水木艾迪教育丛书

W & W Education

考研数学应试导引与进阶

微积分

通用辅导讲义

刘坤林 谭泽光 莫 骄 俞正光 葛余博 编著

清华大学出版社

ISBN 7-302-12873-1

9 787302 128731 >

定价：48.00元

W&W Education 水木艾迪教育丛书

考研数学应试导引与进阶

微积分

通用辅导讲义

刘坤林 谭泽光 莫 骄 俞正光 葛余博 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者根据新的研究生入学统一考试大纲，结合多年的教学经验和考研辅导经验精心编写而成的．主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、原函数与不定积分、定积分、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数的概念及微分、重积分、曲线积分、曲面积分、数项级数、函数项级数等．每部分内容均按照“知识综述与应试导引”、“问题集粹”、“自测与模拟题”等进行编排．

本书主要针对参加研究生入学考试的理工类与经济类考生，同时也可作为大学本科和专科学生的教学辅导用书．

图书在版编目(CIP)数据

微积分通用辅导讲义/刘坤林等编著．—北京：清华大学出版社，2006.5
(考研数学应试导引与进阶)
ISBN 7-302-12873-1

Ⅰ．微…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．微积分—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 036785 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
组稿编辑：刘　颖
文稿编辑：王海燕
印 刷 者：北京嘉实印刷有限公司
装 订 者：三河市李旗庄少明装订厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×260　**印张**：31.25　**字数**：800 千字
版　　次：2006 年 5 月第 1 版　2006 年 5 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-12873-1/O・526
印　　数：1～4000
定　　价：48.00 元

丛 书 序

全国硕士研究生入学统一考试作为一种选拔性考试，并不同于等级考试．命题工作人员的任务是结合对基本知识点的理解与不同知识点的交叉运用能力，在试题中设置不同深度的“陷阱”，以求从能力、水平上将庞大的考生队伍拉开档次，进而实现国家选拔人才的目的．考生的任务是在全面准确地理解知识系统的前提下，掌握识破命题“陷阱”的能力，力争在考场上以居高临下的知识洞察力与良好的应试状态，一举成功．

学习数学需要培养悟性，应试考研数学需要一定的数学知识洞察力．所谓悟性或洞察力，是指对数学基本概念的深入理解与准确把握．而这种理解与把握，首先要求对基本概念与基本知识点的理解要准确、完整，进一步才是掌握知识的系统性、交叉性与灵活性．没有对基本概念与基本知识点理解的准确性与完整性，就谈不上掌握知识的系统性及灵活运用的能力，当然更谈不上解题的思路与技巧．

本套《考研数学应试导引与进阶》作为考研数学的通用辅导讲义，其宗旨是：“为考生面对考试造就一种居高临下的知识洞察力和感觉良好的临场状态．”这也是水木艾迪考研辅导班的教学宗旨．

我们一贯强调，首先注重知识的基础性、系统性与完整性．从分析历届的试题组成来看，完全基础性题目一般占 60 分以上（满分 150 分），并且基本知识点在综合题目中也占有相当的分量，基础性知识点的失误往往导致选错综合题目的切入点，最后造成的是全局性错误．相反，如果对基本知识点理解准确、全面、系统，则对题目的切入点就会准确无误，即使解答过程中有个别错误，也往往是局部错误，损失不大．以一种加权的估计来分析，基本知识点在全部试卷中所占的比重可高达 120 分．从阅卷过程中所反映出的问题来看，考生出现的大量错误是由于对基本概念与知识点理解的不准确或不完整，甚至是对基本知识点理解的扭曲所造成的．

对于基本知识点的理解与学习，应首先做到理解上的准确性、全面性，其次是系统性与交叉性．还应注意基本概念的背景和各个知识点间的相互关系，适量做题，少做难题，不做偏题是可取之策．对与基本知识点相关的基本题目涉及的方法与技巧，要多总结与分析，力争做到举一反三，以一当十，这样的训练会促使考生的能力与技巧成熟起来，即使遇到难题，也会容易地找到切入点与思路．

《考研数学应试导引与进阶》以最简捷的篇幅梳理数学三门课程中的若干基本知识点，以及不同知识点之间的内在联系，配合适量典型的基本题型与知识交叉运用题型，引导读者高效率地做到对基本概念与基础知识点理解的准确性与完整性，并逐渐过渡到对掌握知识的系统性与交叉运用能力的训练．通过对基本题目涉及的方法与技巧的总结与分析，对综合题目中知识点交叉模式的了解与熟悉，以达到对这些内容具有敏感性．全套讲义每个章节具有统一的编排格式：

［**知识综述与应试导引**］ 依据全国硕士研究生入学统一考试大纲中要求的重点，对知识模块给予简短的综述，突出重点，详解难点，指出读者容易忽略的薄弱环节及存在的弱点，必要时给出识破命题“陷阱”的特别提示．

[**问题集粹**] 以学生提问的方式，由编者设计覆盖基本知识点与概念交叉运用能力的若干问题，配以解答与导引，同时针对此类问题，配合若干典型例题，力图使读者牢固掌握相应知识点及具有处理相关题型的能力.

[**自测与模拟题**] 每一讲后配置典型练习题，给读者自我检测及训练发挥的空间，充分体现教学双向互动的过程. 在书后给出练习题的解答、答案与提示(做题时请不要先看解答或答案)供读者核实自己的解答.

书中所有例题与练习题，都是经过编者精心研究与讨论，进而设计与编排所成. 这一工作是基于作者在清华大学与清华大学考研辅导班的多年教学经验积累，以及对全国硕士研究生入学统一考试要求与试题类型深入研究的结果，具有重要的典型性与代表性. 对于这些例题与练习题，读者可视自身情况选读或选做，但应注意两点：一是立足于独立思考与亲自动手练习，二是应将每一个题目作为一类问题，以达到触类旁通的目的.

参与本书编写的老师为清华大学在职教师，他们是一个教学与研究成绩卓著的教授群体，长期担任水木艾迪考研辅导班主讲，突出了双向了解的优势：了解全国硕士研究生入学统一考试大纲与命题走向，了解考生的知识状况与实际需求. 他们有许多教材与专著出版，广大考生给予了很高的评价，他们也愿做广大考生和学生的良师益友. 基于长期丰富的教学研究与授课经验积累，经过对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学进行长期专门的深入研究，倾心编写出这套讲义，真诚希望为在读大学生的学习，以及参加研究生入学统一考试的考生送去一份智慧，提供一份帮助.

本教材的读者范围包括参加全国硕士研究生入学统一考试的考生，包括数学试卷一、二、三、四的全体应试者，大学本科在读学生.

特别指出的是，不少人认为经济类考生只学过经济类高等数学就够了，其实这是一种误导. 试卷三、四的历年题目表明，题目的题型与难度都与试卷一、二相当，并且与试卷一、二共用题目的比例逐年提高. 那些少量含有经济术语的题目(2005—2006 年完全没有此类题目)不会成为答卷障碍，如最大利润问题与最小成本问题等不过是一般理工科数学教学中的普通例题而已. 如果考生有较好的理工科数学基础，应答试卷三、四将不会遇到任何困难，2004—2006 年的数学试卷更是进一步说明了这一特点.

清华大学出版社与北京水木艾迪教育培训学校为本教材的出版做了大量有效的工作，清华大学数学科学系李津教授，以及许多老师对本教材的编写工作给予真诚的鼓励与支持，编者在此向他们真诚致谢.

限于作者水平和时间仓促，对书内的疏漏与不当之处，敬请读者批评指正，以便重印和再版时予以改正.

编　者

2006 年 2 月于清华大学

作者简介

刘坤林教授

清华大学责任教授，从事基础数学与应用数学的教学与研究工作，获国家精品课程奖二等奖与国家教学成果奖二等奖，两次获清华大学教学优秀奖. 研究方向：控制理论，系统辨识与随机系统建模及预测，并行计算. 1994—1995 年在美国 Texas A&M University 与 Duke University 任访问研究教授并讲学. 发表学术论文 30 多篇，著有教材《工程数学》,《系统与系统辨识》,《微积分》，主编《大学数学——概念方法与技巧》,《大学数学清华考研经典备考教程》,《高等数学典型题题典——考研数学应试能力进阶》等书籍. 先后 7 次获国家及省市部级科学技术进步奖. 长期担任水木艾迪考研辅导班主讲，清华大学 MPA 考前培训班主讲. 对全国硕士研究生入学统一考试大纲与教学要求有深入的研究. 讲课特点：深入浅出，富有启发性，教学中的选题对考研具有极强的跟踪性，对概念的阐述精辟准确，形象生动，了解学生，针对性强，普遍受到同学欢迎.

历任中国工业与应用数学学会常务理事，副秘书长. 系统与控制专业委员会委员，《控制理论及其应用》特邀审稿专家. 国家人事部编《中国专家大辞典》(卷一)收录专家.

谭泽光教授

清华大学责任教授，清华大学分析系列课程负责人. 长期在清华大学从事数学基础课程教学和应用数学及运筹学方面的科研工作，曾在奥地利 Graz University 任访问教授. 获国家精品课程奖二等奖与国家教学成果奖二等奖. 长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲. 对全国硕士研究生入学统一考试大纲与教学要求有深入的研究，讲课风格热情幽默，重点突出，技巧性强，深入浅出，富有启发性，生动精辟，深受同学欢迎. 学员评价听谭老师的课"是一种享受，收获很大". 曾任北京地区考研数学阅卷组组长. 曾负责多项科研项目，发表学术论文 20 多篇，并编著《微积分》、《大学数学——概念方法与技巧》、《大学数学清华考研经典备考教程》、《数学规划》等图书. 先后获省部级以上奖励 4 次，1992 年获国家科技进步二等奖.

任《高校应用数学学报》编委. 1997 年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人，投入较多精力从事数学教改研究工作，2001 年获国家教学改革成果二等奖.

俞正光教授

清华大学责任教授，清华大学代数系列课程负责人.从事组合图论的研究，发表学术论文10多篇.曾在加拿大 Calgary University 任访问教授.任《清华大学学报》编委.主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》、《大学数学——概念方法与技巧》等图书.长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲和 MBA 入学辅导数学主讲.对全国硕士研究生入学考试大纲与教学要求有深入的研究，讲课风格深入浅出，条理规范，重点突出准确，受到同学一致欢迎.1997 年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人，从事数学教改研究工作.

曾参加编写由全国工商管理硕士研究生入学考试研究中心组织的《MBA 联考考前辅导教材》，主编《全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材.

葛余博教授

清华大学数学科学系教授，在随机过程及其应用方面的科研工作多次获奖，长期担任概率统计、随机过程等课程的主讲教学工作，在教学研究和实践中积累了大量宝贵经验.水木艾迪考研辅导班概率统计主讲，对全国硕士研究生入学考试大纲与教学要求有深入的研究，讲课风格：擅长抓住概念实质、融会贯通，启发式教学，利于熟练掌握并灵活运用知识，条理规范，重点突出，编写《随机数学方法》等教材.近几年的辅导教学多次命中考研真题，受到同学一致欢迎.

目　　录

第1讲　预备知识与序列极限

知识综述与应试导引

1.1　预备知识

数学的学习与数学问题的处理，要求我们必须具备一定的预备知识，包括数学符号的规范化使用，常用基本不等式的类型，函数的初等性质与初等函数的基本性态（定义域与值域，曲线的走向与关键点的坐标值，以及 $x\to\pm\infty$ 时的极限状态等），命题表述及其逻辑属性等. 概括地说，就是要培养与训练自己具备一定的数学素质. 这种素质，无论对掌握数学的知识系统，还是对处理一个具体题目，或是对应试能力的全面提高，都具有潜移默化的影响. 比如，数学符号的规范化使用与命题（或数学定义）的等价描述，将有助于思维的敏捷清晰及卷面表达的规范整齐（这将给阅卷人良好的第一印象）. 再比如，基本不等式的灵活运用可诱发解题的重要思路，而对函数初等性质与初等函数基本性态的熟悉会使读者对大多数题目找到一个正确的切入点，这一切入点若有错误（往往由对初等函数的基本性态理解错误或失误而导致这类切入点的错误），则会进一步导致一个题目在解答上的全局性错误，这类错误引起的损失远远超过一个局部计算错误带来的损失. 因此，对本节列出的预备知识应给予足够的重视.

1. 基本不等式

（1）绝对值不等式：对任意实数 x，有 $|x|\geqslant 0$，且

$$0\leqslant |x|+x\leqslant 2|x|. \tag{1.1}$$

（2）三角不等式：对任意实数 x 与 y 均有

$$0\leqslant |x+y|\leqslant |x|+|y|, \tag{1.2}$$

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant |x-y|\leqslant |x|+|y|. \tag{1.3}$$

（3）平均值不等式：对任意实数 x,y 均有不等式

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)\geqslant xy,$$

特别当 $x>0,y>0$ 时有

$$\frac{1}{2}(x+y)\geqslant \sqrt{xy}. \tag{1.4}$$

更一般地，若 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant \Big(\prod_{i=1}^{n}x_i\Big)^{1/n}. \tag{1.5}$$

（4）对 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，有不等式

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x. \tag{1.6}$$

(5) 若 $m>n>0, k>0$,则有

$$\frac{n}{m}<\frac{n+k}{m+k}. \tag{1.7}$$

2. 邻域

设 $x_0 \in \mathbf{R}$(实数集),称点集

$$N(x_0,\delta)=\left\{x \middle| \, |x-x_0|<\delta\right\}$$

为 x_0 的(一维)δ 邻域,其中 $\delta>0$. 而称点集

$$N^*(x_0,\delta)=\left\{x \middle| \, 0<|x-x_0|<\delta\right\}$$

为 x_0 的去心 δ 邻域.

对多维情形,设 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$,其邻域与去心邻域分别定义为

$$N(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\left\{\boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^n \middle| \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)<\delta\right\}, \qquad N^*(\boldsymbol{x}_0,\delta)=\left\{\boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^n \middle| 0<\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)<\delta\right\},$$

其中 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)=\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i0})^2\right]^{1/2}$ 称为两点 $\boldsymbol{x}_0$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的距离,x_i 与 x_{i0} 分别为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}_0$ 的第 i 个($i=1,2,\cdots,n$)分量.

3. 两条重要公理与命题的逻辑类型

对实数点集,有一系列公理. 在学习微积分或准备硕士研究生入学考试的复习中,有两条公理应予以注意,在一些场合它非常有用.

公理 1(比较公理) 对于任意实数 x 与 y 的比较关系,在 $x>y, x<y, x=y$ 三者中有且仅有一款成立.

公理 2 无穷有界实数点集 E 必有最小的上界与最大的下界.

所谓实数点集 E 有界是指 E 既有上界,又有下界,比如,对任意 $x\in E$,若 $\exists M\in \mathbf{R}$,使 $x\leqslant M$,则称 E 有上界,同时称 M 为 E 的上界. 类似可给出下界的描述.

公理 1 常常成为处理不等式或等式证明的理论根据. 作为逻辑思维的练习,读者可考虑下述命题的正确性:

(1) 对于数学常量 A(可以是一个表达式),若对任意的正数 ε 均有 $|A|<\varepsilon$,则必有 $A=0$.

(2) 对于数学常量 A(可以是一个表达式),$|A|=0$ 的充分必要条件(可以说是二者互为等价命题)是 $A=0$.

关于命题的逻辑类型有以下四种:

(1) 若 A,则 B(称 A 为 B 的充分条件,或 B 为 A 的必要条件).

(2) 若 B,则 A((1)的逆命题).

(3) 若 A 非,则 B 非((1)的否命题).

(4) 若 B 非,则 A 非((1)的逆否命题).

其中,(1)称为原命题,原命题总是与其逆否命题同时为真,在学习数学中的命题时,应从命题的叙述中立即判断出该命题的逻辑类型:是充分的,还是必要的? 或是充分必要的

(等价条件)? 另外,任何一款数学定义均构成充分必要条件,因此在应用定义时,可双向应用.

4. 函数及其初等性质

函数 $y=f(x)$(设为单值函数)的常用表达记号为 $f: X\to Y\subset\mathbf{R}$,其中 $X\subset\mathbf{R}$.

复合函数是指,对 $X,Y,U\subset\mathbf{R}$,满足

$$f: U\to Y,\text{即 } y=f(u),$$
$$g: X\to U,\text{即 } u=g(x).$$

且 $u=g(x)$的值域 U 为 $y=f(u)$定义域 U^* 的子集(非空子集),即 $U\subseteq U^*$,在特定情况下有 $U=U^*$.

反函数:$y=f(x)$的反函数常记为 $x=f^{-1}(y)$或 $y=f^{-1}(x)=g(x)$,前者变量记号未换,而后者则换了变量记号,即 $y=f(x)$的反函数为 $g(x)$,此时有 $f(g(x))=x$,或$g(f(x))=x$.

另外,互为反函数的一对函数,在换了记号的前提下,它们的两条曲线有对称轴 $y=x$,并且它们的定义域与值域具有对偶性,即 $y=f(x)$的定义域 X 为其反函数 $y=g(x)$的值域,反之亦然.

以下是函数的初等性质.

(1) 单调性

对任意两点 $x_1,x_2\in[a,b]$,当 $x_1<x_2$ 时,若恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$在$[a,b]$上为单调增函数(非严格).若取消不等式中的等号,该函数为严格单调.若所论不等式反号,则称之为单调减函数.

判断方法包括初等方法(减法或除法,当用除法判断增减性时,前提是 $y=f(x)$恒取定号,即恒大于零或恒小于零)与解析方法(利用导数的正负号判断增减性,这是由拉格朗日中值定理得到的方法).

(2) 周期性

对任意实数 $x\in X$,若 $\exists\, T_1>0$ 使得 $f(x+T_1)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$在 X 上为周期函数.一般讲,最小周期 $T=\min\left\{T_i\,\middle|\,i=1,2,\cdots\right\}$称为函数的周期.

周期性是函数的一种特定性质,在积分运算中有特殊的作用,并且,以周期函数 $u=u(x)$为中间变量的连续函数 $y=f(u)=f(u(x))$也为周期函数,例如 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$的周期为 2π.

(3) 奇偶性与对称性

$\forall x\in(-a,a)(a>0)$或$(-\infty,+\infty)$,若满足 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$为偶函数;而当满足 $f(-x)=-f(x)$时,则称 $y=f(x)$为奇函数.

对两个具有奇偶性的函数之积,其奇偶性有确定的结论:以偶函数 $u=u(x)$为中间变量的连续复合函数 $y=f(u(x))$仍为偶函数;偶函数没有反函数(在对称区间上);对连续奇函数 $y=f(x)$,必有 $f(0)=0$;并且,以奇函数 $u=u(x)$为中间变量的复合函数 $y=f(u(x))$仍为奇函数.

一元函数的奇偶性在对称区间$[-a,a]$上的积分具有特定结果,并且,这种性质在多元函数的积分中也有重要的应用,这便是对称区域上多元函数的对称性.例如,在单位圆围成的区域 $D=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant 1\right\}$上,函数 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{xy}}$在子区域 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,$

$y\geqslant 0\}$ 与子区域 $D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\leqslant 0,y\leqslant 0\}$ 上具有对应相等的取值. 在子区域 $D_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\leqslant 0\}$ 与子区域 $D_4=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\leqslant 0,y\geqslant 0\}$ 上具有对应相等的函数值. 由此可判定二重积分

$$\iint_D \frac{1}{1+e^{xy}}\mathrm{d}\sigma=2\iint_{D_1}\frac{1}{1+e^{xy}}\mathrm{d}\sigma+2\iint_{D_4}\frac{1}{1+e^{xy}}\mathrm{d}\sigma.$$

以上对称性在二重积分、三重积分、曲线、曲面积分中均可得到重要应用.

更加广义的对称性有如下结果：

若 $y=f(x)$ 的图形有对称轴 $x=a$，则对任意实数必有

$$f(a-x)=f(a+x),\quad f(t)=f(2a-t),\quad t=a-x.$$

若 $y=f(x)$ 的图形有对称中心 $(a,0)$，则对任意实数必有

$$f(a-x)=-f(a+x),\quad f(t)=-f(2a-t),\quad t=a-x.$$

对以上两种情形，分别令 $\varphi(x)=f(a-x)$，则 $\varphi(x)$ 分别具有奇偶性（前者 $\varphi(x)$ 为偶函数，后者 $\varphi(x)$ 为奇函数）. 这类性质在分析与计算积分问题时也有重要用途.

(4) 有界性

常用的函数有界的描述有以下三种.

① 在区间上有界：若 $\forall x\in[a,b]$（或 (a,b)），均有 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

② 在 x_0 附近有界（或 $x\to x_0$ 时有界）：若存在 x_0 的一个邻域 $N(x_0,\delta)$ 及常数 $M>0$，使对任意 $x\in N(x_0,\delta)$ 满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $y=f(x)$ 在 x_0 附近有界.

③ $x\to\infty$ 时有界：若存在 $x_1>0$ 及常数 $M>0$，使当 $|x|>x_1$ 时恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $y=f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时有界（注：$x\to\infty$ 包括 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$）.

掌握有界性的描述方法是重要的基础训练.

1.2 序列极限

极限的概念与求极限的方法是分析与处理微积分的方法与工具，是全局性的基础.

本节内容的重点是对极限定义与概念的理解，极限的性质及运算规则的应用.

1. 定义与等价性描述（有限极限，无穷小量，无穷大量）

考虑序列 $\{a_n\mid n=1,2,\cdots\}$，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$ 及常数 A，使当 $n>N$ 时，恒有 $|a_n-A|<\varepsilon$，则称序列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限 $(n\to\infty)$，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 特别地，当 $A=0$ 时，称 $\{a_n\}$ 为 $n\to\infty$ 时的无穷小量.

还可有如下等价性描述：

(1) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$ 与常数 A，使当 $a_n\in\{a_n\mid n>N\}$ 时，恒有 $a_n\in N(A,\varepsilon)$.

(2) $a_n=A+\alpha_n$，其中 $\alpha_n\to 0\ (n\to\infty)$.

当上述的常数 A 不存在时，称 $\{a_n\}$ 没有极限.

［**特别提示**］ 对任何极限等式 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 的理解应包括两层含义：首先极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，其次才是该极限值等于 A. 任何一个极限等式与其他数学等式的差别即在于此.