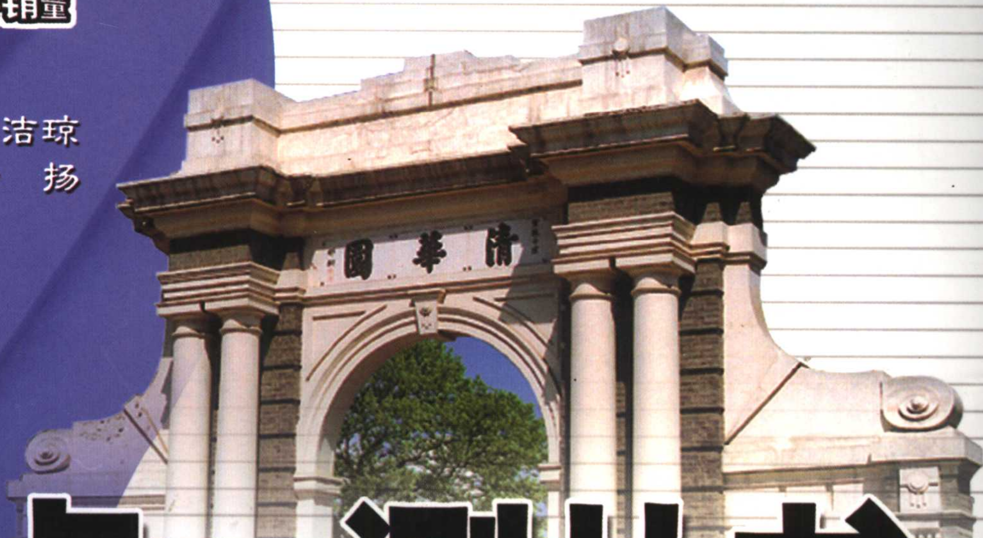
人教版课标本

高中新课标

200万套销量

名誉主编 雷洁琼
丛书主编 希 扬



三点一测丛书

树品牌典范 拓成才之路

高中数学 B版 5（必修）

● 本册主编 文 涵 赵玉磊

探究目标

探究指导

探究综合训练

龙门教辅
LONGMEN JIAOFU

科学出版社 龍門書局

☆ 与 2006 年**人教版**最新教材同步 ☆

三点一测丛书

高中数学 B 版⑤(必修)

⊙ 本册主编：文　涵　赵玉磊

⊙ 副 主 编：王继忠　赵文娟

孙文洁　董国森

科学出版社　龍門書局

北　京

图书在版编目(CIP)数据

三点一测丛书.高中数学(B版).5(必修):人教版课标本/希扬丛书主编;文涵,赵玉磊本册主编.—北京:科学出版社 龙门书局,2006

ISBN 7-5088-0418-X

Ⅰ.三…　Ⅱ.①希…②文…③赵…　Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 054501 号

组稿编辑:王　敏/责任编辑:韩　博　刘　娜
封面设计:东方上林工作室

科学出版社
龙门书局 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
www.longmenbooks.com
北京一二零一工厂 印刷
科学出版社总发行　各地书店经销

*

2006 年 7 月第 一 版　开本:1/16(787×1092)
2006 年 7 月第一次印刷　印张:11
印数:1—10 000　字数:286 000

定　价:16.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

教育为振兴
中华之本

雷洁琼

一九九九年三月

曾任全国人大常委会副委员长的雷洁琼为《三点一测丛书》题词

前言

怎样才能学好数学呢？这是所有高中学生心中的一个疑问，也是作者创作本书的一个诱因。随着新的一轮教育教学、教材、考试改革的深入进行，“新课程标准”“新教材”“3＋X方案”“综合能力测试”等热点话题的出现，掀起了高中学习的一场革命。以往“就知识论知识，为同步而同步，题海战术，把难点和疑点留待考前总复习中解决”的学习方式必将成为历史。如今我们倡导的是创新学习，不但学习的设备、手段和工具要更新，教与学要同电脑网络接轨，更为重要的是学习观念的更新，不仅要学习传统的知识和理论，更要学习获得这些知识和理论所使用和创造的方法、手段和思想。

我们这套《三点一测丛书》力图跳出旧圄，从一个全新的层面，帮助广大中学生梳理知识、探究规律、总结方法，在同步学习知识的基础上，更注重思维方法指导，强调能力培养，全面综合提高，最终使其学会学习、应用和创新。

本书以“知识——思维——能力”的认知规律为指导，将每一章分为探究目标、探究指导和探究综合训练三大版块。

探究目标 针对每节内容的知识与能力目标、过程与方法目标、情感态度与价值观目标，用简洁、明晰的语言对每节重点、难点进行明确的阐述，让学生心中有数，做到有的放矢。

探究指导 完全按照教材的顺序对基础知识、重点和难点内容做了深入浅出的讲解。起点不高、观点新颖、广视角、慢镜头，让每一位学生都能看懂，每一位教师都有思考的余地。

探究综合训练 即本节的综合能力测试，其中穿插着近几年的高考题和各地模拟试题，通过“练一练，你会了吗”巩固基础知识与基本技能目标；通过“想一想，如何探究”落实过程与方法目标；通过“试一试，经历这次活动”“读一读，你有何收获”进一步打好双基，丰富情感、态度与价值观目标。训练部分都给出了答案，便于学生自学，注重三基的落实，思维方法的激活，综合能力的提高，知识面的扩展。

本书编者都是工作在一线的骨干教师，他们有丰富的教学经验，过硬的教学理论，在繁重的教学工作之余，参阅了大量最新的各类教学期刊和相关资料，为每一位学生提供最大的帮助。

时间仓促，疏漏不当之处还望广大读者批评指正，以便我们以后改进。

编　　者

目录

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

探究目标

1. 知识与技能

(1)掌握正弦定理,能初步运用正弦定理解一些斜三角形.

(2)能够运用正弦定理解决某些与测量和几何计算有关的实际问题.

2. 过程与方法

(1)使学生在已有知识的基础上,通过对任意三角形边角关系的探究,发现并掌握三角形中的边长与角度之间的数量关系——正弦定理.

(2)在探究学习中,认识到正弦定理可以解决某些与测量和几何计算有关的实际问题,帮助学生提高运用有关知识解决实际问题的能力.

3. 情感、态度与价值观

(1)通过对三角形边角关系的学习,经历数学探究活动的过程,培养探索精神和创新意识.

(2)在运用正弦定理的过程中,逐步养成实事求是、扎实严谨的科学态度,学习用数学的思维方式解决问题、认识世界.

探究指导

数学宫殿

1. 正弦定理

在一个三角形中,各边的长和它所对角的正弦的比相等,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

正弦定理揭示了任意三角形边角之间的规律,是解三角形的重要工具.正弦定理的证明除了课本上所用三角函数的定义法外,还可用向量法,或用三角形的面积公式证明,即用$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$给出证明.

【例1】 用向量法证明正弦定理.

证明:如图1-1-1(1),$\triangle ABC$为锐角三角形时,过A作单位向量$\boldsymbol{j}$垂直于$\overrightarrow{AB}$,则$\boldsymbol{j}$与$\overrightarrow{AB}$的夹角为$\frac{\pi}{2}$,$\boldsymbol{j}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角为$\frac{\pi}{2}-B$,$\boldsymbol{j}$与$\overrightarrow{CA}$的夹角为$\frac{\pi}{2}+A$,设$AB=c$,$BC=a$,$CA=b$,因为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$,

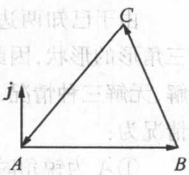


图 1-1-1(1)

所以$\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{BC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{j}\cdot\mathbf{0}=0$.

即$|\boldsymbol{j}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{2}+|\boldsymbol{j}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+|\boldsymbol{j}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)=0$.

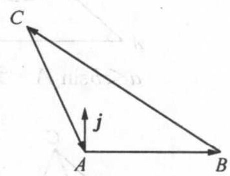


图 1-1-1(2)

所以$a\sin B=b\sin A$,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

同理可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

再看钝角$\triangle ABC$(如图1-1-1(2)).

过A作单位向量$\boldsymbol{j}$垂直于$\overrightarrow{AB}$,则$\boldsymbol{j}$与$\overrightarrow{AB}$夹角为$\frac{\pi}{2}$,$\boldsymbol{j}$与$\overrightarrow{BC}$夹角为$\frac{\pi}{2}-B$,$\boldsymbol{j}$与$\overrightarrow{CA}$的夹角为$\frac{3}{2}\pi-A$.

设$AB=c$,$BC=a$,$CA=b$,

则$\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{BC}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{j}\cdot\mathbf{0}=0$,

即$|\boldsymbol{j}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\frac{\pi}{2}+|\boldsymbol{j}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+|\boldsymbol{j}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi-A\right)=0$.

所以$a\sin B=b\sin A$.即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

同理可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

当$\triangle ABC$为直角三角形时,利用同样方法可证得结论,请同学们自己证明.

2. 解三角形

一般地,把三角形的三个角A、B、C和它们的对边a、b、c叫做三角形的元素,已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

利用正弦定理可以解决以下两类有关三角形的问题.

(1)已知两角和任一边,求其他两边和一角.

(2)已知两边和其中一边的对角,求另一边对角,从而进一步求出其他的边和角.

已知两边及其中一边的对角解三角形时,由于三角形的形状不能唯一确定,会出现两解、一解和无解三种情况,可以根据"三角形中大边对大角"的定理进行判断解的个数.

由于已知两边和其中一边的对角,不能唯一确定三角形的形状,因此解这类三角形问题将出现两解、一解、无解三种情况.已知 a,b 和角 A 时解三角形的各种情况为:

①A 为锐角时,情况如图 1-1-2 所示.

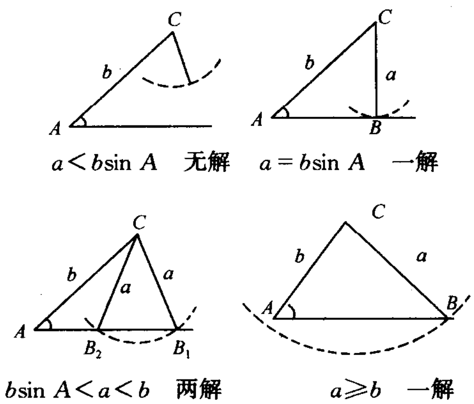


图 1-1-2

②A 为直角或钝角时,情况如图 1-1-3 所示.

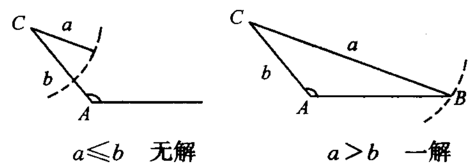


图 1-1-3

也就是说利用正弦定理解三角形,需要已知一个三角形的两个角和一条边;或者已知一个三角形的两条边和一边的对角.

(1)三角形有唯一解的条件:①已知三角形的两角和一条边;②已知 a,b,A,解三角形时,若 A 为钝角或直角,且 $a>b$ 时,有唯一解;若 A 为锐角,且 $a\geqslant b$ 时,有唯一解;若 A 为锐角,且 $a<b$,当 $a=b\sin A$ 时,B 为直角,有唯一解.

(2)三角形有两解的条件:已知 a,b,A,解三角形时,若 A 为锐角,且 $b\sin A<a<b$ 时,有两解.

(3)三角形无解的条件:已知 a,b,A,解三角形时,若 A 为锐角,且 $a<b\sin A$ 时无解;若 A 为钝角或直角,且 $a\leqslant b$ 时,无解.

【例 2】 (1)在 $\triangle ABC$ 中,已知 $A=45°,B=30°,c=10$,求 b.

(2)在 $\triangle ABC$ 中,已知 $A=45°,a=2,b=\sqrt{2}$,求 B.

思路与技巧 (1)要求 b 的值,由正弦定理知,已知边 c,为此需由 $A+B+C=180°$,求出 C,从而问题解决;(2)运用正弦定理时,要注意解的个数.

解答 (1)$\because A+B+C=180°$,$\therefore C=105°$.

$\because \dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,$\therefore b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{10\sin 30°}{\sin 105°}$,即 $b=5(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

(2)$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,$\therefore \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{\sqrt{2}\sin 45°}{2}=\dfrac{1}{2}$. $\because a>b$,$\therefore A>B$ 即 B 为锐角,$B=30°$.

评析 (1)中要注意在 $\triangle ABC$ 中,$A+B+C=180°$的运用,另外 $\sin 105°=\sin 75°=\sin(45°+30°)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

(2)中要注意运用三角形中大边对大角的性质,判定解的个数.

【例 3】 已知在 $\triangle ABC$ 中,$a=\sqrt{3},b=\sqrt{2},B=45°$,求角 A、C 和边 c.

思路与技巧 在 $\triangle ABC$ 中,已知两边和一边的对角,解三角形可先用正弦定理求出角 A,利用 $A+B+C=180°$,求得角 C,进而求出 c.

解答 由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\because a>b$,$\therefore A=60°$或 $A=120°$.

当 $A=60°$时,$C=180°-45°-60°=75°$,$c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

当 $A=120°$时,$C=180°-45°-120°=15°$,$c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore A=60°,C=75°,c=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,或 $A=120°,C=15°,c=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

评析 已知三角形的两边和其中一边的对角,求另一边角,此时解不确定,应注意讨论.

3. 正弦定理的综合应用

由正弦定理可有如下变式:$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B},\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A},\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,$a\sin B=b\sin A$,$a\sin C=c\sin A$,$b\sin C=c\sin B$.

【例 4】 在$\triangle ABC$中,已知$a^2\tan B=b^2\tan A$,试判断$\triangle ABC$的形状.

思路与技巧 观察条件的特点,为边角等式,可以应用正弦定理把边化为角,再利用三角公式求解.

解答 由已知得$\frac{a^2\sin B}{\cos B}=\frac{b^2\sin A}{\cos A}$

由正弦定理$a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$(R为$\triangle ABC$外接圆半径),得

$\frac{4R^2\sin^2 A\sin B}{\cos B}=\frac{4R^2\sin^2 B\sin A}{\cos A}$,

即$\sin A\cos A=\sin B\cos B$, $\therefore\ \sin 2A=\sin 2B$.

$\therefore\ 2A=2B$或$2A=\pi-2B$,即$A=B$,或$A+B=\frac{\pi}{2}$.

$\therefore\ \triangle ABC$为等腰三角形或直角三角形.

评析 正弦定理常与三角函数知识联系在一起,利用正弦定理可以将边化为角或角化为边,在判断三角形形状时,采用边化角运算较简单.

【例 5】 在$\triangle ABC$中,设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

求证:$\triangle ABC$为正三角形.

思路与技巧 要证$\triangle ABC$为正三角形,只需证$A=B=C$即可,解题的关键是建立向量的数量积与正弦定理的联系.

证明 如图 1-1-4,由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,可得$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-C)=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\pi-A)$,

$\therefore\ |\boldsymbol{a}|\cos C=|\boldsymbol{c}|\cos A$.

由正弦定理:$a=2R\cdot\sin A$,$c=2R\sin C$,可得

$\sin A\cos C=\sin C\cos A$,

即$\sin(A-C)=0$,

$\therefore\ A=C$.

同理由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$可得$B=C$,

$\therefore\ A=B=C$,即$\triangle ABC$为正三角形.

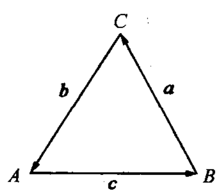


图 1-1-4

【例 6】 在$\triangle ABC$中,求证:$\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0$.

思路与技巧 观察等式特点,有边有角,要把边角统一,为此利用正弦定理,将a^2,b^2,c^2转化为$\sin^2 A$,$\sin^2 B$,$\sin^2 C$.

证明 由正弦定理有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

$\therefore\ \frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}=\frac{4R^2\sin^2 A-4R^2\sin^2 B}{\cos A+\cos B}$

$=\frac{4R^2[(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)]}{\cos A+\cos B}$

$=\frac{4R^2(\cos^2 B-\cos^2 A)}{\cos A+\cos B}$

$=4R^2(\cos B-\cos A)$.

同理:$\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}=4R^2(\cos C-\cos B)$,

$\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=4R^2(\cos A-\cos C)$,

$\therefore$ 等式左边$=4R^2(\cos B-\cos A+\cos C-\cos B+\cos A-\cos C)=0=$右边.

$\therefore$ 等式成立.

评析 在三角形中,解决有关含边角关系的问题时,常运用正弦定理化边为角,然后利用三角函数知识去解决.

4. 正弦定理在实际问题中的应用

正弦定理可以解决一些与测量有关的实际应用问题.

【例 7】 台风中心位于某市正东方向 300 km 处,正以 40 km/h 的速度向西北方向移动,距离台风中心 250 km 范围内将会受其影响.如果台风风速不变,那么该市从何时起要遭受台风影响?这种影响持续多长时间?(结果精确到 0.1 h)

思路与技巧 如图 1-1-5,设该市在点A,台风中心从点B向西北方向移动,$AB=300$ km.在台风中心移动过程中,当该中心到点A的距离不大于 250 km 时,该市受台风影响.

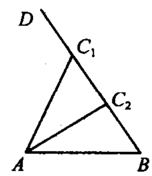


图 1-1-5

解答 设台风中心从点B向西北方向沿射线BD移动,该市为位于点B正西方向 300 km 处的点A.

假设经过t h,台风中心到达点C,则在$\triangle ABC$中,$AB=300$ km,$AC=250$ km,$BC=40t$ km,$B=45°$,由正弦定理$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$,知$\sin C=\frac{AB\cdot\sin B}{AC}=\frac{300\sin 45°}{250}=\frac{3}{5}\sqrt{2}\approx 0.8485$,

$\therefore\ C_1\approx 58.05°$,或$C_2\approx 121.95°$.

当$C_1\approx 58.05°$时,$A=180°-(B+C_1)\approx 180°-(45°+58.05°)=76.95°$,

$\therefore\ BC_1=\frac{AC_1\cdot\sin A}{\sin B}=\frac{250\sin 76.95°}{\sin 45°}\approx 344.4$(km),

$t_1=\frac{BC_1}{40}=\frac{344.4}{40}\approx 8.6$(h).

同理,当$C_2\approx 121.95°$时,$BC_2\approx 79.83$ km,$t_2\approx 2.0$ h.

$t_2-t_1\approx 8.6-2.0=6.6$(h).

答:约 2 h后将要遭受台风影响,持续约 6.6 h.

评析 正确地画出几何图形是解决本题的关键.

【例8】 地球与金星的公转轨道分别是直径为 2.98×10^8 km 和 2.14×10^8 km 的近似圆，圆心为太阳．某时刻，地球和金星的连线与地球和太阳的连线成 18° 的角，如图 1-1-6，求此时地球与金星的距离．(地球、金星、太阳均视为点，结果保留3个有效数字)

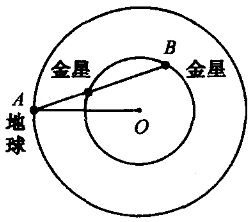


图 1-1-6

思路与技巧 解决本题的关键是将实际问题转化为三角形模型，从而用正弦定理解决，要注意题中给出的已知条件．

解答 如图 1-1-6 所示，设此刻太阳、地球、金星的位置分别在点 O、A、B 处，则 $OA=2.98\times10^8$ km，$OB=2.14\times10^8$ km，$\angle A=18^\circ$．

由正弦定理知，$\sin\angle ABO=\dfrac{OA\cdot\sin 18^\circ}{OB}=0.4303$．

因为 $OA>OB$，所以 $\angle ABO=25.49^\circ$，或 $\angle ABO=154.51^\circ$．

当 $\angle AB_1O=25.49^\circ$ 时，$\angle AOB_1=136.51^\circ$，$AB_1=\dfrac{OB_1\sin\angle AOB_1}{\sin 18^\circ}\approx4.77\times10^8$(km)．

当 $\angle AB_2O=154.51^\circ$ 时，$\angle AOB_2=7.49^\circ$，$AB_2=\dfrac{OB_2\sin\angle AOB_2}{\sin 18^\circ}\approx9.03\times10^7$(km)．

此时地球与金星之间的距离约为 4.77×10^8 km 或 9.03×10^7 km．

评析 解决实际问题的一般步骤为：将实际问题抽象为解三角形问题，通过推理计算，求得三角形问题的解，最后需还原为实际问题的解．

【例9】 某地出土一类似三角形状的古代玉佩(如图 1-1-7)，其中一角已破损，现测得如下数据：$BC=2.57$ cm，$CE=3.57$ cm，$BD=4.38$ cm，$B=45^\circ$，$C=120^\circ$，为了复原，计算原玉佩两边的长．(结果精确到0.01 cm)

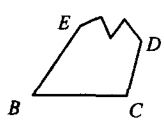


图 1-1-7

思路与技巧 本题是实际问题，可将玉佩补成三角形，从而将问题化为解三角形问题解决．

解答 如图 1-1-8，延长 BE、CD 交于点 A，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2.57$ cm，$B=45^\circ$，$C=120^\circ$，$A=180^\circ-(B+C)=15^\circ$，

$\because \dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}$，$\therefore AC=\dfrac{BC\sin B}{\sin A}\approx7.02$(cm)

同理 $AB\approx8.60$(cm)

答：原玉佩两边的长分别约为 7.02 cm，8.60 cm．

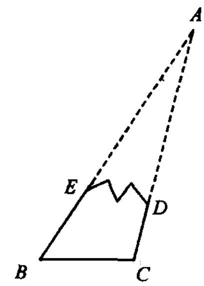


图 1-1-8

探究体验

[案例] 在正弦定理中，设 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$，请研究常数 k 与 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 R 的关系．

[探究] 在 Rt$\triangle ABC$ 中，以 AB 为直径作 Rt$\triangle ABC$ 的外接圆 O，$AB=2R$，R 为外接圆的半径，$\angle C=90^\circ$，如图 1-1-9(1) 所示．在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$a=AB\sin A=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C=2R\sin 90^\circ$．

所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$．

当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，如图 1-1-9(2) 所示，其外接圆圆心 O 位于 $\triangle ABC$ 的内部，连接 OB 交圆 O 于 D，连结 CD，$\angle D=\angle A$，$BD=2R$．

在 Rt$\triangle BCD$ 中，$BC=a=2R\sin D=2R\sin A$，同理 $b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$．

所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$．

当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，如图 1-1-9(3) 所示，其外接圆圆心 C 位于 $\triangle ABC$ 的外部，连结 OB，交圆 O 于 D，连结 CD，则 $BD=2R$，$\angle D=\angle A$．$\angle BCD=90^\circ$，所以 $BC=BD\sin D=BD\sin A$，即 $a=2R\sin A$．

同理，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$．

所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$．

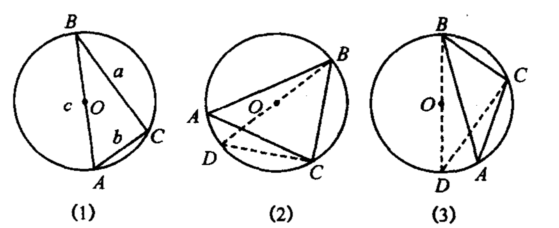


图 1-1-9

[结论] 在 $\triangle ABC$ 中，设 R 为外接圆半径，则有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$．

探究综合训练

练一练,你会了吗?

1. 在$\triangle ABC$中,已知$a=8,B=60^\circ,C=70^\circ$,则$b$等于 ( )

A. $4\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{6}$ D. $\frac{32}{3}$

2. 不解三角形,确定下列判断中正确的是 ( )

A. $a=7,b=14,A=30^\circ$,有两解

B. $a=30,b=25,A=150^\circ$,有一解

C. $a=6,b=9,A=45^\circ$,有两解

D. $b=9,c=10,B=60^\circ$,无解

3. 在$\triangle ABC$中,已知$b=\sqrt{2},c=1,B=45^\circ$,则$a$等于 ( )

A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}+1$ D. $3-\sqrt{2}$

4. 在$\triangle ABC$中,已知$a=5\sqrt{2},c=10,A=30^\circ$,则$B$等于 ( )

A. 105° B. 60°

C. 15° D. 105°或15°

5. 在$\triangle ABC$中,若$\lg a=\lg c=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$,且$B$为锐角,则$A$的值是 ( )

A. 30° B. 45° C. 67.5° D. 90°

6. 在$\triangle ABC$中,下列关系一定成立的是 ( )

A. $a>b\sin A$ B. $a=b\sin A$

C. $a<b\sin A$ D. $a\geqslant b\sin A$

7. 在$\triangle ABC$中,$B=135^\circ,C=15^\circ,a=5$,那么此三角形的最大边长为________.

8. 在$\triangle ABC$中,a、b、c分别是角A、B、C所对的边,若$A=105^\circ,B=45^\circ,b=2\sqrt{2}$,则$C=$________.

9. 在$\triangle ABC$中,已知$b=3,c=3\sqrt{3},B=30^\circ$,求$A$、$C$和边$a$.

10. 在$\triangle ABC$中,若$B=30^\circ,AB=2\sqrt{3},AC=2$,求$\triangle ABC$的面积.

11. 已知$\triangle ABC$中,$BC=a,AB=c$,且$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sqrt{2}c-b}{b}$,求$A$.

12. 已知$\triangle ABC$的面积为1,$\tan B=\frac{1}{2}$,$\tan C=-2$,求$\triangle ABC$的三边及$\triangle ABC$的外接圆的直径.

想一想,如何探究?

如图1-1-10,一辆汽车在一条水平公路上向正东行驶,到A处时测得公路南侧远处一山顶D在东偏南15°的方向上,行驶5 km后到达B处,测得此山顶在东偏南25°的方向上,倾角为8°,求此山的高度CD.

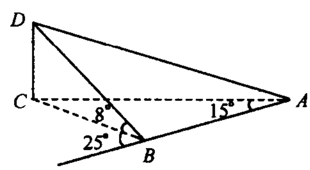


图1-1-10

试一试,经历这些活动

1. 求证:在△ABC 中,$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$

2. 已知△ABC 中,$A=60^\circ$,$B=45^\circ$,且三角形的一边长为 m,解这个三角形.

3. 已知方程 $x^2-(b\cos A)x+a\cos B=0$ 的两根之和等于两根之积,且 a、b 为△ABC 的两边,A、B 为 a、b 的对角,试判断△ABC 的形状.

读一读,你有何收获?

已知△ABC 中,a、b、c 分别为角 A、B、C 的对边,且 $a+c=2b$,$A-C=\frac{\pi}{3}$,求 $\sin B$ 的值.

1.1.2 余弦定理

探究目标

1. 知识与技能

(1)掌握余弦定理,能初步运用余弦定理解一些斜三角形.

(2)能够运用正弦定理解决某些与测量和几何计算有关的实际问题.

2. 过程与方法

(1)使学生在已有的知识的基础上,通过对任意三角形边角关系的探究,发现并掌握三角形中的边长与角度之间的数量关系——余弦定理.

(2)在探究学习中,认识到余弦定理可以解决某些与测量和几何计算有关的实际问题,帮助学生提高运用有关知识解决实际问题的能力.

3. 情感、态度与价值观

(1)通过对三角形边角关系的学习,经历数学探究活动的过程,培养探索精神和创新意识.

(2)在运用余弦定理的过程中,逐步养成实事求是、扎实严谨的科学态度,学习用数学的思维方式解决问题、认识世界.

探究指导

数学客厅

1. 余弦定理

三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍,即

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

余弦定理的推论:$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$,$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

在余弦定理的应用中,需注意:

(1)余弦定理揭示了任意三角形边角之间的客观规律,是解三角形的重要工具.

(2)余弦定理是勾股定理的推广,勾股定理是余弦定理的特例.

(3)在余弦定理中,每一个等式均含有四个量,利用方程的观点,可以知三求一.

(4)运用余弦定理时,因为已知三边求角,或已知两边及夹角求另一边,由三角形全等的判定定理知,三角形是确定的,所以解也是唯一的.

【例1】 利用其他方法证明余弦定理.

教材中利用几何法通过构造直角三角形,利用勾股定理证明了余弦定理,对定理的证明还可用向量法、解析法等.

证明 证法1:(向量法),如图1-1-11,$a^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AC}^2-2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos A+\overrightarrow{AB}^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

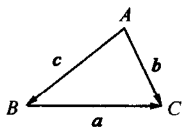


图1-1-11

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可证:$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

证法2:(解析法)如图1-1-12,以 A 点为原点,以△ABC 的边 AB 所在直线为 x 轴,以过 A 与 AB 垂直的直线为y 轴,建立直角坐标系,则 $A(0,0)$,$C(b\cos A,b\sin A)$,$B(c,0)$,由两点间的距离公式得

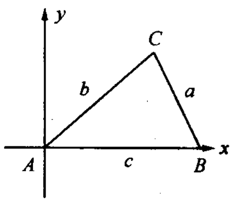


图1-1-12

$BC^2=(b\cos A-c)^2+(b\sin A-0)^2$,

$a^2=b^2\cos^2 A-2bc\cos A+c^2+b^2\sin^2 A$,

即 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

同理可证 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

证法3:(用正弦定理证明)因为 $a=2R\sin A$,$b=2R\sin B$,$c=2R\sin C$.

所以 $b^2+c^2-2bc\cos A=4R^2(\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A)$

$=4R^2[\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C\cos(B+C)]$

$=4R^2[\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin^2 B\sin^2 C+2\sin B\cdot\sin C\cos B\cos C]$

$=4R^2[\sin^2 B(1-\sin^2 C)+\sin^2 C(1-\sin^2 B)+2\sin B\sin C\cos B\cos C]$

$=4R^2[\sin^2 B\cos^2 C+\sin^2 C\cos^2 B+2\sin B\sin C\cdot\cos B\cos C]$

$=4R^2\sin^2(B+C)=4R^2\sin^2 A=a^2$

同理可证:$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

评析 用正弦定理证明余弦定理,用到了三角函数的有关公式,体现了正弦定理、余弦定理与三角知识的相互联系.

【例2】 已知△ABC 中,$a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$,求△$ABC$ 的各角度数.

思路与技巧 由比例的性质可以引入一个字母 k,用 k 表示 a,b,c,再由余弦定理求解各角.

解答 ∵ $a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$,

∴ 令 $a=2k$,$b=\sqrt{6}k$,$c=(\sqrt{3}+1)k$.

由余弦定理,有:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6+(\sqrt{3}+1)^2-4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

∴ $A=45°$.

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{4+(\sqrt{3}+1)^2-6}{2\times2\times(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{2},$$

∴ $B=60°$.

∴ $C=180°-A-B=180°-45°-60°=75°$.

评析 根据问题给出的条件 $a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$,设 $a=2k$,$b=\sqrt{6}k$,$c=(\sqrt{3}+1)k$,为使用余弦定理求角创造条件,这是解答本题的关键一步;在已知三边求三角时,一般先求小角,后求大角.

【例3】 已知钝角△ABC 的三边 $a=k$,$b=k+2$,$c=k+4$,求 k 的取值范围.

思路与技巧 由三角形中大边对大角可知角 C 为最大角,因此 C 为钝角,从而 $\cos C<0$,由余弦定理构建 k 的不等式.

解答 ∵ $c>b>a$,∴ 角 C 为钝角.

由余弦定理,得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{k^2-4k-12}{2k(k+2)}<0,$$

∴ $k^2-4k-12<0$,解得 $-2<k<6$.

而 $k+(k+2)>k+4$ ∴ $k>2$,故 $2<k<6$.

评析 ①在三角形中,三边长满足两边之和大于第三边,两边之差小于第三边.

②由余弦定理可以判断三角形内角的取值范围:

$0<A<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\cos A>0\Leftrightarrow b^2+c^2>a^2$,

$A=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\cos A=0\Leftrightarrow b^2+c^2=a^2$,

$\frac{\pi}{2}<A<\pi\Leftrightarrow\cos A<0\Leftrightarrow b^2+c^2<a^2$.

2. 余弦定理的应用

利用余弦定理可以解决以下两类解三角形的问题:

(1)已知三边,求三个角;

(2)已知两边和它们的夹角,求第三边,进而求其他角.

【例4】 在△ABC 中,已知 $a=2$,$b=2\sqrt{2}$,$C=15°$,求角 A、B 和边 c 的值.

思路与技巧 由条件知 C 为边 a、b 的夹角，故应由余弦定理来求 C 的值.

解答 $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

由余弦定理知，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4+8-2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})=8-4\sqrt{3}$，

$\therefore c=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

$\therefore \sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{a\sin 15^\circ}{c}=\frac{2\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

$\because b>a,\sin A=\frac{1}{2}$，

$\therefore A=30^\circ$，$\therefore B=180^\circ-A-C=135^\circ$.

评析 本题求出 c 后，用正弦定理求角 A，需要讨论确定 A 的值，而求出 c 后，再用余弦定理求角 A，可以避免讨论.

【例5】 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=3,c=3\sqrt{3},B=30^\circ$，求角 A、角 C 和边 a.

思路与技巧 题目已知两边和一边的对角，要求另一边和其他的角，可首先由正弦定理求出角 C，然后再求其他的边和角，亦可由余弦定理列出关于边长 a 的方程，首先求出边长 a，再由正弦定理求角 A、角 C.

解答 解法1：由 $b<c,B=30^\circ,b>c\sin 30^\circ=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 知，本题有两解.

$\because \sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore C=60^\circ$ 或 $C=120^\circ$.

当 $C=60^\circ$ 时，$A=90^\circ$，由勾股定理得

$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=6$；

当 $C=120^\circ$ 时，$A=30^\circ$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\therefore a=3$.

解法2：由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得

$3^2=a^2+(3\sqrt{3})^2-2\times3\sqrt{3}a\times\cos 30^\circ$，即

$a^2-9a+18=0$，

$\therefore a=6$ 或 $a=3$.

当 $a=6$ 时，由正弦定理得：

$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{6\times1}{3\times2}=1$，

$\therefore A=90^\circ,C=60^\circ$.

当 $a=3$ 时，$A=30^\circ,C=120^\circ$.

评析 比较两种解法，从中体会各自的优点，从而摸索出适合自己思维的解题规律和方法.

(1)解法1直接运用正弦定理，求出 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，注意 C 有两解，不要漏解.

(2)解法2利用余弦定理，列出关于 a 的等量关系式建立方程，运用解方程的方法求出 a 边的长.

【例6】 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=7,b=10,c=6$，判断 $\triangle ABC$ 的形状.

思路与技巧 $\triangle ABC$ 的形状由最大边 b 和角 B 的范围决定，故问题转化为求角 B 的范围.

解答 由余弦定理知 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{7^2+6^2-10^2}{2\times7\times6}=-\frac{5}{28}$，

在 $\triangle ABC$ 中，$0^\circ<B<180^\circ$，$\therefore 90^\circ<B<180^\circ$.

$\therefore \triangle ABC$ 为钝角三角形.

评析 在 $\triangle ABC$ 中，当角 B 为钝角时，有 $b^2>a^2+c^2$.

【例7】 已知 $\triangle ABC$ 中，$b=8,c=3,\sin A=\frac{\sqrt{247}}{16}$，求 a 的值，并判断三角形的形状.

思路与技巧 先由 $\sin A$ 求 $\cos A$，注意符号，再由余弦定理求 a.

解答 在 $\triangle ABC$ 中，$\because \sin A=\frac{\sqrt{247}}{16}$，$0^\circ<A<180^\circ$，

$\therefore \cos A=\pm\frac{3}{16}$.

当 $\cos A=\frac{3}{16}$ 时，由余弦定理得：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=8^2+3^2-2\times8\times3\times\frac{3}{16}=64$，$\therefore a=8$.

$\because a=b=8$，$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

当 $\cos A=-\frac{3}{16}$ 时，由余弦定理得：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=8^2+3^2+2\times8\times3\times\frac{3}{16}=82$，$\therefore a=\sqrt{82}$.

$\because \cos A=-\frac{3}{16}<0$，$\therefore 90^\circ<A<180^\circ$，$\therefore \triangle ABC$ 是钝角三角形.

评析 在此题中由 $\sin A$ 得 $\cos A$ 时，要考虑周全，否则易漏掉 $\cos A=-\frac{3}{16}$ 这一解.

3. 余弦定理的综合应用

【例8】 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，求 $\triangle ABC$ 的最大内角.

思路与技巧 本题需根据题设条件求出 a、b、c 的长，判断 a、b、c 中谁是最大的边，然后利用平面几何性质大角对大边，从而求出最大角.

解答 设 $b+c=4k,c+a=5k,a+b=6k(k>$

0)，则 $a+b+c=7.5k$，

解得 $a=3.5k,b=2.5k,c=1.5k$，

$\therefore$ a 是最大的边，即角 A 是$\triangle ABC$ 的最大角.

由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$.

$\because$ $0°<A<180°$，$\therefore$ $A=120°$，即最大角为 $120°$.

【例 9】 在四边形 $ABCD$ 中，$BC=a,DC=2a$，四个角 A、B、C、D 的度数的比为 $3:7:4:10$，求 AB 的长.

思路与技巧　如图 1-1-13，要求 AB 的长，需要把 AB 放到三角形中处理，为此连结 BD，由题设可求出角 A、B、C、D 的值，在$\triangle BCD$ 中，由余弦定理可求出 BD，进而解$\triangle ABD$，求 AB.

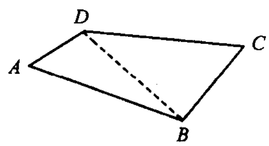


图 1-1-13

解答　设四个角 A、B、C、D 的度数分别为 $3x$，$7x$，$4x$，$10x(x>0)$

则由四边形内角和定理得

$3x+7x+4x+10x=360°$，解得 $x=15°$.

$\therefore$ $A=45°$，$\angle ABC=105°$，$C=60°$，$\angle ADC=150°$.

连结 BD，在$\triangle BCD$ 中，由余弦定理得

$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos C=a^2+4a^2-2a\cdot 2a\cdot\dfrac{1}{2}=3a^2$，$\therefore$ $BD=\sqrt{3}a$.

此时 $BC^2+BD^2=CD^2$，$\therefore$ $\triangle CBD$ 为直角三角形，$\angle CBD=90°$.

$\therefore$ $\angle ADB=150°-30°=120°$

由正弦定理知 $\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin A}$，

$AB=\dfrac{BD\cdot\sin\angle ADB}{\sin A}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$，$\therefore$ AB 的长度为 $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}a$.

评析　本题要求在四边形中求边 AB 的长，需构造三角形，通过解三角形解决，本题中求$\angle ADB$ 的度数是关键，要善于挖掘隐含条件 $BC^2+BD^2=CD^2$，如果不能发现这一条件，也可通过余弦定理求出$\angle BDC$ 的度数.

【例 10】 在$\triangle ABC$ 中，A 最大，C 最小，且 $A=2C$，$a+c=2b$，求此三角形三边之比.

思路与技巧　要求三边之比，已知 A 与 C 的关系，可由正弦定理求 $\cos C=\dfrac{a}{2c}$，再由余弦定理得出 a、b、c 的关系，结合 $a+c=2b$ 的条件，使问题解决.

解答　在$\triangle ABC$ 中，由正弦定理得

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sin 2C}{\sin C}=2\cos C$，即 $\cos C=\dfrac{a}{2c}$.

由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$\because$ $2b=a+c$，$\therefore$ $\dfrac{a}{2c}=\dfrac{a^2-c^2+\frac{1}{4}(a+c)^2}{2a\cdot\frac{a+c}{2}}$，

整理得 $2a^2-5ac+3c^2=0$，解得 $a=c$，或 $a=\dfrac{3}{2}c$.

$\because$ $A>C$，$\therefore$ $a>c$. $\therefore$ $a=c$ 不合题意.

当 $a=\dfrac{3}{2}c$ 时，$b=\dfrac{1}{2}(a+c)=\dfrac{5}{4}c$，

$\therefore$ $a:b:c=\dfrac{3}{2}c:\dfrac{5}{4}c:c=6:5:4$.

故此三角形的三边之比为 $6:5:4$.

评析　在应用正、余弦定理解三角形时，常用到三角函数的有关公式，体现了它们之间的联系，本题通过解方程求 a、c 的关系，体现了余弦定理与方程的联系.

【例 11】 在$\triangle ABC$ 中，已知 $a^2-a=2(b+c)$，$a+2b=2c-3$.

(1)若 $\sin C:\sin A=4:\sqrt{13}$，求 a,b,c；

(2)求$\triangle ABC$ 的最大角的弧度数.

思路与技巧　第(1)问，利用正弦定理可把小前提条件化为边的关系，再用大前提中的两个等式解得；第(2)问则需先判定哪个边是最大边，可以通过消元变换来比较.

解答　(1)由正弦定理，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得

$\sin C:\sin A=c:a=4:\sqrt{13}$.

$\therefore$ 可设 $c=4k,a=\sqrt{13}k(k>0)$.

$\therefore$ $13k^2-\sqrt{13}k-8k=2b=8k-\sqrt{13}k-3$.

即 $13k^2-16k+3=0$，

$\therefore$ $k=\dfrac{3}{13}$ 或 $k=1$.

$\because$ 当 $k=\dfrac{3}{13}$ 时，$b<0$，故舍去.

$\therefore$ $k=1$，即 $a=\sqrt{13}$，$b=\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$，$c=4$.

(2)$\because$ $a^2-a=2(b+c)$，$a+2b=2c-3$，

$\therefore$ 消去 $2b$，得 $c=\dfrac{a^2+3}{4}$，代入 $a^2-a-2b-2c=0$，得

$b=\dfrac{1}{4}(a^2-2a-3)=\dfrac{1}{4}(a-3)(a+1)$.

$\because$ $a,b,c>0$. $\therefore$ $a>3$

又 $b-c=\dfrac{1}{2}(-a-3)<0$，$c-a=\dfrac{a^2+3}{4}-a=\dfrac{1}{4}(a-3)(a-1)>0$，

$\therefore$ $b<c$，$a<c$，即 c 为最大边，$\therefore$ 角 C 最大.

$$\because \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+\frac{(-a-3)(a^2-a)}{4}}{2a\cdot\frac{1}{4}(a-3)(a+1)}$$

$$=\frac{4a^2-(a+3)a(a-1)}{2a(a-3)(a+1)}=\frac{4a-(a^2+2a-3)}{2(a^2-2a-3)}=-\frac{1}{2},$$

又 $0<C<\pi$，

$\therefore C=\frac{2}{3}\pi$.

评析 在△ABC中，总有大角对大边的关系存在，欲求△ABC的最大角（边）或最小角（边），只需找到相应的最大边（角）或最小边（角）．其具体方法应根据已知条件去选定．

4．余弦定理在实际中的应用

【例12】 如图1-1-14是公元前约400年古希腊数学家泰特托斯用来构造无理数$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\cdots$的图形．试计算图中线段$BD$的长度及$\angle DAB$的大小．（长度精确到0.1，角度精确到1°）

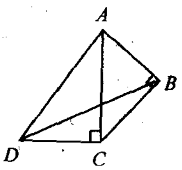


图1-1-14

思路与技巧 要求BD的长，在△BCD中，已知两边和它们的夹角，可用余弦定理解决，而$\angle BAD$的大小，问题转化为在△ABD中，已知三边，用余弦定理求解．

解答 在△BCD中，$BC=1$，$CD=1$，$\angle BCD=135°$，

$\because BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos\angle BCD=1^2+1^2-2\times1\times1\cdot\cos135°=2+\sqrt{2}$，

$\therefore BD\approx1.8$.

在△ABD中，$AB=1$，$BD=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$AD=\sqrt{3}$.

$$\because \cos\angle BAD=\frac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\cdot AD}$$

$$=\frac{1+(\sqrt{3})^2-(2+\sqrt{2})}{2\times1\times\sqrt{3}}\approx0.1691,$$

$\therefore \angle DAB\approx80°$.

评析 解题的关键是将实际问题转化为解三角形的模型，同时，要注意发现题目中的隐含条件．

【例13】 如图1-1-15所示，有两条直线AB和CD相交成80°角，交点是O，甲、乙两人同时从点O分别沿OA、OC方向出发，速度分别是4 km/h，4.5 km/h，3 h后两人相距多远（结果精确到0.1 km）？

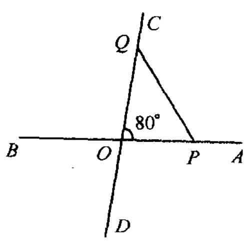


图1-1-15

思路与技巧 经过3 h后，甲到达点P．$OP=4\times3=12$(km)，乙到达点Q，$OQ=4.5\times3=13.5$ (km)，问题转化为在△OPQ中，已知OP、OQ、$\angle POQ$，求PQ的长．

解答 经过3 h后，甲到达点P，乙到达点Q，则在△OPQ中，$OP=4\times3=12$(km)，$OQ=4.5\times3=13.5$(km)，$\angle POQ=80°$.

由余弦定理知：

$$PQ=\sqrt{OP^2+OQ^2-2OP\cdot OQ\cos\angle POQ}$$

$$=\sqrt{12^2+13.5^2-2\times12\times13.5\times\cos80°}$$

$$\approx16.4(\text{km}).$$

答：3 h后两人相距约16.4 km.

评析 本题是利用余弦定理解决实际问题，关键是转化为数学模型．

探究体验

［案例］ 已知△ABC中，$AB=m$，$BC=m+p$（m,p均为正实数），$AC=\sqrt{m^2+n^2}$，若$m^2=n^2+p^2$，试分别对下列三种情况讨论△ABC是锐角三角形、直角三角形，还是钝角三角形．

(1) $m^2-mp-p^2>0$；(2) $m^2-mp-p^2=0$；(3) $m^2-mp-p^2<0$.

［探究］ 在△ABC中，AB，BC，AC这三条边中，AB是最短的一条边，而BC与AC的大小并不确定，因此为了判定△ABC的形状，需判定这两边的对角是锐角、直角，还是钝角，可借助余弦定理确定这两个角的余弦值的正负情况，然后即可作出正确的判断．

$$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$$

$$=\frac{m^2+m^2+2mp+p^2-m^2-n^2}{2AB\cdot BC}$$

$$=\frac{m^2+2mp+p^2-n^2}{2AB\cdot BC}$$

$$=\frac{2mp+2p^2}{2AB\cdot BC}>0,$$

$\therefore B$一定为锐角．

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$$

$$=\frac{m^2+m^2+n^2-m^2-2mp-p^2}{2AB\cdot AC}$$

$$=\frac{m^2-mp-p^2}{AB\cdot AC}.$$

［结论］ (1)当$m^2-mp-p^2>0$，即$0<\frac{p}{m}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$时，$\cos A>0$，$A$为锐角，此时△$ABC$为锐角三角形．