx \left| \frac{x_2}{x_2^2} \right| \varepsilon(x_1) + \left| \frac{x_1}{x_2^2} \right| \varepsilon(x_2)$$

$$\delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \delta(x_1) - \delta(x_2)$$

$$\varepsilon_r\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx \varepsilon_r(x_1) + \varepsilon_r(x_2)$$

二、控制误差的传播

1. 避免两个相近数相减

当数值计算中出现两个相近数相减时, 计算结果精度将会急速下降, 所以应尽量避免两个相近数相减. 一般可采用算式恒等变形法, 使变形后的算式不再含有此类运算; 或在初始数据中多保留几位有效数字, 以确保计算结果要求的精度.

例 6 设 2.01 和 2 为准确数, 计算 $\sqrt{2.01} - \sqrt{2}$, 并使计算结果具有 3 位有效数字.

解: 因为

$$\sqrt{2.01} = 1.4177446 \cdots \quad \sqrt{2} = 1.4142135 \cdots$$

所以 $\sqrt{2.01}-\sqrt{2}$ 是两个相近数相减. 要使结果具有 3 位有效数字, 应取初始值保留 6 位有效数字, 即

$$\sqrt{2.01}-\sqrt{2} \approx 1.41774-1.41421=0.353 \times 10^{-2}$$

如果采取算式恒等变形, 则有

$$\begin{aligned} \sqrt{2.01}-\sqrt{2} &= \frac{0.01}{\sqrt{2.01}+\sqrt{2}} \approx \frac{0.01}{1.42+1.41} \approx \\ &0.353 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

2. 尽量减少运算次数

在数值计算中, 简化运算次数十分重要, 因为它直接影响计算速度和误差积累, 有时甚至可使无法计算的问题得以实现.

例 7 计算多项式 $p(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x^1+a_0$ 的值.

解: 若直接进行计算, 计算 $a_k x^k$ 须进行 k 次乘法, 因此共须作 $\frac{1}{2} n(n+1)$ 次乘法和 n 次加法运算. 如果将计算按下式进行:

$$p(x)=(\cdots((a_n x+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\cdots+a_1)x+a_0$$

则只需进行 n 次乘法和 n 次加法运算.

3. 采取数值稳定算法

在数值计算中, 除初始数据外, 计算过程的每一步还将有舍入误差, 对于一个数值算法, 这些误差必然影响计算的结果. 如果计算结果受这些误差的影响比较小, 则称这个数值方法是数值稳定的, 否则, 称这个数值方法是数值不稳定的.

例 8 对 $n=0, 1, 2, 3, 4$, 求积分 $y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+100} dx$ 的近似值.

解: 由

$$\begin{aligned} y_n + 100y_{n-1} &= \int_0^1 \frac{x^n + 100x^{n-1}}{x+100} dx = \\ &\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

可得递推公式

$$(1) y_n = \frac{1}{n} - 100y_{n-1} (n=1, 2, 3, 4)$$

$$(2) y_{n-1} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{n} - y_n \right) (n=4, 3, 2, 1)$$

$$\text{显然 } y_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+100} dx = \ln \frac{101}{100} = 0.00995$$

对于一切自然数 $n, 0 < y_n < y_{n-1}$, 若利用递推公式(1)计算, 则得

$$y_0 \approx 0.00995, y_1 \approx 0.005, y_2 \approx 0, y_3 \approx 0.3, y_4 \approx -29.75$$

因为

$$\int_0^1 \frac{x^4}{101} dx < y_4 < \int_0^1 \frac{x^4}{100} dx$$

取

$$y_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{505} + \frac{1}{500} \right) \approx 0.00199$$

若改用递推公式(2)计算, 则得

$$y_4 \approx 0.00199, y_3 \approx 0.00248, y_2 \approx 0.0031, y_1 \approx 0.00497, y_0 \approx 0.00955$$

从上面的计算结果可以看出, 计算方法(2)是数值稳定的, 而(1)是不稳定的。

当然, 实际计算时应采用数值稳定的计算方法。

练习 1.3

1. 如何计算下列函数值, 其误差较小?

$$(1) \text{ 当 } |x| \ll 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$(2) \text{ 当 } |x| \ll 1 \text{ 时, } f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$$

2. 已知近似数 $a = 1.186, b = 0.6385$, 求 $a+b, ab$ 的误差限及准确数位。

习 题

1. 求下列近似数的误差限和有效数字:

$$235000, 2350 \times 10^2, 0.235 \times 10^6$$

2. 求 $\sqrt{2}$ 的近似值 $x_1 = 1.414$, e 的近似值 $x_2 = 2.718$ 的误差限, 相对误差限。

3. 求 π 的近似值 $x_1 = 3.1416, x_2 = \frac{355}{113}$ 的有效数字或准确数位。

4. 已知正方形的边长为 100 cm, 怎样测量才能使面积误差不超过 1 cm²?

5. 计算 $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n!} x^n$, 并使乘除运算次数最少。

6. 已知积分

$$\int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx (n = 0, 1, \dots, 10)$$

建立递推计算公式, 并讨论其计算结果的可靠性。

小 结

方 法	研究对象与特点,学习时应注意的问题
误差的来源	模型误差、观测误差、截断误差、舍入误差
误差(限)	$\Delta x = x - x^*, \Delta x \leq \epsilon(x)$
相对误差(限)	$\delta(x) = \frac{x - x^*}{x^*}, \delta(x) \leq \epsilon_r(x)$
准确数位,有效数字	$x = 0.x_1x_2\cdots x_p\cdots x_n \times 10^m$ 若 $\epsilon(x) \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-p}$ ($p < n$), 则 x 准确到 10^{m-p} 位 若 $\epsilon(x) \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$ ($p = n$), 则 x 有 n 位有效数字
四则运算的误差	$\epsilon(x_1 \pm x_2) \approx \epsilon(x_1) + \epsilon(x_2)$ $\epsilon(x_1 x_2) \approx x_2 \epsilon(x_1) + x_1 \epsilon(x_2)$ $\epsilon\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx \left \frac{x_2}{x_2^2}\right \epsilon(x_1) + \left \frac{x_1}{x_2^2}\right \epsilon(x_2)$
控制误差的传播	避免两相近数相减,尽量减少运算次数,采取数值稳定算法

典 型 例 题

例 1 设 $x^* = \sqrt{3} = 1.732050808\cdots$, 求它的近似值 $x = 1.73$ 的绝对误差限、相对误差限以及它们的有效数字.

解: 因为

$$\Delta x_1 = |x_1 - x_1^*| = |1.73 - 1.73205| = 0.00205\cdots < 0.003$$

所以它的绝对误差限 $\epsilon(x) = 0.003 < \frac{1}{2} \times 10^{-2} = 0.5$, 且 10^{-2} 是 x 末位数字所在位, 得 x 具有 3 位有效数字.

而 x 的相对误差限

$$\epsilon_r(x) = \frac{\epsilon(x)}{|x|} = \frac{0.003}{1.73} \approx 0.0018$$

例 2 求近似数 $x = 0.4260 \times 10^2$ 的误差限与有效数字.

解: 因为 x 是有效数, 末位数字为 0, 所以 x 具有 4 位有效数字, 其误差限

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2} \times 10^{-4} \times 10^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$