湖南省普通高校成人教育系列教材

线性代数

■ 湖南省教育科学研究院
■ 湖南省成教学会成教研究专业委员会 组编 审定

◎ 周建军 周绍杰 主编
◎ 欧阳柏玉 主审

XIANXINGDAISHU

湖南人民出版社

湖南省普通高校成人教育系列教材

线性代数

■ 湖南省教育科学研究院
■ 湖南省高教学会成教研究专业委员会 组编 审定

◎ 周建军 周绍杰 主编
◎ 欧阳柏玉 主审

XIANXINDAISHU

湖南人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/周建军,周绍杰主编.—长沙:湖南人民出版社,
2005.12

ISBN 7-5438-4243-2

Ⅰ.线...　Ⅱ.①周...②周...　Ⅲ.线性代数
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 155313 号

责任编辑:李大春
装帧设计:卜艳冰

线 性 代 数
周建军　周绍杰 主编
*
湖南人民出版社出版、发行
(长沙市营盘东路3号　邮编:410005)
湖南省新华书店经销　湖南汇龙印务有限公司印刷
2005年12月第1版第1次印刷
开本:787×1092　1/16　印张:8.5
字数:186,000　印数:1-10,000
ISBN7-5438-4243-2
G·1012　定价:12.00元

湖南省普通高等学校
成人教育教材编写指导委员会

主　任: 张学军

副主任: 杨仁斌　黄宜峰

委　员: (按姓氏笔画为序)

王继平　卢先明　冯　涛　叶震琪　寻立祥　张登玉
李卫宁　李达轩　汤放华　阳柏苏　李晓阳　李桂源
刘鸿翔　刘绪幌　杨仁斌　张学军　孟昭武　陈家玉
宋楚华　张冀南　周小青　欧小松　欧阳河　屈林岩
柳见成　殷志云　曹福祥　章　兢　曾宝成　鲁亮深
蒋景萍　廖端芳　瞿树林

湖南省普通高等学校
成人教育教材编审委员会

主　任: 杨仁斌　黄宜峰

副主任: 欧阳河　杨　敏

委　员: (按姓氏笔画为序)

马宏铁　王超英　申白沙　叶　进　宁国良
冯革非　申桂荣　李汉林　朱平华　李　光
刘伟辉　邬贤斌　李茯梅　闫家灿　刘晓林
宇振寰　刘　彪　陈立人　陈邦杰　沈国强
陈润叶　肖超苏　杜慎忡　吴移谋　姜大良
唐际昂　黄万华　常富林　彭剑飞　谢剑虹
蔡　瑛　潘辉英

前　言

根据教育部加强教材建设和管理的文件精神，在省教育厅的直接领导和支持下，湖南省教育科学研究院和湖南省普通高等成教研究专业委员会共同组织编写了湖南省普通高校成人教育系列教材，并于2004年成立了湖南省普通高校成人教育教材编写指导委员会和湖南省普通高校成人教育教材编审委员会。在对我省普通高等学校成人教育所用教材进行充分调查的基础上，研究制定了组织编写出版成人教育系列教材的实施计划。经全省普通高校学校申请推荐、专家评审、教材编写指导委员会审定，实行主编负责制。2005年3月首期编写出版了《计算机应用基础教程》《英语基础语法》《学士学位英语考试指南》等4本教材，本期编写出版《大学语文》《管理学》《高等数学》《线性代数》《概率论与数理统计》等6本教材。

湖南省普通高等学校成人教育系列教材充分考虑了成人教育的多学科多层次和学员在职学习的特点，本着为成人教育服务的目的，在保证教材科学性的前提下，力求教材适应成人学员自学，注重加强教材的应用性。该系列教材作为普通高等学校成人教育的本科和专科层次的教材，在教材内容上保持了一定广度，理论上保持了一定深度，各校在教学中，可根据教学计划和学员的情况进行教材内容的选用。

本书在编写出版过程中得到了各级领导、各高等学校的大力支持，整套教材凝聚了众多教授、科研人员和工作人员的集体智慧，谨在此对本书付出辛勤劳动的全体人员表示衷心感谢！

本册为《线性代数》，全书共6章，第1～3章由周绍杰编写，第4～6章由周建军编写。

由于编写和出版时间仓促，书中难免存在错误，请各学校将使用过程中发现的问题及时反馈给我们，以便再版时修正、完善。

湖南省教育科学研究院
湖南省普通高校成教研究专业委员会
2005年10月15日

目 录

第一章　行列式

行列式是线性代数中的一个重要研究对象，也是学习矩阵、线性方程组要用到的一个有力工具，它在数学、物理、力学以及现代科学技术中有着广泛的应用.

本章主要介绍行列式的概念、基本性质和计算方法，最后给出它的一个直接应用——求解 n 元线性方程组的克拉默（Cramer）法则.

§1　二阶与三阶行列式

行列式来源于研究线性方程组的求解公式，设含有两个未知数 x_1，x_2 的线性方程组为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

用消元法求解时，以 a_{22}乘第一式，a_{12}乘第二式，然后两式相减消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似地，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\ x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得方程组（1）的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

根据线性方程组（1）解的特点，为了便于记忆，我们把表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3}$$

并把（3）叫做二阶行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

二阶行列式（3）含有两行两列（横排为行，竖排为列），数 a_{ij}（$i = 1$，2；$j = 1$，2）叫做它的元素或元. 元素 a_{ij}的第一个下标 i 叫做行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫做列标，表明该元素位于第 j 列. 位于第 i 行第 j 列的元素叫做行列式（3）的（i，j）元

如图 1，把 a_{11}到 a_{22}的实线叫做主对角线，a_{12}到 a_{21}的虚线叫做副对角线．二阶行列就等于主对角线上两元素之积与副对角线上两元素之积的差．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1

利用二阶行列式的定义，(2) 式中 x_1，x_2的分子也可写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}\qquad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

那么 (2) 式可写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则 $$x_1=\frac{D_1}{D}，\ x_2=\frac{D_2}{D}$$

例 1　解线程方程组

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-3y=-2 \end{cases}$$

解　由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-1\times 1=-7\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=7\times(-3)-1\times(-2)=-19$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-7\times 1=-11$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-19}{-7}=\frac{19}{7}$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-11}{-7}=\frac{11}{7}$$

对于含有三个未知数 x_1，x_2，x_3的线性方程组．

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}\tag{4}$$

采用从三个未知数中消去两个的方法求解，可得到，当 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时，方程组 (4) 有惟一解：

$$x_1=\frac{1}{D}\ (b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3)$$

$$x_2=\frac{1}{D}\ (a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31})$$

$$x_3=\frac{1}{D}\ (a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31})$$

为了便于记忆，我们把表达式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

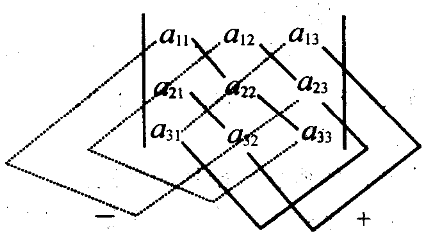
记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

把它叫做三阶行列式．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式的表达式共有 6 项，3 项带正号，3 项带负号，每一项都取自不同行与不同列的三个元素的乘积，可用图 2 表示的对角线法则求得：



于是利用三阶行列式，当线性方程组（4）的系数行列式（5）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$ 时，（4）有惟一的解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例 2　计算下列三阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}\quad D_2=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

解　按三阶行列式的对角线法则：

$D_1=1\times(-1)\times(-2)+2\times2\times(-3)+0\times3\times2-1\times2\times2-2\times3\times(-2)$

$-0\times(-1)\times(-3)=-2$

$D_2=0+abc+abc-0-0-0=2abc$

例 3　当 x 取何值时，三阶行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}$$

等于零

解　$D=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12$

$=x^2-5x+6$

$=(x-2)(x-3)$

所以当 $x=2$ 或 3 时，行列式等于零.

§2　n 阶行列式

一　全排列

为了给出 n 阶行列式的定义，先来介绍全排列的概念和有关性质.

在中学代数里我们学习了排列的概念，把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列（也简称排列）. n 个不同元素的所有排列的种数为记 P_n 且 $P_n=n!$.

如：1，2，3 三个数码共有六个不同的排列，它们是：

123，132，213，231，312，321

以下讨论行列式中一个常用的概念，排列的奇偶性.

在三个数码 1，2，3 的六个排列中，除了 123 是按自然顺序排列的以外，其余的排列中，都有较大的数码排在较小的数码前面. 如在排列 213 中，2 比 1 大，但 2 排在 1 前面；在排列 312 中，3 比 1，2 都大，但 3 排在 1，2 前面.

一般地，在由 n 个数码 1，2，…，n 构成的一个排列中，如果某一个较大的数码排在某一个较小的数码前面，就说这两个数码构成一个逆序.

如排列 213 有一个逆序，排列 312 有两个逆序.

在一个排列里出现的逆序总数叫做这个排列的逆序数. 逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

如排列 213 的逆序数等于 1，它是奇排列；排列 312 的逆序数等于 2，它是偶排列.

给定 n 个数码 1，2，…，n 的一个排列，可用以下方法求出它的逆序数：若 1 前面有 t_1 个比 1 大的数码，2 前面有 t_2 个比 2 大的数码，3 前面有 t_3 个比 3 大的数码，…，n 前面有 t_n 个比 n 大的数码（显然 $t_n=0$），则这个排列的逆序数是

$$t=t_1+t_2+t_3+\cdots+t_n$$

例 4　求排列 43152 的逆序数

解　在排列 43152 中

1 前面的数码有两个（4，3），得 $t_1=2$

2 前面比 2 大的数码有三个（4，3，5），得 $t_2=3$

3 前面比 3 大的数码有一个（4），得 $t_3=1$

4 前面比 4 大的数码没有，得 $t_4=0$

显然　$t_5=0$

于是排列 43152 的逆序数是

$$t=2+3+1+0+0=6$$

在一个排列中，将两个数码对调，其余的数码不动，这种作出新排列的变换叫做对换. 将相邻两个数码对换叫做相邻对换.

如在偶排列 43152 中，对换数码 2，4，得新排列 23154，它的逆序数 $t=3$，是一个奇排列.

定理 1　一个排列中的任意两个数码对换，排列改变奇偶性.

证　1^0先证相邻对换的情形

设排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_k$，对换 a 与 b，变为新排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_k$，我们比较这两个排列的逆序数. 显然数码 a_1，…，a_l，b_1，…，b_k 的逆序数没有改变，但是数码 a，b 的逆序数改变. 当 $a<b$ 时，经过对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变，即新排列的逆序数比原排列的逆序数增加一个；当 $a>b$ 时，经过对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1 个，即新排列的逆序数比原排列的逆序数减少一个. 所以排列 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_k$ 与排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_k$ 的奇偶性不同.

2^0再证一般对换的情形

设排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_k bc_1\cdots c_m$ 对换 a，b 后变为新排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_k ac_1\cdots c_m$. 可看成先让 a 依次与 b_1，b_2，…，b_k 作 k 次相邻对换变为排列 $a_1\cdots a_l b_1\cdots b_k abc_1\cdots c_m$，再让 b 依次与 a，b_k，…，b_1 作 $k+1$ 次相邻对换变为 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_k ac_1\cdots c_m$. 这样共作了 $2k+1$ 次相邻对换，由 1^0，排列改变了 $2k+1$ 次奇偶性. 所以，一次对换改变排列的奇偶性.

由定理 1 可以推得：当 $n\geqslant 2$ 时，n 个数码的奇排列与偶排列的个数相等. 即各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

二　n 阶行列式的概念

二、三阶行列式可用对角线法则计算，而对角线法则对于四阶或更高阶行列式已不再适用。为了定义 n 阶行列式，先研究三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

i　三阶行列式的表达式有 3! ＝6 项. 三项带正号，三项带负号，每一项都是取自不同行、不同列的三个元素的乘积.

ii　若每一项三个元素的行标按 123 排列，即按自然排列，则带正号的三项的列标排列分别是 123，231，312，它们都是偶排列；带负号的三项的列标排列分别是 132，213，321，它们都是奇排列.

于是三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$$

其中，$p_1p_2p_3$ 为 1，2，3 的一个排列，t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$表示对 1，2，3 的所有 6 个排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

定义 1 n^2 个数排成 n 行 n 列，写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做 n 阶行列式，它等于所有取自不同行、不同列的 n 元素的乘积

$$a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{6}$$

的代数和，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 1，2，…，n 的一个排列，当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，项 (6) 前面带正号；当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，项 (6) 前面带负号.

由于 1，2，…，n 的排列共有 $n!$ 个，形如 (6) 式的项共有 $n!$ 个. 与三阶行列式一样，n 阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{7}$$

为了书写简单，把 n 阶行列式记为 $det\ (a_{ij})$. 当 $n=1$ 时，规定一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$. 注意不要与绝对值记号混淆.

例 5 计算下三角形行列式（主对角线以上的元素全为 0）

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 我们从行列式 D 的一般项

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

中来找可能不为零的项.

由于行列式 D 的第一行中，除 a_{11}外其余的元素都是零，p_1 只能取 1.（若 $p_1>1$，则 $a_{rp_1}=0$，于是含有 a_{1p_1}的项一定等于零）；在行列式 D 的第二行中，除 a_{21}，a_{22}外其余的元素都是零，p_2 只能取 1，2，但已取 $p_1=1$，所以 p_2 只能取 2；如此这样能继续推下去，可知在行列式 D 中，除一项 a_{11}，$a_{22}\cdots a_{nn}$外，其余项都是零，而这一项列标的排列 $12\cdots n$ 为偶排列，应该带正号，因此

$$D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

类似地，容易证明上三角形行列式（主对角线以下元素全为0）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角行列式（主对角线以外的元素全为0）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

§3 行列式的性质

用行列式的定义计算 n 阶行列式，需要计算 $n!$ 个项，当 n 较大时，计算量很大. 为了简化行列式的计算，我们来研究行列式的性质.

把行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次写成相应的列，得到另一行列式

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这时称行列式 D^T 为行列式 D 的转置行列式

如行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

的转置行列式是：

$$D^T = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

通过计算有 $D = 12 = D^T$.

利用行列式的定义和排列的性质可以证明：

性质1 行列式与它的转置行列式相等. 即 $D = D^T$

性质1说明：行列式中的行与列具有同等的地位，行列式中凡是对行成立的命题对

列也成立，反之亦然.

性质 2 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘以这个行列式. 即

$$i\text{ 行}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} i\text{ 行}$$

证 由行列式的定义（7）式，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{ip_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}$$

$$= k\sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^t a_{1p_i}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以 r_i（c_i）表示行列式的第 i 行（列），把第 i 行（列）乘以 k，记作 $r_i\times k$（$c_i\times k$）.

推论 1 行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

推论 2 行列式中有一行（列）的元素全为 0，则行列式等于 0.

如：

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\text{（提出第一行公因数（-2））}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\text{（第 3 列的元素全为 0）}$$

性质 3 互换行列式的两行（列），行列式变号.

证 设行列式

$$D=\begin{array}{l}\left|\begin{array}{cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{array}\right|\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行}\\ \\ j\text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

通过交换 i，j 两行后得到行列式

$$D_1=\begin{array}{l}\left|\begin{array}{cccc}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{array}\right|\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行}\\ \\ j\text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

按 n 阶行式的定义，行列式 D_1 中的一般项

$$a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

行标的排列是自然排列（注意：a_{jp_j}是 D_1 的第 i 行的元素，a_{ip_i}是 D_1 的第 j 行的元素），列标的排列就是第 2 个下标的排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$，因此有：

$$\begin{aligned}D_1&=\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}\\&=\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}\end{aligned}$$

其中 t_1 为排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数. 把排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 通过对换 p_i，p_j 得新排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$，设其排列的逆序数为 t，则 $(-1)^{t_1}=-(-1)^t$

于是

$$\begin{aligned}D_1&=-\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}\\&=-D\end{aligned}$$

即 $D=-D_1$

把行列式交换 i，j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$；交换 i，j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$

推论 3 行列式中如果有两行的元素相同，则此行列式等于 0

推论 4 行列式中如果有两行的元素成比列，则此行列式等于 0

如：

(i) $$\begin{vmatrix}1&6&4&d\\2&4&1&3\\1&2&5&1\\4&6&3&2\end{vmatrix}\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix}4&6&1&d\\1&4&2&3\\5&2&1&1\\3&6&4&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{vmatrix}4&6&1&d\\3&6&4&2\\5&2&1&1\\1&4&2&3\end{vmatrix}$$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0$（第一，三两行成比例）

性质 4 若行列式中某一行（列）的元素 a_{ij}是两个元素 b_{ij}与 c_{ij}之和．即 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$（$j=1, 2, \cdots, n$）．则该行列式可分为相应的两个行列式之和．即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} i\text{ 行}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 $D=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots(b_{ip_i}+c_{ip_i})\cdots a_{np_n}$

$$=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots c_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+0 & 3-1 & 1+\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

但是

$$\begin{vmatrix} 2+1 & 2-2 \\ -1+2 & 3+0 \end{vmatrix}\neq\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

性质 5 把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一个数加到另一行（列）对应的元素上去，行列式值不变，即把行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$