真正高考

精选典题　专家评析　闪电式提高

各个击破

圆100万学子清华北大梦!!

【审订】全国著名特高级教师
【主编】金　诚

打造学科状元

数学·函数 不等式 导数

安徽人民出版社

真正高考

精选典题　专家评析　闪电式提高

各个击破

圆100万学子清华北大梦!!

主　　编：金　诚

本册主编：汪小祥　张劲松

编　　者：杜艳秋　贾　亮　张玉玲

　　　　　王潼章　林雪芬　金　伟

数学·函数、不等式、导数

安徽人民出版社

责任编辑：王世超　周子瑞
装帧设计：秦　超

图书在版编目(CIP)数据

真正高考·各个击破　数学：普通高考专题解读/金诚主编.
-合肥：安徽人民出版社，2006
ISBN 7-212-02826-6

Ⅰ. 真…　Ⅱ. 金…　Ⅲ. 数学课-高中-升学参考资料
Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 031012 号

真正高考·各个击破　数学·函数、不等式、导数

金　诚　主编

出版发行：安徽人民出版社
地　　址：合肥市金寨路 381 号九州大厦　邮编：230063
经　　销：新华书店
制　　版：合肥市中旭制版有限责任公司
印　　刷：合肥杏花印务有限公司
开　　本：880×1230　1/32　印张：51　字数：150 万
版　　次：2006 年 5 月第 1 版　2006 年 5 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 7-212-02826-6
定　　价：60.00 元（共 6 册）
印　　数：00001—15000

前　言

《真正高考》系列丛书之《数学》，按照国家最新考试大纲和最新教学大纲的要求编写，为便于教师指导、便于学生复习，均酌情按照知识的系统性编排.

全套书共分六册：

第一册《选择题解法》

第二册《函数、不等式、导数》

第三册《三角函数与平方向量》

第四册《解析几何》

第五册《立体几何与空间向量》

第六册《数列、概率与统计》

栏目设置：

△考试内容及知识纲络：展示在每一章之首，使学生明确本章要掌握的知识范围.

△考纲要求：依据新的考试说明，对每一小节提出高考的具体要求，使学生明确每个知识点应达到的水平.

△知识要点：使学生明确本节内容主要知识点，便于学生查阅与记忆.

△典例解析：分析典型例题，尽量覆盖知识点和解题技巧与方法，力求上升为数学思考和数学方法，精选与本节相关的近两三年高考题进行重点解析、创新，力求自然消化.

△基础达标训练、能力提升训练：收集了典型、新颖、考查能力的部分试题，使学生通过解题训练理解知识，掌握方法，形成能力，为高考做好充分准备.

△本章测试：编写少而精、新而优的题目，对本章相关知识点的掌握进行检测，便于查缺补漏，点点过关，步步为营.

本书在编写过程中尽量体现"一题多解"、"一法多用"，注重对问题的点拨和解决问题后的点评，使学生能够学到举一反三和触类旁通的数学内容，努力体现数形结合、分类讨论、归纳猜想等数学的重要思想和方法，有助于学生把知识转化为能力，由能力上升为思想，重点突出，难点分散，便于学生的理解和掌握.

本书既适合高三学生专项强化使用，又适合于高中同步学习的强化及提高，是一本实用性的备考助学用书。尽管我们做了很大的努力，但由于客观条件所限，书中难免有疏漏不足之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

《真正高考》丛书编委会

Contents

目录

第Ⅰ部分 函 数

概 况

本部分主要包括两大类：一是集合及简易逻辑知识，它是掌握和使用数学语言的基础．二是函数，它的内容丰富，是高中数学非常重要的部分，是进一步学好高等数学的基础．集合观点和函数思想是分析问题和解决问题的重要的数学思想和方法之一，它们的应用广泛，几乎贯穿于整个高中数学的始终．本部分的重点是：集合与简易逻辑的语言和思想的熟练掌握，函数的图像和性质，二次函数，指数函数，对数函数的灵活应用；难点是：数形结合思想的建立——用文氏图及数轴为工具解决相关代数问题；充要条件的探索，函数图像的变换，函数与其他数学知识综合应用，含参数方程的解法与讨论．

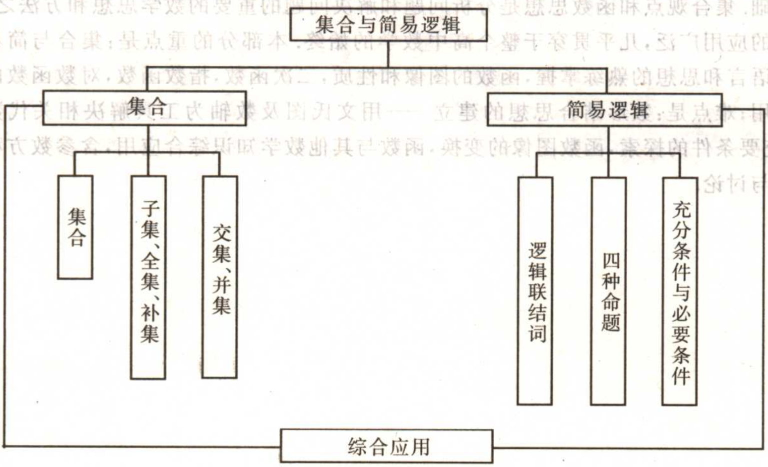
一、集合与简易逻辑

1. 考纲要求

①理解集合，子集、补集、交集、并集的概念，了解空集和全集的意义，了解属于，包含、相等关系的意义，掌握有关的术语和符号，并会用它们正确地表示一些简单的集合。

②理解逻辑联结词“或”，“且”，“非”的含义，理解四种命题及其相互关系，会用反证法证明简单的数学命题。

2. 知识网络



3. 高考动态

高考命题已越来越重视数学的文化价值. 本部分包括了两个互相关联又相对独立的内容：集合、简易逻辑. 这两个内容都是中学数学的基础，是表达数学知识，进行数学交流的重要工具，因此在高考中备受青睐.

考试热点之一是集合，主要考查以下两方面的内容：一是对集合基本概念的互异性，元素与集合的关系，集合与集合的关系，集合的运算；二是考查对集合知识的应用水平.

在考查集合知识的同时突出考查准确使用数学语言的能力和用数形结合的思想解决问题的能力.

考试热点之二是命题，主要考查两方面内容：一是命题的四种形式及原命题与逆否命题的等价性；二是充要条件的判定.

在考查命题知识的同时，还主要考查命题转换、逻辑推理和分析问题的能力.

4. 备考建议

(1)把握复习重点，树立良好的数学学习品德，本部分要解决的数学问题主要有运用集合的语言、符号和“或”、“且”、“非”等逻辑联结词来解答有关集合和简易逻辑的基本概念的问题.

无论是从学习的内容还是从学习的方法上作为高中数学的入门知识，都是全新的内容，因此考题多半都以这一思想方法的体现而展开，在备考时要做到：

①深刻理解、准确掌握集合、元素、子交并补、命题、充要条件等基本概念和“或”、“且”、“非”等逻辑联结词的含义，以便更准确地解答有关集合简易逻辑的概念的问题.

②强化数形结合思想，自觉地运用文氏图、数轴的直观性帮助分析和理解问题，提高形象思维能力，并进一步提高抽象思维能力.

(2)重视数学思想方法的复习

本章运用的主要数学思想方法有数形结合思想、分类讨论思想、函数方程思想、等价转化思想、反证法思想，在复习过程中要有意识地对这些思想方法进行归纳、总结，以达到正确、灵活地应用它们来处理好相关的问题.

典例解析

例 1 设集合 $s=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $|x|<1\}$，在 s 中定义运算“$*$”，使得 $a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}$.

(1)证明 $a\in s,b\in s$，那么 $a*b\in s$；

(2)证明：对于 s 中的任何元素 a,b,c 都有 $(a*b)*c=a*(b*c)$ 成立.

(3)试问：是否存在单位元素 e，使得 $a*e=e*a=a$.

(4)试问：是否存在不变元素 i，使得 $a*i=i*a=i$.

点拨 对于问题(1)，(2)则首先要读懂 s 及“$*$”的含义，要明确其意义再作处理，而对于问题(3)，(4)存在性问题则是采用“先假设、再推导、定结论”方法完成.

解析 (1) $\because a\in s,b\in s\quad\therefore |a|<1,\ |b|<1$.

下面若能证明出 $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$，则命题得证.

$\because (a+b)^2-(1+ab)^2=a^2+b^2-1-a^2b^2=-(1-a^2)(1-b^2)$

$\because |a|<1,\ \therefore a^2<1\quad |b|<1\quad \therefore b^2<1$

$\therefore (a+b)^2-(1+ab)^2<0$

即 $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$

$\therefore a*b=\dfrac{a+b}{1+ab}\in s.$

(2) $\because (a*b)*c=\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)*c=\dfrac{\dfrac{a+b}{1+ab}+c}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}\cdot c}$

$$=\frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$$

又 $a*(b*c)=a*\left(\dfrac{b+c}{1+bc}\right)=\dfrac{a+\dfrac{b+c}{1+bc}}{1+a\cdot\dfrac{b+c}{1+bc}}$

$$=\frac{a+b+c+abc}{1+bc+ab+ac}$$

$\therefore (a*b)*c=a*(b*c).$

(3)假设结论成立,即存在单位元素 e,使得 $a*e=e*a=a$,

则 $\dfrac{a+e}{1+ae}=\dfrac{e+a}{1+ea}=a.$

$\therefore e=ea^2$

$\because e$ 为单位元素,故 $e\neq 0$

$\therefore e=ea^2$ 不能对一切满足 $|a|<1$ 的实数 a 恒成立,故不存在满足于条件的单位元素 e.

(4)设存在不变元素 i,使得 $a*i=i*a=i$

则 $\dfrac{a+i}{1+ai}=\dfrac{i+a}{1+ia}=i$

变形得 $a=i^2a.$

$\therefore i^2=1,\ i=\pm 1.$

即 $i=\pm 1$ 时,等式对一切满足 $|a|<1$ 的实数 a 恒成立,故存在满足于条件的不变元素 $i=\pm 1$,使 $a*i=i*a=i$ 成立.

这里对存在性问题处理采用的是"以求代证"的方法来实现的,即假设其存在,并以此为推导的先决条件,通过恒等变形求其结果,比较其推导结论是否满足题目要求,若满足则存在,若不满足,则不存在.

设 a、$b\in\mathbf{R}$,$A=\{(x,y)\mid x=n,y=an+b,n\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15\ m\in\mathbf{Z}\}$,$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$,都是平面 xoy 内的点集,试问是否存在 a,b,使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 和 $(a,b)\in C$ 同时成立.

这仍然是一道存在性问题,可先假设存在实数 a、b 使结论成立,找出结论成立的必要条件,如果存在,再证明它的充分性

方法一(数形结合法)

设存在 a、b 使 $A\cap B\neq\varnothing$,且 $(a,b)\in C$

则 a、b 满足的充要条件是

$$\begin{cases} na+b-3n^2-15=0 & ① \\ a^2+b^2\leqslant 144 & ② \end{cases}$$

有解.

②式表示点 (a,b) 为圆 $x^2+y^2=12^2$ 的圆上或圆内点.

而①式则表点 (a,b) 为直线 $l:nx+y-3n^2-15=0$ 上点.

原点 O 到 l 的距离 $d=\dfrac{3n^2+15}{\sqrt{1+n^2}}=3\sqrt{n^2+1}+\dfrac{12}{\sqrt{1+n^2}}\geqslant 12$.

且等号在 $\dfrac{12}{\sqrt{1+n^2}}=3\sqrt{n^2+1}$ 即 $n^2=3$ 时成立.

又 $n\in\mathbf{Z}$,故 n 不能为 $\pm\sqrt{3}$,∴方程①、②组成的方程组无解.

∴不存在实数 a、b,使 $A\cap B\neq\varnothing$,且 $(a,b)\in C$.

方法二:(判别式法):前同解法一

由①得　$b=3n^2-15-an$ 代入②

$$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0 \qquad ③$$

对于③　∵$(1+n^2)>0$

而　$\Delta=-36(n^2-3)^2<0\quad(n\in\mathbf{Z}\ n\neq\pm\sqrt{3})$

故　$(1+n^2)a^2-2b(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144>0$.

∴不等式③无解.

∴不存在 a、b,同时满足 $A\cap B\neq\varnothing$,$(a,b)\in C$

方法三(不等式法)前同解法一

对于①　$na+b-3n^2-15=0$　成立

则　$\Delta=a^2+12b-180\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant -12(b-15)$　④

对于②　$a^2\leqslant 144-b^2$　⑤

结合④、⑤　$(b-6)^2\leqslant 0\qquad b=6$.

当 $b=6$ 时,$a^2=108$, $n^2=\dfrac{a^2}{36}=3$.

∵$n\in\mathbf{Z}$, ∴$n^2=3$ 不成立.

故不存在同时满足①、②的实数 a、b.

故 a、b 不存在.

集合作为工具,可渗透到高中数学的各章各节,解此类题型的关键是把握好集合中的元素以及集合间运算所表现出的几何意义要凸现出高中数学学习中“重理解、重分析、重推理”的学习特征.

如果 $s=\{x|x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$,$T=\{x|x=4k\pm 1,k\in\mathbf{Z}\}$,那么

(A)$S\subsetneqq T$　　(B)$T\subsetneqq S$

(C)$S=T$　　(D)$S\neq T$

点拨　说明两集合相等可通过三种渠道实现.

(1)验证两集合的元素相同.

(2)若是用描述法表示的两个集合可验证两集合的属性能够互推(充要条件).

(3)一般情况 下,可证 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$. 从而 $A=B$.

解析　方法一:

$\because s=\{x\mid x=2n+1,n\in \mathbf{Z}\}=\{\cdots-5,-3,-1,1,3,5\cdots\}$

又 $\because T=\{x=4k\pm1,k\in \mathbf{Z}\}=\{\cdots-5,-3,-1,1,3,5\cdots\}$

有　$S=T$　选(C)

方法二:

$$由\ 2n+1=\begin{cases}4k+1 & n=2k\\ 4k-1 & n=2k-1\end{cases}\quad k\in \mathbf{Z}.$$

$\therefore S=T$　选(C)

方法三:

S 为奇数组成的集合,而 T 中的元素为奇数,故有 $T\subseteq S$.

又任取 $x\in S$,当 n 为偶数时,即 $x=2k$ 时,$x=4k+1\in T$;当 n 为奇数时,$n=2k-1$,$x=4k-1\in T$,又有 $S\subseteq T$

$\therefore S=T$　选(C)

解法四(选择题的逻辑分析法)

首先 $S\supseteq T$,若 $S\supsetneqq T$ 时,有(B)真,从而(D)真,这与选择及"有且仅有一项成立"矛盾,故(B)不真,得 $S=T$,(C)为真.

解法五(选择题逻辑分析法)

(C)、(D)是矛盾关系,必有一真一假,故(A)、(B)为假,又由 $S\supseteq T$,且(B)为假,得(D)为假,$\therefore$(C)为真.

归纳警示　判断或证明两个集合相等不外乎是从其组成的内容上,或形式上加以比较,只有熟练地认知组成集合的内容,方能通过以上诸方法处理加以确定.

例 4　集合 A 与 B 的并集 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$,当 $A\neq B$ 时,(A、B)与(B、A)视为不同的对,问这样的(A、B)有多少对?

点拨　由于 $A\cup B$ 只含有三个元素,故可考虑 穷尽 A、B 的所有可能情况的讨论,当然本题也可以通过文氏图来解决,因为文氏图对有限集内容的划分更为清晰,易处理本题及类似的问题.

解析　方法一

对 A 的可能性进行分类处理:

(1)$A=\varnothing$时,$B=\{a_1,a_2,a_3\}$　此时(A、B)有一对.

(2)$A=\{a_1\}$或$\{a_2\}$或$\{a_3\}$，由于对称关系，故只须考虑 $A=\{a_1\}$情形，$A=\{a_1\}$，$B=\{a_2,a_3\}$或$\{a_1,a_2,a_3\}$，故此情形有 $2\times3=6$ 种.

(3)$A=\{a_1,a_2\}$或$\{a_1,a_3\}$或$\{a_2,a_3\}$. 同样这三者也具有对称关系. 故只须考虑 $A=\{a_1,a_2\}$情形.

$B=\{a_3\}$或$\{a_1,a_3\}$或$\{a_2,a_3\}$或$\{a_1,a_2,a_3\}$

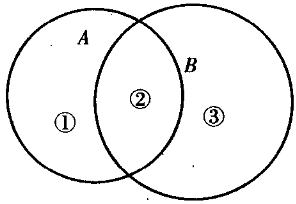
此情形共有 $4\times3=12$ 种

(4)当 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$时，B 可为 A 一切子集.

即有 $2^3=8$ 种情形.

从而所求的$(A、B)$对数为 $1+6+12+8=27$(对)

解法二：作出文氏图可知，在 $A\cup B$ 中共有(最多有)3 个互不相交的区域(如下图)，从而 a_1,a_2,a_3 中每一个元素填入 $A\cup B$ 中都有 3 种选择，故所求的$(A、B)$对的个数为 $3^3=27$(对).



归纳警示 解法一是穷举法，其意义明了便于理解，所要注意的是在分类过程中要做到“不漏不重”. 完整题意，解法二具有一般意义，从中可以看到文氏图的结构特点及其优越性，通过简单的“乘法法则”处理易完成题目的要求.

例 集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，若 $A=B$，则$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2006}+\frac{1}{y^{2006}})$的值是多少？

点拨 本题求值归结于求出 x,y，而这两个未知数的确定，需从 $A=B$ 中导出，即从 $A=B$ 条件中形成两个独立的等量关系. 有集合性质知两个集合相等其元素之和，之积分别相等，即

$$\begin{cases} x+xy+\lg(xy)=|x|+y \\ x\cdot xy\cdot\lg(xy)=0 \end{cases}$$

此外还可以借助 A、B 集合中元素的特性进行分析并通过分类讨论方法处理之.

解析 方法一：

$\because A=B$，则 $\begin{cases} x+xy+\lg(xy)=|x|+y & ① \\ x\cdot xy\cdot\lg(xy)=0 & ② \end{cases}$

$\because x\neq0,y\neq0$ 由② $\lg(xy)=0$ $\therefore xy=1$

$\therefore$ $\begin{cases} x+1=|x|+y & ③ \\ xy=1 & ④ \end{cases}$

由③$y=x+1=|x|$ 得 $x^2+x=|x|\cdot x+1$

当 $x\geqslant0$ 时，$x=1$ 成立，此时 $y=1$ 又 $x\neq xy$，故矛盾

$\therefore x=1$ 舍去.

当 $x<0$ 时，$x^2+x=-x^2+1$.

$2x^2+x-1=0 \Rightarrow x=-1$ 或 $x=\frac{1}{2}$

$x=-1$，$y=-1$ 满足要求

$x=\frac{1}{2}$，$y=2$，$\because x<0$ 故舍去

$\therefore(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2006}+\frac{1}{y^{2006}})=-2+2-2+2-2\cdots+2=0$

方法二：

根据元素的互异性，由 B 知 $x\neq0$，$y\neq0$

$\because 0\in B$，且 $A=B$

$\therefore 0\in A$，故只有 $\lg(xy)=0$，从而 $xy=1$

又由 $1\in A$，及 $A=B$，得 $1\in B$

$\therefore$ 有 $\begin{cases}xy=1\\|x|=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}xy=1\\y=1\end{cases}$

得 $x=y=1$ 或 $x=y=-1$.

由集合元素的互异性得 $x=y=1$ 不满足题意，故舍去.

$\therefore x=y=-1$，代入得：

$$(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2006}+\frac{1}{y^{2006}})=-2+2-2+2\cdots+2=0$$

方法一中方程组解起来比较复杂，但可解. 而方法二则根据集合中元素的特性，逐一讨论确定 x，y 值较易. 其实这两种方法对于本题类型问题处理是相辅相成的，不可用其中一种方法替代另一种方法. 同学们可以根据题目条件具体内容进行选择，方法要得当，要体现解决问题的可操作性.

已知 $M=\{x\mid|x+1|+|x-3|>8\}$，$P=\{x\mid x^2-(a-8)x-8a\leqslant0\}$

(1)试求 a 的一个值，使它成为 $M\cap P=\{x\mid5<x\leqslant8\}$ 的一个充分但不必要条件.

(2)试求 a 的取值范围，使它成为 $M\cap P=\{x\mid5<x\leqslant8\}$ 的一个必要但不充分条件.

判断"充要条件"、"充分不必要条件"，"必要不充分条件"，"既不充分又不必要条件"要从两个方面考虑问题：一是"谁是条件谁是结论"；二是依据定义判断"谁能推出谁，谁不能推出谁"，只有熟练掌握这两点，才能解决好题目的要求.

$|x+1|+|x-3|>8$

ⅰ)当 $x>3$ 时，$2x>10\Rightarrow x>5$ $\quad\therefore x>5$

ⅱ)当 $-1\leqslant x\leqslant3$ 时，$4>8\Rightarrow x\in\varnothing$

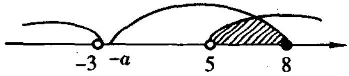
ⅲ)当 $x<-1$ 时，$2-2x>8\Rightarrow x<-3$，$\therefore x<-3$

$\therefore M=\{x\mid x<-3$ 或 $x>5\}$

$P=\{x\mid(x+a)(x-8)\leqslant0\}$

(1)$M\cap P=\{x\mid5<x\leqslant8\}$

得：$-3\leqslant -a\leqslant 5$ 即 $-5\leqslant a\leqslant 3$.



取 $a=1$，可得 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$

但 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$，未必有 $a=1$

$\therefore a=1$ 是 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 成立的一个充分不必要条件.

(2)$M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 得 $-5\leqslant a\leqslant 3$

此时可推出 $a\leqslant 3$，

$\because a\leqslant 3$ 时未必有 $-5\leqslant a\leqslant 3$ 成立，从而 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 不能成立，因此，$a\leqslant 3$ 是 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 的一个必要但不充分条件.

对于"充分必要"问题，辨别条件与结论的标志有二：一是题设中出现"A 是 B 的……条件"时，A 是条件，B 是结论；二是出现"A 成立的……条件是 B"，则 B 是条件，A 是结论. 对于本例，则先找出 $M\cap P=\{x|5<x\leqslant 8\}$ 的充要条件，再进一步得出必要不充分条件或充分不必要条件，另外还需要注意的是，这类题目的结果一般不唯一.

已知 p：方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负根；q：方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根，若 p 或 q 为真，p 且 q 为假，求 m 的取值范围.

先将 p、q 中满足条件的 m 的取值范围解出，然后根据 p 或 q 为真，p 且 q 为假可知命题 p 和 q 中必一真一假；求出 m 的范围.

p：$\begin{cases}\Delta=m^2-4>0\\ m>0\end{cases}\Rightarrow m>2.$

q：$\Delta'=|b(m-2)^2|-16<0$

$1<m<3$

$\because p\cup q$ 为真 $p\cap q$ 为假.

$\therefore p$ 和 q 中必为一真一假.

①p 为真，q 为假

有：$\begin{cases}m>2\\ m\leqslant 1 \text{ 或 } m\geqslant 3\end{cases}\Rightarrow m\geqslant 3.$

②p 为假，q 为真

有：$\begin{cases}m\leqslant 2\\ 1<m<3\end{cases}\Rightarrow 1<m\leqslant 2.$

结合①、②，m 的取值范围是：

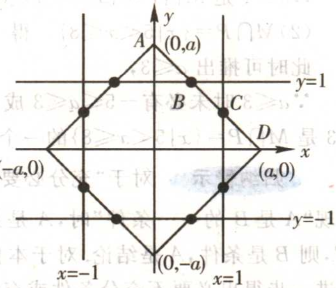
$$\{m|m\geqslant 3 \text{ 或 } 1<m\leqslant 2\}$$

对命题内容需要计算，化简的问题，应首先对各涉及的简单命题进行化简，再依据题目的要求列出所有可能情况，逐一进行讨论处理，求出题目所要求完成的结果.

已知 $A=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|=a(a>0)\}$. $B=\{(x,y)\,|\,|xy|+1=|x|+|y|\}$. 如果 $A\cap B$ 是平面上的正八边形的顶点所构成的集合，求 a 的值.

点拨 首先应理解 A、B 集合的几何意义.集合 A 是由顶点为 $(\pm a,0)$，$(0,\pm a)$ 的正方形四条边组成，集合 B 则是由四条直线 $x=\pm1$，$y=\pm1$ 构成，其次根据 $A\cap B$ 的具体内容为八个点，且这八个点顺次相连构成正八边形，由此求出 a 的值.

解析 $\because A\cap B$ 是平面上的正八边形的顶点所构成的集合，故 $a>1$ 且 $a\neq2$.



(ⅰ)当 $1<a<2$ 时，可形成如右上图的正八边形，此时 $\begin{cases}y=1\\|x|+|y|=a\end{cases}\Rightarrow|x|=a-1$

$x_{1,2}=\pm(a-1)$

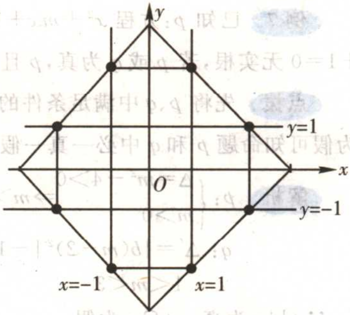
正八边形边长为 $2a-2$.

$\because|AB|+|BC|+|CD|=\sqrt{2}a$.

$\therefore2\sqrt{2}(a-1)+2a-2=\sqrt{2}a$

得 $a=\sqrt{2}$. 成立

(ⅱ)当 $a>2$ 时，$A\cap B$ 是可形成右图形状的正八边形，此时正八边形的边长只能为 2.



$\therefore\sqrt{2}a-2\sqrt{2}=2$

$a=2+\sqrt{2}$.

综合(ⅰ)、(ⅱ)，得 $a=\sqrt{2}$ 或 $a=2+\sqrt{2}$.

归纳警示 解答集合问题，必须弄清题目的要求，正确理解各集合的含义，理解集合间运算的几何意义，本题以集合为载体，考查平面几何以及代数相关知识，解答过程中体现了分类讨论的数学思想方法.

基础达标训练

一、选择题

1. (05 年·湖北)设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b|,a\in P,b\in Q\}$，若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

2. 给出以下三个命题(其中 U 为全集)

①$[(\complement_uP)\cap M]\cap(\complement_uM)=\varnothing$

②$P\cup[M\cap(\complement_uP)]=P\cup M$

③$[P\cap(\complement_uP)]\cup(P\cap M)=P$

其中正确的命题的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 设集合 $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，$E=\{x\mid x^2-3x+2=0\ x\in\mathbf{R}\}$，$F=\{x\mid \cos\frac{\pi}{2}x=0,x\in\mathbf{R}\}$，则 $(\complement_U E)\cap F=$（　　）.

A. $\{-3,-1,0,3\}$　　B. $\{-3,-1,1,3\}$

C. $\{-3,-1,3\}$　　D. $\{-3,3\}$

"$\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$"是"$\alpha=k\pi+\frac{5}{12}\pi$"，$k\in\mathbf{Z}$ 成立的（　　）.

A. 必要非充分条件　　B. 充分非必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

二、填空题

某中学初三(3)班共有学生 60 人，其中参加数学兴趣小组的有 30 人，参加物理兴趣小组的有 34 人，则既参加数学小组，又参加物理小组的人数的最大值与最小值分别为________、________.

已知 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 2^{1-x}+a\leqslant 0,x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________.

三、解答题

以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质：①P 中的元素有正数、有负数.

②P 中的元素有奇数、有偶数.

③$-1\notin P$.

④若 $x,y\in P$，则 $x+y\in P$.

试证明：

ⅰ) $0\in P$；

ⅱ) $2\notin P$.

在一次国际学术会议上，k 个科学家使用 p 种不同语言进行交流，如果任何两个科学家都至少使用一种共同的语言，但没有任何两个科学家使用的语言完全相同，求证 $k<2^{p-1}$.