

高等理工科数学丛书

# 材料力学教程

下 册

M. M. 費洛宁柯-鮑罗第契主編

本書系根據蘇聯國立技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的費洛寧輯-鮑羅第契 (М. М. Филонович-Бородич) 主編、費洛寧輯-鮑羅第契、依采莫夫 (С. М. Изюмов)、奧利索夫 (В. А. Олисов)、庫特略采夫 (Н. Н. Кудрявцев)、馬里金諾夫 (Л. И. Малыгин) 合著“材料力學教程”下冊 (Курс Сопротивления Материалов, Часть II) 1956 年修訂第四版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為高等學校教科書。

原書分上下兩冊，中譯本上冊分兩分冊出版，下冊為一冊出版。下冊內容包括彎曲、扭轉和穩定方面的補充材料，彈性理論的簡要敘述，平板，薄壁杆以及彈性系的振動。

本書下冊旧版中譯本原由商務印書館出版，根據新版修訂後改由本社出版。

## 材 料 力 學 教 程

### 下 冊

---

М. М. 費洛寧輯-鮑羅第契主編

陶學文譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7號  
(北京市書刊出版業營業許可證出字第054號)

商務印書館上海廠印刷 新華書店發行

---

統一書號 15010·707 開本 860×1183 1/32 印張 16 10/16

字數 484,000 印數 1—2,500 定價 (10) 2.50

1954年5月第一次印刷 (共印8,000)

1953年11月第一次印刷 1953年11月上海第一次印刷

# 下 册 目 录

## 第一篇 弯曲理論的补充材料

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| 第一章 直梁弯曲理論的补充材料 .....           | 1  |
| § 1. 考虑彈性綫曲率的精确值 .....          | 1  |
| § 2. 彈性綫的精确微分方程在縱弯曲問題中的应用 ..... | 3  |
| § 3. 近似微分方程和較精确边界条件的联合应用 .....  | 6  |
| § 4. 剪切对彈性綫形狀的影响 .....          | 8  |
| § 5. 圖解分析法的应用 .....             | 12 |
| § 6. 細杆沿曲綫板的弯曲 .....            | 15 |
| § 7. 剪切对縱弯曲时临界荷重值的影响 .....      | 19 |
| § 8. 組合杆 .....                  | 21 |
| § 9. 材料不服从虎克定律的梁的应力状态 .....     | 24 |
| § 10. 材料不服从虎克定律的梁的位移 .....      | 31 |
| § 11. 剩余应力和剩余变形 .....           | 37 |
| § 12. 材料不服从虎克定律的杆的偏心压缩 .....    | 39 |
| § 13. 超过比例極限后的縱弯曲 .....         | 41 |
| 第二章 彈性綫微分方程的一般积分方法及其应用 .....    | 45 |
| § 14. 彈性綫一般方程, 哥西-克雷洛夫方法 .....  | 45 |
| § 15. 縱橫弯曲 .....                | 49 |
| § 16. 受縱橫弯曲的梁的計算例 .....         | 53 |
| § 17. 連續彈性地基上的梁 .....           | 61 |
| § 18. A. H. 克雷洛夫方法 .....        | 66 |
| § 19. 彈性地基上有限长梁的算例 .....        | 73 |
| § 20. 起始参数法及其推广, 边界参数 .....     | 79 |
| 第三章 曲梁弯曲理論的补充材料 .....           | 85 |
| § 21. 曲梁的微分关系式 .....            | 85 |
| § 22. 曲梁弯曲的微分方程 .....           | 88 |
| § 23. 承受内外均布压力的厚壁圓筒 .....       | 90 |
| § 24. 組合圓筒內的应力, 厚壁圓筒的溫度应力 ..... | 96 |

# 第一篇 弯曲理論的补充材料

## 第一章 直梁弯曲理論的补充材料

### § 1. 考虑彈性綫曲率的精确值

为了得到受弯直梁的彈性綫微分方程,在本書上册第六和十四章中,在关系式

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{M}{EJ} \quad (1.1)$$

中,曲率用它的近似值  $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2}$  代替,这在横向弯曲情形的彈性綫形狀上只引起極微小的誤差,所以不必用更精确的方程

$$\frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M}{EJ} \quad (1.2)$$

为了对于根据近似方程(1.1)所作計算的精确度有一个概念,我們拿如下的簡單例子来比較方程(1.2)与(1.1)所給出的結果。

一悬臂梁(圖 1),受加在另一端的力偶  $m_0$  而弯曲。梁的剛度  $EJ$  是常数。

作精确解时,由方程(1.1)得:

$$\frac{1}{\rho} = + \frac{M}{EJ} = + \frac{-m_0}{EJ} = - \frac{m_0}{EJ} = \text{常数},$$

即悬臂梁弯成半径为  $\rho = \frac{EJ}{M}$  的圆弧,凹面向下,因为  $\frac{1}{\rho} < 0$ 。

右端  $B$  的梁軸切綫傾角等于(圖 1):

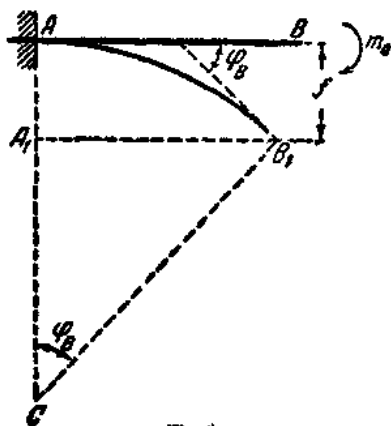


圖 1.

$$\varphi_B = \frac{\widehat{AB_1}}{\rho} = \frac{l}{\rho},$$

或

$$\varphi_B = \frac{m_0 l}{EJ}. \quad (1.8)$$

此右端的撓度

$$f = AC - A_1C = \rho(1 - \cos \varphi_B)$$

或把  $\cos \varphi_B$  展成級数

$$\cos \varphi_B = 1 - \frac{\varphi_B^2}{2!} + \frac{\varphi_B^4}{4!} - \dots,$$

得：

$$f = \rho \left( \frac{\varphi_B^2}{2!} - \frac{\varphi_B^4}{4!} + \dots \right) = \frac{l}{\varphi_B} \left( \frac{\varphi_B^2}{2!} - \frac{\varphi_B^4}{4!} + \dots \right) = l \left( \frac{\varphi_B}{2!} - \frac{\varphi_B^3}{4!} + \dots \right).$$

將公式(1.8)中的  $\varphi_B$  代入上式,最后求出:

$$f = l \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{m_0 l}{EJ} \right) - \frac{1}{24} \left( \frac{m_0 l}{EJ} \right)^3 + \dots \right] = \frac{1}{2} \frac{m_0 l^2}{EJ} - \frac{m_0^3 l^4}{24(EJ)^3} + \dots \quad (1.4)$$

現用近似方程,得:

$$v'' = -\frac{m_0}{EJ} = \frac{m_0}{EJ}.$$

积分之,并从条件  $x=0$  时  $v=v'=0$ , 求出积分常数,得:

$$v = \frac{m_0 x^2}{2EJ}.$$

在右端:

$$v_B = f_1 = \frac{m_0 l^2}{2EJ}.$$

这結果和精确結果(1.4)之差近似等于:

$$f - f_1 = -\frac{m_0^3 l^4}{24(EJ)^3}.$$

或用对于撓度  $f_1$  的百分数表示:

$$\Delta = 100 \frac{f - f_1}{f_1} = -\frac{100}{12} \left( \frac{m_0 l}{EJ} \right)^2 = -\frac{100}{3l^2} \left( \frac{m_0 l^2}{2EJ} \right)^2 = -33.3 \left( \frac{f_1}{l} \right)^2.$$

如果取挠度为  $\frac{1}{500}l$ , 那么

$$\frac{f_1}{l} = \frac{1}{500},$$

而  $\Delta = -38.3 \times \frac{1}{250000} = 0.00013\%$ ,

即误差根本是微不足道的。

研究极细杆件可能发生的弹性大变形时, 必须用方程(1.2); 欧拉详细地研究了这一理论<sup>①</sup>; 它在现代已应用于仪器和机器中柔细零件的计算<sup>②</sup>。

## § 2. 弹性线的精确微分方程在梁弯曲问题中的应用。

现用方程(1.1)研究一端固定的杆的纵弯曲(图2)来作为例子, 引用曲率的精确式

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

于是得到:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EJ} = -\frac{Pv}{EJ} = -a^2 v,$$

其中  $a^2 = \frac{P}{EJ}$ ,

或者, 微分得到

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -a^2 \frac{dv}{ds} = -a^2 \sin \varphi.$$

这是一个微分方程, 其中待求函数  $\varphi(s)$  是  $Ox$  轴的切线倾角。二边乘以恒等式

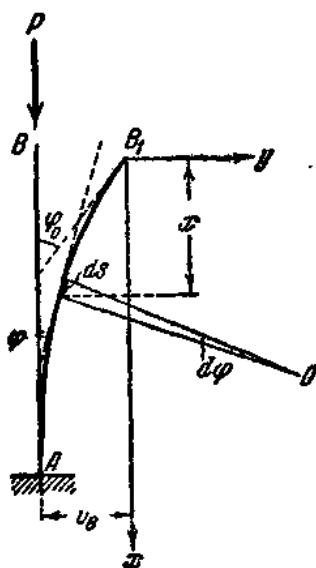


图 2.

① 参见 Л. Эйлер, Метод нахождения кривых линий, ГИИ, Москва, 1934, 附录 I, 关于弹性线。

② 例如, 参见 Е. Н. Попов, Теория и расчёт гибких упругих деталей, 柴青红旗勋章的列宁格勒空军工程学院出版, 列宁格勒, 1947。

$$\frac{d\varphi}{ds} ds = d\varphi,$$

得:  $\frac{d^2\varphi}{ds^2} \frac{d\varphi}{ds} ds = -a^2 \sin \varphi d\varphi,$

或  $d \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = a^2 d \cos \varphi.$

积分之得:  $\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = a^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$

其中  $\varphi_0$  是任意常数, 等于坐标原点处的切綫傾角(圖 2)。我們有:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d\varphi}{ds} = +a \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} = a \sqrt{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (1.5)$$

或

$$\frac{d\varphi}{2\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = a ds, \quad (1.6)$$

引用記号  $\sin \frac{\varphi_0}{2} = p$ , 并按公式

$$\sin \frac{\varphi}{2} = p \sin \theta, \quad (1.7)$$

用函数  $\theta$  代替函数  $\varphi(s)$ , 使当  $\varphi=0$  时,  $\theta=0$ , 当  $\varphi=\varphi_0$  时,  $\theta=\frac{\pi}{2}$ 。

从(1.7)有:

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = p \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = p \cos \theta;$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \theta}; \quad \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = p \cos \theta d\theta$$

或  $d\varphi \sqrt{1 - p^2 \sin^2 \theta} = 2p \cos \theta d\theta,$

由此  $d\varphi = \frac{2p \cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \theta}}$

把所有这些代入方程(1.6), 把它改写成:

$$\frac{d\theta}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \theta}} = a ds. \quad (1.8)$$

我們只限于找  $B$  端撓度, 并注意到,

当  $s=0$  时,  $\theta=0$  (在  $A$  点);

当  $s=l$  时,  $\theta=\frac{\pi}{2}$ ,

所以, 沿杆的全長积分 (从  $s=0$  到  $s=l$ ), 得:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-p^2 \sin^2 \theta}} = al. \quad (1.9)$$

左边是第一种全椭圆积分, 是参数  $p = \sin \frac{\varphi_0}{2}$  的函数; 其数值可由有关的椭圆积分表中求得。

为了求  $B$  端撓度, 用关系式

$$\frac{dv}{ds} = \sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

或按照 (1.7) 和 (1.8),

$$dv = - \frac{2p \sin \theta \sqrt{1-p^2 \sin^2 \theta}}{a \sqrt{1-p^2 \sin^2 \theta}} d\theta,$$

$$\text{即} \quad dv = - \frac{2p}{a} \sin \theta d\theta.$$

这式子沿杆長从  $B$  点积分到  $A$  点, 得:

$$0 - v_B = - \frac{2p}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin \theta d\theta = \frac{2p}{a},$$

即

$$v_B = - \frac{2p}{a}. \quad (1.10)$$

采取如下計算步骤較方便: 定下杆端傾角  $\varphi_0$ , 求得参数  $p = \sin \frac{\varphi_0}{2}$ , 然后求出 (1.9) 中的积分值: 由此得到量  $a = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ ; 用这方法求得对应的荷重  $P$ , 其次按 (1.10) 計算撓度  $v_B$ 。

我們看到, 在上面的解答中不仅用了曲率的精确式, 而且还考虑到較精确的边界条件; 只略去了縱向压缩引起的杆的縮短。



### § 3. 近似微分方程和較精確边界条件的联合应用

公式(1.9)給出荷重的临界值;求临界值时,只需令  $\varphi_0 = 0$ , 即研究杆的上端偏离等于零的情形;此时

$$p = \sin \frac{\varphi_0}{2} = 0,$$

而由公式(1.9)得到:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = al = \frac{\pi}{2}; \quad a = \frac{\pi}{2l}; \quad a^2 = \frac{P}{EJ} = \frac{\pi^2}{4l^2},$$

$$P_K = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

由此可見,当我们应用近似微分方程

$$v'' + a^2 v = 0 \quad (1.11)$$

时,所确定的临界荷重是精确的;但近似解的缺点还是有的,这就是有一个任意积分常数  $C_1$  不能确定,因此不可能求得荷重超过临界值时的杆件挠曲形式。现在我們要証明,实际这并非因为微分方程是近似的,而是因为如下的固定端边界条件

$$\text{当 } x=l, \quad v'=0 \quad (1.12)$$

是不精确的;这个条件如果写得比較精确,应该是

$$\text{当 } x=l-\Delta, \quad v'=0, \quad (1.13)$$

式中  $\Delta$  是杆弯曲时的自由端下降距离。 $\Delta$  值可近似算出。利用已得到的彈性綫方程:

$$v = C_1 \sin ax. \quad (1.14)$$

杆的上端的下降距离是

$$\Delta = \int_0^l (ds - dx) = \int_0^l (\sqrt{1+v'^2} - 1) dx.$$

如果弯曲很少,因此  $v'$  很小,可以近似地写出:

$$\sqrt{1+v'^2} \approx 1 + \frac{v'^2}{2};$$

把它代进上面的公式,得到:

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dx.$$

代进由(1.14)求出的  $v'$  值

$$v' = C_1 a \cos ax,$$

并作积分,就得到:

$$A = C_1^2 k,$$

式中

$$k = \frac{a(2al + \sin 2al)}{8}; \quad (1.15)$$

現在, 杆的固定端条件(1.13)得到下面的形式:

$$C_1 a \cos[a(l - C_1^2 k)] = 0.$$

这个等式可分写成三个式子:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0; \\ a &= 0; \\ \cos[a(l - C_1^2 k)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

前二个式子给出無义解( $v=0$  和  $P=0$ ), 第三个式子則是确定  $C_1$  的条件。取这个超越方程的最小正根

$$a(l - C_1^2 k) = \frac{\pi}{2}. \quad (1.17)$$

由此看出  $C_1$  不再是不确定的:

$$C_1 = \pm \sqrt{l \left(1 - \frac{\pi}{2al}\right) \frac{1}{k}}. \quad (1.18)$$

順便指出, 如果在方程 (1.16) 中令  $C_1=0$ , 該方程即成为求临界荷重的普通条件  $\cos al=0$ ; 此时杆仍是直的, 这已經在本書上册第十四章 § 141 中作过說明。

根据公式 (1.15) 計算  $k$  时, 因为我們只研究荷重超过临界值很少的情形, 故可近似地令

$$2al \approx \pi; \quad \sin 2al \approx 0,$$

因此  $al = \frac{\pi}{2}$ ; 于是由 (1.15) 得到:

所以,

$$k = \frac{\pi^2}{8},$$

$$C_1 = \pm \sqrt{l \left(1 - \frac{\pi}{2al}\right) \frac{8}{\pi^2}}. \quad (1.19)$$

如果进一步考虑到:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{P}{EJ} = \frac{P}{P_K} \frac{\pi^2}{4l^2}; & a &= \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{P}{P_K}}; \\ \frac{\pi}{2al} &= \sqrt{\frac{P_K}{P}}; & \frac{8}{\pi^2} &= \frac{16l}{\pi^2} \sqrt{\frac{P_K}{P}}, \end{aligned}$$

并且把所有这些都代入公式 (1.19), 最后就得到:

$$C_1 = \pm \frac{4l}{\pi} \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{P_K}{P}}\right) \sqrt{\frac{P_K}{P}}}. \quad (1.20)$$

把这  $C_1$  值代进弹性綫方程(1.14), 得到弹性綫方程的最終形式为

$$v = \pm \frac{4i}{\pi} \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{P_k}{P}}\right)} \sqrt{\frac{P_k}{P}} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2l} \sqrt{\frac{P}{P_k}}\right). \quad (1.21)$$

我們要指出, 按照(1.20), 只有在  $P > P_k$  的情形  $C_1$  值才是实数; 当  $P < P_k$  时,  $C_1$  是虚数, 弹性綫方程(1.21)沒有意义; 在后一情形下, 只有無义解  $C_1 = 0$  仍然有效, 这就是說杆仍然是直的, 杆的直綫位置是稳定的。量(1.20)是杆的自由端撓度; 但由此算得的撓度值比前面所引的精确解小得多。

由上述一切, 可作結論如下: 縱弯曲問題的近似解能正确地确定临界荷重, 如果用精确的边界条件, 还能把二个任意积分常数都求出来; 荷重超过临界值时的弹性綫, 則因为微分方程(1.11)的近似而是不精确的。

#### § 4. 剪切对弹性綫形狀的影响

(一) 在梁的横向弯曲情形下, 由于所得誤差微不足道, 沒有道理要

引用曲率的精确值来求弹性綫。在某些情形下, 剪切倒可能有相当大的影响, 这是在本書上册的弹性綫理論中沒有考虑过的。

现在来估計这种影响, 并指出在什么情形下必須考虑它。首先我們可以証实, 梁在只有剪力所引起的剪变形时, 弯曲是可能的。为了使討論简化, 暂时假定横断面內的剪应力是均

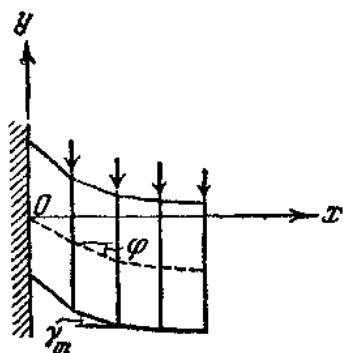


圖 3.

匀分布的; 按照剪切虎克定律, 此时剪变形沿断面高度也应该均匀分布, 而断面不应翘曲(圖 3)。于是, 显然可写出

$$\tau_m = \frac{q}{F}, \quad (1.22)$$

$$\gamma_m = \frac{\tau_m}{G} = \frac{q}{GF}, \quad (1.23)$$

其中  $F$  是梁的横断面面积,  $G$  是剪切弹性系数。

公式(1.22)给出某断面内剪应力的平均值, 公式(1.23)给出剪变形平均值。

如果各断面剪力不同, 那么对应的平均剪变形  $\gamma_m$  也就不同, 于是, 正如从圖 3 所看到的, 梁发生弯曲, 而梁轴切线倾角等于  $\gamma_m$ :

$$\frac{dv_1}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \gamma_m = -\frac{Q}{GF}.$$

这里取负号, 因  $\frac{dv_1}{dx} < 0$ ;  $Q > 0$ ;  $v_1$  是單由剪变形引起的挠度。

把最后等式的二边都对  $x$  微分, 得到剪切影响引起的轴綫曲率的近似值:

$$\frac{d^2v_1}{dx^2} = -\frac{1}{GF} \cdot \frac{dQ}{dx}. \quad (1.24)$$

彈性理論中所闡明的較精確的問題解証明, 值(1.24)稍微小了一些。为了安全地估計剪变形对軸綫弯曲的影响, 我們在計算中不用平均剪应力(1.22), 而用中性層的剪应力, 这是最大的或接近于最大的剪应力:

$$\tau = \frac{QS}{Jb} = \frac{Q}{Fa}, \quad (1.25)$$

其中

$$a = \frac{Jb}{FS}. \quad (1.26)$$

系数  $a$  决定于断面形狀;  $S$  和  $b$  是断面中性軸处的值。把(1.22)用(1.25)代替, 得到的就不是(1.24)而是:

$$\frac{d^2v_1}{dx^2} = -\frac{1}{GFa} \frac{dQ}{dx}. \quad (1.27)$$

把按公式(1.27)的曲率值和弯矩引起的曲率相加, 得到考虑剪切影响的彈性綫微分方程是:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EJ} - \frac{1}{GFa} \frac{dQ}{dx} \quad (1.28)$$

或

$$\frac{d^3v}{dx^3} = \frac{1}{EJ} \left( M - \beta^2 \frac{dQ}{dx} \right), \quad (1.29)$$

其中

$$\beta^2 = \frac{EJ}{GF\alpha} = \frac{ES}{Gb} = 2(1+\mu) \frac{S}{b} = \frac{2(1+\mu)}{a} i^2; \quad (1.30)$$

这裡的  $\mu$  是波桑系数,  $i$  是断面的惯性半径。

但因为 
$$\frac{dQ}{dx} = -q,$$

所以有:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EJ} (M + \beta^2 q). \quad (1.31)$$

括弧中考虑剪切对弯曲的影响的附加项  $\beta^2 q$ , 和第一项  $M$  相比較, 对于断面高度比起梁長度很小而断而在中性層的寬度又不太小的梁, 是極其微小的。

例如, 对于矩形断面  $h \times b$ , 按(1.30)求得:

$$\beta^2 = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} \cdot \frac{1}{b} 2(1+\mu) = (1+\mu) \frac{h^2}{4};$$

对于直径为  $d$  的圓断面, 得:

$$S = E y_c = \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{\pi} = \frac{d^3}{12};$$

$$\beta^2 = 2(1+\mu) \frac{d^3}{12} \frac{1}{d} = (1+\mu) \frac{d^2}{6}.$$

(二) 对于均布荷重  $q$  作用下的簡單梁, 在矩形断面情形有:

$$M = \frac{qx(l-x)}{2},$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{q}{4EJ} [2x(l-x) + (1+\mu)h^2].$$

引用無因次橫标

$$\xi = \frac{x}{l},$$

將有: 
$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi} \cdot \frac{1}{l}; \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2v}{d\xi^2} \cdot \frac{1}{l^2},$$

把上而的微分方程写成:

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} = \frac{ql^4}{4EJ} \left[ 2\xi(1-\xi) + (1+\mu) \left( \frac{h}{l} \right)^2 \right].$$

把这方程积分, 根据边界条件: 当  $\xi=0$  和  $\xi=1$  时,  $v=0$ , 确定任意常数, 得:

$$v = -\frac{ql^4}{24EJ} \left[ \xi^4 - 2\xi^3 + \xi + 3(1+\mu) \left( \frac{h}{l} \right)^2 \xi(1-\xi) \right].$$

令  $\xi = \frac{1}{2}$ , 得到跨中点的最大挠度:

$$f = -\frac{5ql^4}{384EJ} \left[ 1 + \frac{12}{5}(1+\mu) \left( \frac{h}{l} \right)^2 \right].$$

方括弧中第二项考虑剪切影响; 例如, 令  $\mu = \frac{1}{3}$ , 我们求得当  $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$  时, 第二项的值等于 0.032, 剪切影响不大; 当  $\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$  时, 已得 0.128, 即剪切影响使跨中点挠度约增大 13%。

(三) 在薄壁断面情形下, 剪切对挠度的影响将是巨大的。用  $h$  表示断面高度, 按 (1.30) 有:

$$\beta^2 = 2(1+\mu) \frac{S}{b} = 2(1+\mu) \frac{S}{bh^2} h^2.$$

对于苏联现行工字形断面标准规格 (ГОСТ 10016—39):

对于 № 10

$$\beta^2 = 2(1+\mu) \frac{27.92h^2}{0.45 \times 10^2} = 1.24(1+\mu)h^2;$$

对于 № 60

$$\beta^2 = 2(1+\mu) \frac{1800h^2}{1.7 \times 60^2} = 0.58(1+\mu)h^2;$$

而我们在上面已得到: 对于圆断面

$$\beta^2 = 0.17(1+\mu)h^2,$$

对于矩形断面  $\beta^2 = 0.25(1+\mu)h^2$ 。

可见, 在工字形断面的情形下, 剪切影响相当大, 特别是小号码的型钢; 例如, 和矩形断面比较系数  $\beta$ :

对于  $I \approx 10$ , 是  $\frac{1.24}{0.25} = 5$  倍,

对于  $I \approx 60$ , 是  $\frac{0.58}{0.25} = 2.3$  倍。

### §5. 圖解分析法的应用

考虑剪切影响而研究梁的弯曲时,極便于应用圖解分析法;为了考虑剪变形,我們从(1.31)看到,只需在  $M$  圖所表示的假想荷重上,添加和給定的連續荷重成比例的荷重  $\beta^2 q$ 。如果梁上有集中荷重,把这些荷重暂时假想成分布在極微小段  $\Delta o$  上的連續荷重;把它們乘上  $\beta^2$  后,添加在假想荷重上;然后取当  $\Delta o \rightarrow 0$  时的極限,我們求得在假想荷重上應該直接添加集中荷重,但每一个都乘以  $\beta^2$ 。

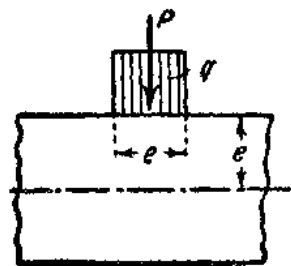


圖 4.

假想荷重中有集中荷重时,这荷重下的假想剪力  $Q$  將有突变,而实际梁的彈性綫在对应的地方就折断了;这就表明此地所用近似方法稍安全地考虑了集中荷重的影响,它們影响的真正值將略小些,因为实际上彈性綫是不会折断的。这样会较正确些:把每一集中荷重用分布在,例如說,長度为  $e$  的一段上,  $e$  等于梁軸到加力点的距离(圖 4),于是荷重  $q$  將等于:

$$q \approx \frac{P}{e}.$$

應該再一次提起注意,上面所作計算稍微把剪切对梁軸弯曲的影响放大了些,因为我們在公式(1.27)中用了每一断面的剪变形的最大值。而一般的說,本节所述考虑剪切对梁变形影响的方法是相当粗糙的,这是由于上面所說明的公式(1.26)中  $\alpha$  系数的数值的不确定性。在上册第十七章 §158 中曾指出  $\alpha$  系数的另一个較精确求法。

例 1. 一悬臂梁,左端固定,受强度为  $q$  的均布荷重(圖 5, a),試写出彈性綫

方程,并求最大挠度  $f$ 。

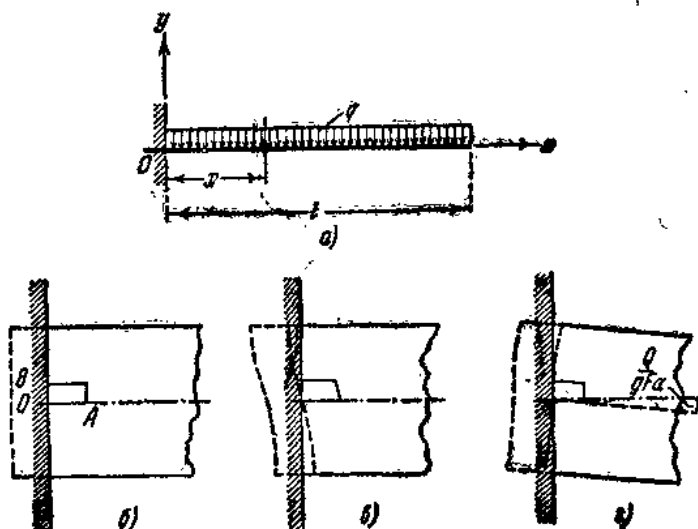


图 5.

弹性线微分方程的形式是:

$$EJv'' = M + \beta^2 q = -\frac{q(l-x)^2}{2} + \beta^2 q.$$

积分二次得:

$$EJv' = -\frac{q(l-x)^3}{6} + \beta^2 qx + C,$$

$$EJv = -\frac{q(l-x)^4}{24} + \beta^2 q \frac{x^2}{2} + Cx + D.$$

为了确定任意常数  $C$  和  $D$ , 引进边界条件。

第一个条件, 当  $x=0$  时  $v=0$ , 表示悬臂梁左端有支点; 这个条件和以前不考虑剪切对弹性线的影响时的条件是相同的。第二个条件表明左端夹住, 这个条件当考虑剪切影响时是不确定的; 实际情况如下: 假定我们研究梁轴线在支点处的矩形单元体 (图 5, b), 那末, 因为单元体在梁弯曲时发生歪斜变形, 就可能有不同方法夹住此单元体。例如, 假定用普通的条件: 当  $x=0$  时  $v'=0$ , 就是夹住了水平线元素  $OA$ , 但横断面上的元素  $OB$  则因断面翘曲而发生转动 (图 5, c); 假定我们希望夹住横断面上的元素  $OB$ , 那末弹性线在支点  $O$  处的倾角就等于该点的剪切角  $-\frac{Q}{GFa}$ ; 此时, 左端条件写成为:



$$\text{当 } x=0, v' = -\frac{ql}{GF\alpha} = -\frac{ql}{GF\alpha}$$

或

$$EJv' = -\frac{EJ}{GF\alpha} \cdot ql = -\beta^2 ql;$$

下面我們把这情形算完。

在边界条件中代进  $v$  和  $v'$  值, 得到:

$$D = \frac{ql^4}{24} \quad \text{和} \quad C = -\frac{ql^3}{6} - \beta^2 ql,$$

而弹性綫方程的最終形式是:

$$v = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{q(l-x)^4}{24} - \frac{ql^3}{6}x + \frac{ql^4}{24} + \frac{\beta^2 qx^2}{2} - \beta^2 qlx \right] =$$

$$= -\frac{ql^4}{8EJ} \left\{ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^4 + \frac{4}{3} \left( \frac{x}{l} \right) - \frac{1}{3} - \frac{4\beta^2}{l^2} \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{l} \right) \right] \right\}.$$

在圖 5, a 所示情形, 第二个边界条件是:

$$\text{当 } x=0 \text{ 时 } v'=0, \text{ 即 } 0 = -\frac{ql^3}{6} + C = 0; \quad C = \frac{ql^3}{6}.$$

这二情形的挠度請讀者自行求出。在这二种夹住情形下, 虽然弹性綫不相同, 应力分布則还是完全一样的, 因为左端夹住情况只有运动学的性質; 前·情形与后·情形的关系就是差一个悬臂梁作为绝对刚体的轉动。第五章 § 29 中, 对这种情况將作較詳細的和一般形式的研究; 在第六章 § 33 中, 用弹性力学方法对梁的純弯曲問題作比較一般性的討論时, 也将遇見这种情况。

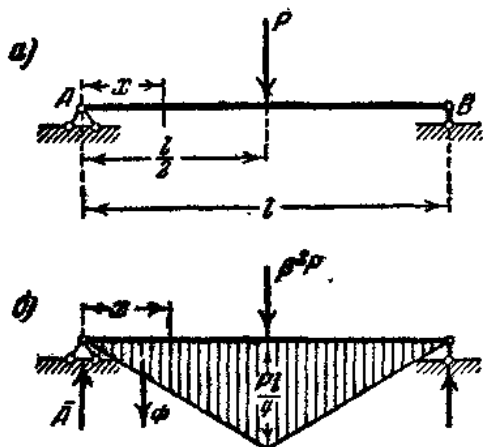


圖 6.

例 2. 一梁 (圖 6, a), 跨中点受力  $P$ , 試写出弹性綫方程, 并求最大挠度  $f$ 。

由于弹性綫的对称, 只須写出左半部 ( $x \leq \frac{l}{2}$ ) 的弹性綫方程。用圖解分析法。帶有对应的荷重的假想梁, 示如图 6, б.

先求左端假想反力:

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \frac{Pl}{4} \frac{l}{2} + \frac{\beta^2 P}{2} =$$

$$= \frac{Pl^2}{16} + \frac{P\beta^2}{2}.$$

点  $x$  的挠度: