培优竞赛教程丛书

世佳
SHIJIA JIAOYUJIGOU
世佳教育机构

全国数学应用知识竞赛推荐用书

梳理知识　赛题精析　紧扣中考　互动学习

根据义务教育课程标准实验教科书 编写

培优竞赛教程

主　　编◆冯化友
本册主编◆张志瑜

数学

电子科技大学出版社

主　　编　冯化友
本册主编　文飞翔
本册副主编　朱　杰
编　写　者　王小平　何启才　詹建波　陈　琳
陈　果　王迎春　李财林
编　委　会　陈　果　陈　琳　程卫红　陈　英　刁祖德
何成江　何启才　李财林　李建容　李文剑
李　智　廖　勇　梁　敏　刘传富　刘志华
罗亨泉　罗太斯　罗小兵　蒲体维　冉亨贵
孙　华　舒　兵　唐远旭　王小平　王迎春
文飞翔　吴　杰　吴志君　谢　祥　徐来先
姚先伟　杨　宁　袁朝彬　曾　静　曾明照
张　航　张光福　张继海　张新明　张运红
詹建波　周先忧　朱　杰

前言

QIAN YAN

本书是新课程背景下的学生培优竞赛辅导教程.

新课程实验自 2001 年实施以来已有四年,在这四年中,师生们普遍感到:在新课程实验期间,学科竞赛侧重知识与能力的考查,新课程教学注重理念的渗透与创新意识的培养,兼顾过程与情感目标的考查,而新课程的中考则要整合三维目标(即知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观),那么,学科竞赛如何与新课程教学、新课程中考有机整合在一起,为此,我们组织了新课程国家级实验区的特高级教师、竞赛辅导的高级教练员进行了深入的研究探讨,共同编写了《培优竞赛教程》丛书.

本书以《全日制义务教育数学课程标准》为依据,以人教版、北师大版、华东师大版教材为重要参照,贯彻"知识能力并举,培优竞赛兼顾,激发学习兴趣,优化学习过程,追求人文关怀,培养数学美感"的原则.本书以最新中考、竞赛试题为载体,将各年级数学组织为 25 个专题讲座,把数学知识、数学思想方法、数学文化有机结合,构筑一条从基础到能力,由新课程到中考,以培优竞赛为核心的训练新路径.本书选材坚持了源于教材又高于教材的原则,试题的立意、情景和设问方式符合课标的基本理念,体现课改精神.

本书荟萃优秀试题,凝集思想方法,解析课标理念,弘扬理性思维.

本书博采众长,有的放矢,注重实效,各科每讲的整体结构设计为以下几个板块:

知识精要 你必须完全掌握教材的重要知识点,这些知识点是中考和竞赛中的重点内容,是解决一切问题的前提和基础.主要的双基梳理给出本讲的知识点的内容,技能构建是本讲的数学思想和方法.

趣题导航 数学来源于生活,运用于生活,而兴趣是学习数学的有效途径.趣题导航以生动的、身边的数学问题为导向,使学生感受数学来源于生活,体验数学就在身边,让学生树立数学建模思想.

名题赏析 以近期中考、竞赛中的新颖题、典型题为载体,围绕本讲的知识点和技能目标展开,帮助学生透彻理解教材,总结解题规律、方法和技巧,积累解题策略.

能力训练 以竞赛为目标,以中考为目的,让同学们通过练习夯实双基,解决生产、生活中的基本问题,提高解题能力.

在线检测 以中考的新题和压轴题、数学竞赛决赛的压轴题为重要内容,检验本讲的学习成果,达到开拓学生思维,提高学生分析问题、解决问题的能力.

目 录

MU LU

第一讲

走进奇特的数学世界

一、知识精要

1.双基梳理

从远古时代的结绳计数到现在信息时代的神奇数学，人们任何时候都受到数学的恩惠和影响，数学科学是人类长期以来研究数、量关系和空间形式而形成的庞大科学体系.

(1)你从算术中走来，将走进数学规律的世界.

(2)你从简单图形中走来，将走进妙趣丛生的图形世界.

(3)在奇特的数学世界中，它将开阔你的视野，提醒无形的灵魂，改变你的思维.

2.技能构建

你怎样学好数学呢？

(1)数学必须察言观色，增加自己的阅读量.

(2)动手实验是学习数学的一种有效的方法.

(3)养成有条有理的思维习惯，注意分类思考.

二、趣题导航

【例1】有一天，小颖打开电脑，偶尔进入魔法世界，电脑中魔法师说："我给你四张牌，分别为 J、Q、K、A(两红两黑)，你从中选一个牌，然后看着我的眼睛，心中想着这张牌，按下回车键，我将偷走你选中的牌". 小颖选好牌后看着魔法师的眼睛按下回车键. 牌面隐去一会儿后又出现了，但恰好没有出现小颖选中的那一张，他的牌真的被偷走了吗？你从中受到那些启示？

【精析】这是一个图案中花色与字母对应的关系，观察者在其他条件的影响下，只注意一张牌中的花色与字母的对应. 魔法师隐去牌后再次出现的四张牌已经不是原来的四张牌，无论你选那一张，给你造成一个错觉好像魔法师偷走了你的牌似的.

【解答】魔法师没有偷走的牌. 给我们的启示是：学习数学善于全面观察，找到每个规律所在.

【例2】(嘉兴市中考题)有一种数学游戏，可以产生"黑洞数". 操作如下：第一步任意写出一个自然数(以下称为原数)；第二步再写一个新的三位数(百位可以为零)，它的百位数字是原数中偶数数字的个数，十位数字是原数中奇数数字的个数，个位数字是原数的位数；以下每一步，都对上一步得到的数，按照第二步的规则继续操作，直至这个数不再变化为止.

不管你开始写的是一个什么数，几步之后变成的自然数总是相同的，最后相同的这个数称它为"黑洞数"，则这个"黑洞数"是________.

【精析】要读懂题，从具体一个数开始，按照规律进行运算，如取一个数 2 005——314——123——123.

再取其他值验证.

【解答】"黑洞数"是 123.

三、名题赏析

【例3】已知，如图 1－1 是一个长方形的展厅，长 10m，宽 8m，室内放置隔板，中间的过道 1m 宽，假如有一个参观者，从过道的入口处走到中间，问一共走了多少米？

【精析】把展厅想像成一个"蛋卷"，现在我们把它(展

开)还原成宽 1m 的带状长方形,这个带状的长方形的长就是我们要求的走过的路程.

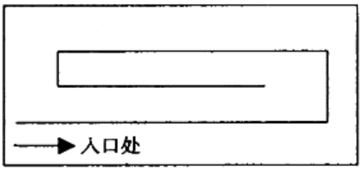


图 1-1

【解答】$(40\times25)\div1=1\ 000$

【例 4】在一个地球仪的赤道的位置上用铁丝打一个铁箍,假设地球的赤道上也有一个铁箍,同样把这两个铁箍向外扩张 1m(即直径增加 2m),问,哪个铁箍增加的铁丝长一点?

【精析】简单一看容易回答成地球上的那个铁箍增加的铁丝要长一些,但事实上这是错误的,必须通过计算来完成.

【解答】设地球仪的半径为 r,地球的半径为 R,地球仪的周长增加为:$2\pi(r+1)-2\pi r=2\pi$ 地球的周长增加为:$2\pi(R+1)-2\pi R=2\pi$ 所以增加的一样长.

【例 5】(徐州市中考题)如图 1-2 是由边长为 l 的正方形按照某种规律排列而组成的.

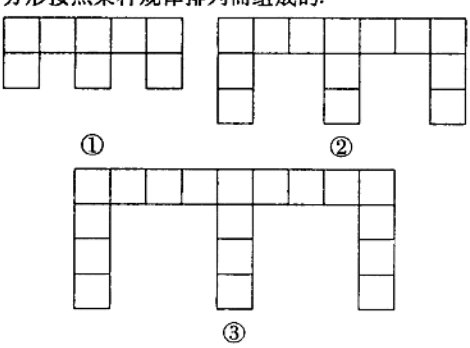


图 1-2

(1)观察图形,填写下表:

图形	①	②	③
正方形的个数	8		
图形的周长	18		

(2)推测第 n 个图形中,正方形的个数为________,周长为________(都用含 n 的代数式表示).

(3)这些图形中,任意一个图形的周长与它所含正方形个数之间的关系式为__________.

【精析】本题可以从两个方面来思考,从图形上来看正方形的个数 $5\times2-2=8$;$7\times3-2\times2\times2=13$,$9\times4-2\times3\times3=18$,左边为 $(2n+3)(n+1)-2n^2$,右边为 5,13,18…是一列等差数列,可以表示为 $5n+3$,$(2n+3)(n+1)-2n^2=5n+3$. 周长为 18,28,38…也是一个等差数列表示为:$10n+8$ 设正方形的个数为 $y=5n+3$,则 $n=\frac{y-3}{5}$,则周长与正方形个数之间的关系式为 $x=2y+2$.

【解答】(1)13,28;18,38. (2)正方形的个数为 $5n+3$,周长为 $10n+8$. (3)设正方形的个数为 y,周长为 x,周长与它所含正方形个数之间的关系式为 $x=2y+2$.

【例 6】(江苏省竞赛题)A、B、C、D、E、F 六个足球队进行单循环比赛,当比赛进行到某一天时,统计出 A、B、C、D、E 五队分别比赛了 5,4,3,2,1 场球,则还没有与 B 队比赛的球队是(　　).

A. C 队　　B. D 队

C. E 队　　D. F 队

【精析】用算术方法解,容易陷入困境,用六个点来表示 A、B、C、D、E、F 六个足球队,如图 1-3,以 A 为端点的线段有五条,而 A 队又比赛五场,说明 A 队与每一队都比赛了,而 E 队只赛了一场,所以 E 队没有和 B 队赛.

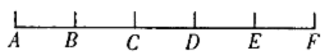


图 1-3

【解答】应选 C

【例 7】某酒店重新装修后,准备在大厅的主楼梯上铺设红色地毯,已知地毯每 m^2 售价 30 元,主楼梯宽 2m,如图 1-4 所示,你能算出购买地毯需花多少钱吗?

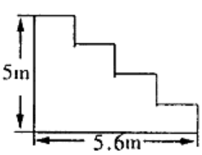


图 1-4

【精析】从图中可以看出楼梯的高度等于每一步楼梯高度之和,楼梯的宽度等于每步楼梯宽度之和,所以红地毯的长为 $(5+5.6)$m,宽为 2m,红地毯的面积为 $10.6\times2=21.2\text{m}^2$,购买地毯需花 $21.2\times30=636$ 元.

【解答】购买地毯需 636 元钱.

【例 8】小强拿了一张正方形的纸如图(1),沿虚线对折一次得图(2),再对折一次得图(3),然后用剪刀沿图(3)中的虚线(虚线与底边平行)剪去一个角,再打开后的形状应是(　　).

【精析】此题只需动手做一做,在做的过程中严格按照题中的顺序来完成.

【解答】应选 D

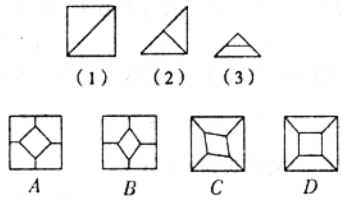


图 1－5

四、能力训练

1. 如果两个自然数的和为 7，那么他们的积最大的是__________________________________.

2. 观察前面的数$\frac{3}{20}$，$\frac{5}{34}$，$\frac{8}{55}$，$\frac{12}{83}$，__________，在后面的空白处填写恰当的数.

3. 一个老人在公路上散步，从第一根电线杆走到第 12 根电线杆共用了 22 分钟，这个老人走了 40 分钟，走到第______根电杆.

4. 自然数 $a.b.c.d.e$ 都大于 1，其乘积 $abcde=2\ 000$，则其和 $a+b+c+d+e$ 的最大值______，最小值__________________________________.

5. (烟台市中考题)对于整数 a、b、c、d 符号 $\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}$ 表示运算 $ac-bd$，已知$1<\begin{vmatrix} 1 & b \\ d & 4 \end{vmatrix}<3$则 $b+d$ 的值是__________.

6. (江西省中考题)如图 1－6 是跳棋盘，其中格点上的黑色点为棋子，剩余的格点上没有棋子. 我们约定跳棋游戏的规则是：把跳棋棋子在棋盘内沿直线隔着棋子对称跳行，跳行一次称为一步. 已知点 A 为己方一枚棋子，欲将棋子 A 跳进对方区域(阴影部分的格点)，则跳行的最少步数为(　　).

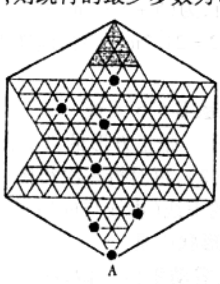


图 1－6

A. 2 步　　　　B. 3 步

C. 4 步　　　　D. 5 步

7. 小明编制了一个计算机程序，当输入任意一个数，显示屏上的结果总等于所输入数的平方与 1 的和，若输入$\frac{1}{2}$，并将所显示的结果再次输入，这时显示的结果应当是(　　).

A. $\frac{41}{16}$　　　　B. $\frac{42}{16}$

C. $\frac{5}{4}$　　　　D. $\frac{25}{16}$

8. 如果有 2 003 名学生排成一列，按 1、2、3、4、3、2、1、2、3、4、3、2…的规律报数，那么第 2 003 名学生所报的数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. (江苏省竞赛题)如图 1－7，一张“3×5”(表示边长分别为 3 和 5)的长方形，现要把它分成若干张边数为整数的长方形(包括正方形)纸片，并要求分得的任何两张纸片都不完全相同.

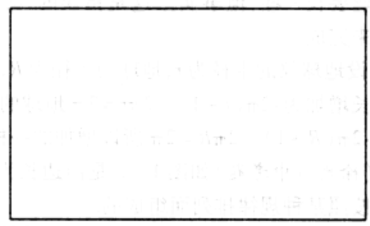


图 1－7

(1)能否分成 5 张满足上述条件的纸片?

(2)能否分成 6 张满足上述条件的纸片?

若能分，用“$a\times b$”的形式分别表示出各张纸片的边长，并画出分割的示意图；若不能分，说明理由?

10. 如图 1－9，500 多年前，意大利的一本书上讲了一种“格子乘法”，后来传入中国，在明朝的《算法统宗》中称为“铺地锦”，你能找出其中的规律仿照它算出 357×246 等于多少吗?

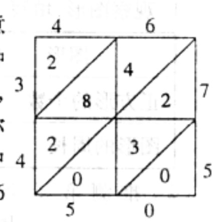


图 1－9

五、在线检测

1. 按规律填数:1,3,7,15,31,63,________,________.

2. 如果 a,b 表示任意两个不等于零的数,定义运算 $\oplus$ 如下,$a\oplus b=\frac{a^2}{b}$,那么$[1\oplus(2\oplus3)]-[(1\oplus2)\oplus3]$的值是________________.

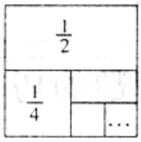


图 1-10

3. (南宁市中考题)计算:$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{256}=$________给你如图 1-10,把一个面积为 1 的正方形分成两个面积相等的矩形,接着把一个矩形分成两个面积相等的正方形……从中你得到巧算吗?

4. (宜昌市中考题)如图 1-11,用同样规格的黑白两种正方形瓷砖铺设正方形地面,观察图形并猜想填空:当黑色瓷砖为 20 块时,白色瓷砖为________块;当白色瓷砖为 n^2(n 为正整数)块时,黑色瓷砖为________块.

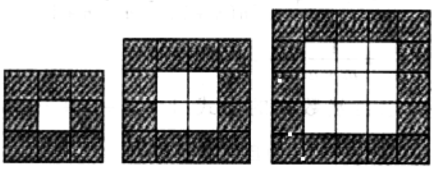


图 1-11

5. (绍兴市中考题)用计算器探索:按一定规律排列的一组数:$\frac{1}{10},\frac{1}{11},\frac{1}{12}\cdots\frac{1}{19},\frac{1}{20}$,如果从中选出若干个数,使它们的和大于 0,那么至少要选________个数.

6. ("希望杯"竞赛题)如图 1-12 所示,矩形 $ABCD$ 的面积是 300cm,H,E,F 分别是 AD,BC,CD 上的点,且$AD=4HD,BC=3BE$,F 是 CD 的中点,求图中阴影部分的面积________________.

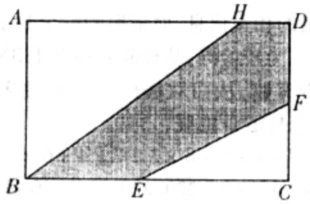


图 1-12

7. (孝感市中考题)如图 1-13,游人从董永公司中得景点 A 到景点 C 有两条路径可走,即由 A 经①,②到 C,或由 A 经③,④到 C,那么按照图中箭头所标明的方向(只能向上,向右行走),由景点 A 到景点 B 的不同路径有( ).

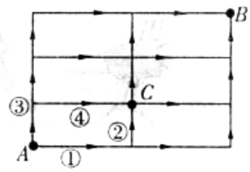


图 1-13

A. 6 条 B. 8 条 C. 10 条 D. 12 条

8. (烟台市中考题)把 26 个英文字母按规律分成 5 组,现在还有 5 个字母 D、M、Q、X、Z 请你按原规律补上,其顺序依次为( ).

①F、R、P、J、L、G______. ②H、I、O、______.

③N、S、______. ④B、C、K、E、______.

⑤V、A、T、Y、W、U、______.

A. $Q\ X\ Z\ M\ D$ B. $D\ M\ Q\ Z\ X$

C. $Z\ X\ M\ D\ Q$ D. $Q\ X\ Z\ D\ M$

9. 如图 1-14 用水平线和竖直线将平面分成若干个边长为 1 的小正方形格子,小正方形的顶点叫格点,以格点为顶点的多边形叫格点多边形. 设格点多边形的面积为 S,它各边上格点的个数和为:

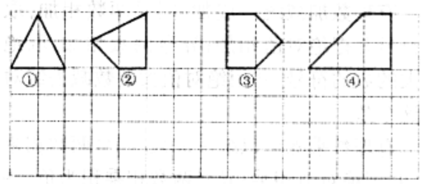


图 1-14

多边形的序号	①	②	③	④	…
多边形的面积 S	2	2.5	3	4	…
各边上格点的个数和 x	4	5	6	8	…

(1) 上图中的格点多边形,其内部都只有一个格点,它们的面积与各边上格点的个数和的对应关系如下表,请写出 S 与 x 之间的关系式.

$S=$________________.

(2) 请你再画出一些格点多边形,使这些多边形内部都有而且只有 2 格点. 此时所画的各个多边形的面积 S 与它各边上格点的个数和之间的关系式是:$S=$________________.

(3) 请你继续探索,当格点多边形内部有且只有 n 个格点时,猜想 S 与 x 有怎样的关系?

$S=$________________.

第二讲

有理数的巧算与规律

一、知识精要

1.双基梳理

(1)你理解了有理数的加减乘除乘方的法则吗?思考了加与减、乘与除、乘与乘方的关系吗?

有理数加减统一成加.同号两数相加,取原来的符号并把绝对值相加;异号两数相加,取绝对值较大的数的符号,并用绝对值大的数减去绝对值小的这个数.

有理数乘除可以统一成乘.同号两数相乘积为正,并把绝对值相乘;异号两数相乘积为负,并把绝对值相乘;偶数个负数相乘积为正,奇数个负数相乘积为负,并把绝对值相乘.

求几个相同因数的积的运算叫做乘方,乘方是特殊的乘法.

(2)有理数的运算满足哪些运算律?

加法结合律:

$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$

其中,a、b、c 为有理数.

加法交换律:

$a+b+c=b+c+a=c+a+b$

其中 a、b、c 为有理数.

乘法交换律:

$abc=bca=cab$,乘法结合律 $abc=(ab)c=a(bc)$其中 a、b、c 为有理数.

(3)你理解有理数的混合运算的顺序吗?

有理数混合运算的顺序是:先乘方,再乘除,最后算加减,如果有括号,先算括号里面的.

2.技能构建

(1)巧用运算律可以简化运算,灵活运用运算法则(正向用和逆向运用)

(2)凑整

(3)拆项 (拆项常用的结论有)

$\frac{m+n}{mn}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$,$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

$\frac{1}{mn}=\frac{1}{m+n}(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$]

(4)求自然数和的公式:$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$($n$ 为自然数)

二、趣题导航

【例1】老师拿出一本书,让学生看到书后面印有这样的一串符号:"ISBN 7-5342-3260-0"的条码,问学生它代表什么意义呢?有什么规律呢?

【精析】这个条码是国际标准书号,它的作用好像"身份证"的统一编号,每一组都由10个数字组成,前9个可分成3组,分别用来显示该书的地区,出版社和书名的相关信息,而最后的一个数字则是用作校验的,称为校验码,从校验码得知ISBN中头9个数字是否有错,从而对编码的准确性多了一些保证.它是怎样验证的呢?

$10\times7+9\times5+8\times3+7\times4+6\times2+5\times3+4\times2+3\times6+2\times0=220$. $220\div11=20$ 没有余数,就用 $11-11=0$,与校验码0一样,说明书号正确.

又如ISBN 7-5320-7254-1,$10\times7+9\times5+8\times3+7\times2+6\times0+5\times7+4\times2+3\times5+2\times4=$

219,219 ÷ 11 = 10　11 - 10 = 1　与校验码 1 一样，说明书号正确.

所以数学存在于生活的每一个角落，让我们一起去发现数学规律，感受数学.

【例 2】古时候，在某个王国里有一位聪明的大臣和国王下国际象棋，国王迷上象棋，为了感谢大臣，国王答应满足这个大臣的一个要求，大臣说："就在这个棋盘上放一些米粒吧，第一格放一粒米，第二格放 4 粒米，然后放 8 粒米，16 粒米，32 粒米……一直到 64 格."国王说："你真傻，只要这一点米粒？"大臣说："就怕你的国库里没有这么多米粒". 同学们你认为呢？

【精析】观察 2,4,8,16,32……可以写成 $2^1,2^2,2^3,2^4,2^5$……所以第 64 格的米粒应写成 2^{64}.

列式为：$1+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5\cdots+2^{64}$

三、名题赏析

1. 巧用有理数的运算律

【例 3】计算：　(1) $99\frac{13}{14}\times(-7)$

(2) $(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{3}{8}-\frac{5}{12})\times(-24)$

(3) $3\ 700\div125-351\div25-647\div25\times125$

(4) $-1.53\times(-\frac{4}{9})-9.47\times(-\frac{4}{9})+2\times(-\frac{4}{9})$

【精析】第(1)题把 $99\frac{13}{14}$ 拆成 $(100-\frac{1}{14})$ 再用乘法分配律；第(2)题利用乘法分配律时注意符号的运算；第(3)题先由 $125\times8=1\ 000$ $25\times4=100$，再根据分数的性质将分母凑整. 希望同学多搜集灵活运用运算性质的例子，提高运算能力；第(4)题逆用乘法分配律进行巧算.

(1) $99\frac{13}{14}\times(-7)$

【解答】原式 $=(100-\frac{1}{14})\times(-7)$

$=100\times(-7)-\frac{1}{14}\times(-7)$

$=-700+\frac{1}{2}$

$=-699\frac{1}{2}$

(2) $(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{3}{8}-\frac{5}{12})\times(-24)$

【解答】原式 $=\frac{1}{2}\times24-\frac{1}{6}\times24+\frac{3}{8}\times24+\frac{5}{12}\times24$

$=12-4+9+10$

$=27$

(3) $3\ 700\div125-351\div25-647\div25$

【解答】原式 $=(3\ 700\times8)\div(125\times8)-(351\times4)\div(25\times4)-(647\times4)\div(25\times4)$

$=29\ 600\div1\ 000-1\ 404\div100-2\ 588\div100$

$=29.6-14.04-25.88$

$=-10.32$

(4) $-1.53\times(-\frac{4}{9})-9.47\times(-\frac{4}{9})+2\times(-\frac{4}{9})$

【解答】原式 $=1.53\times\frac{4}{9}+9.47\times\frac{4}{9}-2\times\frac{4}{9}$

$=\frac{4}{9}(1.53+9.47-2)$

$=4$

(5) $(-75)\times256\times(-125)$

【精析】分拆 $256=4\times8\times8$ 再由 $75\times4=300$ 且 $8\times125=1\ 000$ 凑整

【解答】原式 $=75\times256\times125$

$=75\times4\times8\times8\times125$

$=300\times8\times1\ 000$

$=2\ 400\ 000$

2. 巧用常见数列

【例 5】(1) 计算　$2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+\cdots+2^{13}$

【精析】该题的特点，后项与前项之比相等，把这样的数列叫等比数列，相等的比叫做公比. 利用错位相减来求和.

【解答】设 $S=2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+\cdots+2^{13}$　①

则 $2S=2^3+2^4+2^5+2^6+\cdots+2^{14}$　②

②—①得：

$S=2^{14}-2^2$

(2) 计算 $1+6+11+16+\cdots+401$

【精析】该题的特点，后项减前项的差相等，把这样的数列叫等差数列，第一项叫首项，通常用 a_n 表示，最后一项叫末项，通常用 a_1 表示，相等的差叫公差，通常用 d 来表示. 等差数列的求和 S_n 公式和项数(n)公式：$S_n=\frac{(a_n+a_1)n}{2}$，$n=\frac{a_n-a_1}{d}+1$

【解答】$n=\frac{401-1}{5}+1=81$

原式 $=\frac{(401+1)\times81}{2}=16\ 281$

(3) $(2-3)(4-5)(6-7)(8-9)\cdots(64-65)$

【精析】2、4、6、8…64 是等差数列

【解答】$n=\frac{64-2}{2}+1=32$

原式 $=(-1)^{32}=1$

3. 分数的拆项法

【例 6】$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

【精析】分母中的两个乘数都是自然数，设第一个为 a_1，另一个数为 a_2，且 $a_2>a_1a_2-a_1=d$，则有

$\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{d}(a_2-a_1)$

【解答】 原式 $=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$

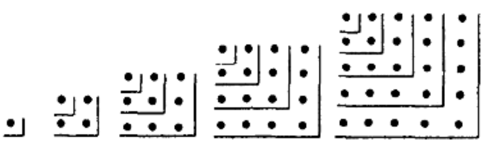
【例 7】(湖州市中考题)观察下列算式：$2^1=2,2^2=4,2^3=8,2^4=16,2^5=32,2^6=64,2^7=128,2^8=256\cdots$ 根据上述规律，你认为 8^{10} 的末位数字是多少？

【精析】观察上面计算都是以 2 为底的乘方运算，指数从 1 的连续自然数，尾数以指数每四个一循环. 而 $8^{10}=(2^3)^{10}=2^{30}$

【解答】$30\div4=7\cdots2$，即 30 除以 4 余 2，所以 8^{10} 的末位数是 4.

【例 8】(河北省中考题)如图 2－1 观察下面的点阵图和相应的等式，探究其中的规律：

(1)在④和⑤后面的横线上分别写出相应的等式；



①$1=1^2$；②$1+3=2^2$；③$1+3+5=3^2$；

④________；⑤________； ……

图 2－1

(2)通过猜想写出与第 n 个点阵相对应的等式是：________________.

【精析】(1)数与图要充分结合起来看，①图是一层，②图是二层，依此类推. 左边是 n(n 为层数)个连续的奇数相加，而右边是层数的平方.

(2)n 个奇数怎样表示呢？∵ 连续的奇数是一个等差数列，等差为 2，表达为 $2n-1$($n\geqslant1$ 的整数)

【解答】(1)④$1+3+5+7=4^2$，⑤$1+3+5+7+9=5^2$. (2)$1+2+3+\cdots+(2n-1)=n^2$

【例 9】(广东市中考题)如图 2－2 阅读材料：多边形边上或内部的一点与多边形各顶点的连线，将多边形分割成若干个小三角形. 下图上边给出了四边形的具体分割方法，分别将四边形分割成了 2 个、3 个、4 个小三角形.

请你按照上述方法将下图中的六边形进行分割，并写出得到的小三角形的个数. 试把这一结论推广至 n 边形.

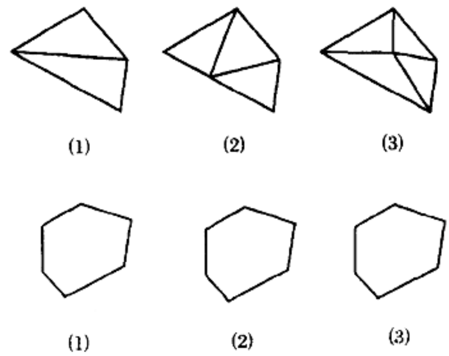


图 2－2

【精析】注意观察(1)过一个顶点画对角线；(2)过一边上的点连结顶点，(3)过图形中的任意一点连结顶点.

【解答】(1)连结六边形一个顶点和其他各顶点，进行正确分割，得出结论.

(2)连结六边形边上一点(顶点除外)和各顶点，进行正确分割，得出结论.

(3)连结六边形内一点和各顶点，进行正确分割，得出结论.

推广结论至 n 边形，写出分割后得到的小三角形数目分别为：$n-2,n-1,n$

四、能力训练

1. 计算 $(-2)^{2005}+(-2)^{2006}$ 所得结果为________.
2. 若数轴上的点 A 所对应的数为 -2，那么与点 A 相距 3 个单位长度的点所表示的数是________.

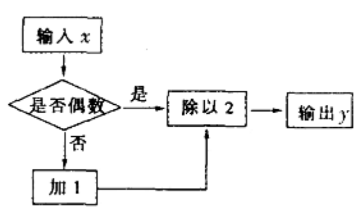


图 2－3

3. (淮安市中考)在如图 2－3 所示的运算流程中，若输出的数 $y=3$，则输入的数 $x=$________.

4. 计算:$\frac{7\ 676}{1\ 919}\times\frac{191\ 919}{767\ 676}$的值

5. 计算:$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

6. 计算:$8+98+998+9\ 998+99\ 998$

7. 计算:$\frac{2}{1\times2\times3}+\frac{2}{2\times3\times4}+\frac{2}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{2}{2\ 000\times2\ 001\times2\ 002}$

8. 已知$a=\frac{1\ 999\times1\ 999-1\ 999}{1\ 998\times1\ 998+1\ 998}$,

$b=\frac{2\ 000\times2\ 000-2\ 000}{1\ 999\times1\ 999+1\ 999}$,$c=\frac{2\ 001\times2\ 001-2\ 001}{2\ 000\times2\ 000+2\ 000}$

求 $a\times b\times c$ 的值?

五、在线检测

1. (长沙市中考)探索规律:

$3^1=3$,个位数字是3;

$3^2=9$,个位数字是9;

$3^3=27$,个位数字是7;

$3^4=81$,个位数字是1;

$3^5=243$,个位数字是3;

$3^6=729$,个位数字是9;…

那么,3^7 的个位数字是________,3^{20}的个位数字是________.

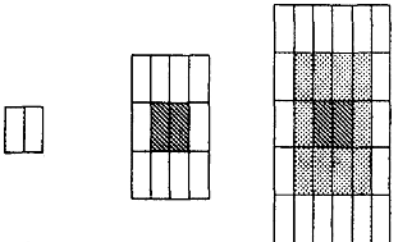
2. $1+2-3-4+5+6-7+\cdots+2\ 001+2\ 002-2\ 003-2\ 004+2\ 005=$________.

3. $(9-10)(10-11)(11-12)\cdots(108-109)=$________.

4. 在 $-7\frac{1}{7}$与4.5之间(包括这两个数)最大的有理数与最小的整数的和是________.

5. 在数$-5,-3,-1,2,4,6$中任取三个数相乘,所得积最大的是________.

6. (四川省中考题)如图2-4某体育馆用大小相同的长方形木块镶嵌地面,第1次铺2块,如图(1);第2次把第1次铺的完全围起来,如图(2);第3次把第2次铺的完全围起来,如图(3);…依此方法,第 n 次铺完后用字母 n 表示第 n 次镶嵌所使用的木块块数为________.



(1) (2) (3)

图2-4

7. (南通市中考)如图2-5是一个简单的数值运算程序,当输入 X 的值为 -1 时,则输出的数值为____.

输入 X → $\times(-3)$ → -2 → 输出

图2-5

8. 观察下列等式$9-1=8,16-4=12,25-9=16,36-16=20$…这些等式反映自然数间的某种规律,设$n(n\geqslant1)$表示自然数,用关于 n 的等式表示这个

规律为________.

9. $1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+\cdots+17\frac{1}{512}$

10. $3\frac{1}{6}-4\frac{1}{7}+5\frac{1}{8}-6\frac{1}{6}+7\frac{1}{7}-8\frac{1}{8}$

11. $2.2\times(-2.1)+1.21\times4.2-2.1\times0.22$

12. $\frac{1}{3\times1}-\frac{1}{4\times2}+\frac{1}{5\times3}-\frac{1}{6\times4}+\cdots+\frac{1}{2\,005\times2\,003}-\frac{1}{2\,006\times2\,004}-\frac{1}{4}$

13. $\frac{1^2+2^2}{1\times2}+\frac{2^2+3^2}{2\times3}+\frac{3^2+4^2}{3\times4}+\cdots+\frac{2\,000^2+2\,001^2}{2\,000\times2\,001}$

14. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}$

15. 1 999 减去它的$\frac{1}{2}$,再减去余下的$\frac{1}{3}$,再减去余下$\frac{1}{4}$,依此类推……一直到减去余下的$\frac{1}{1\,999}$,那么最后剩下的数是多少?

16. (荆州市中考题)观察下面一列有规律的数:$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{6}$,$\frac{1}{12}$,$\frac{1}{20}$,$\frac{1}{30}$,$\frac{1}{42}$…根据规律求(1)第7个数是什么?(2)第几个数是$\frac{1}{132}$?(3)第n个数呢?

第三讲
绝对值与非负数

一、知识精要

基梳理

(1)绝对值是表示数 a 的点到原点的距离 .

(2)去绝对值符号的法则：$|a|=\begin{cases} a & a>0 \\ 0 & a=0 \\ -a & a<0 \end{cases}$

(3)绝对值运算结果是非负数；$|a|\geqslant 0$，0 是绝对值最小的数.

能构建

(1)数轴上，右边的数比左边的数大，如图 3－1 则有：$a-b<0,b-a>0,a+b<0$.

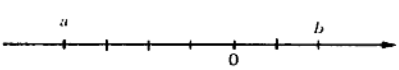


图 3－1

(2)多项式的相反数，用去括号法则理解为：括号前是负号，把括号和负号一起去掉，括号内每项都要变号. 也可以直接理解为每项都变号. 如 $a-b$ 的相反数是 $-a+b$

(3) $|a-b|$表示数 a 到数 b 的两点间的距离.

(4)如果有$|a|=b$，其中 $b\geqslant 0$，则有 $a=\pm b$

(5) $|ab|=|a||b|$；　$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$　$(b\neq 0)$；

$|a|^2=|a^2|=a^2$

(6) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$

(7)充分利用"数轴"这个工具来进行"数形结合"的思考，这是一种很重要的数学方法. 本节也用到"分类讨论法".

二、趣题导航

【例 1】文具店、书店、玩具店依次坐落在一条东西走向的大街上，文具店在书店西 20m，玩具店位于书店东 100m 处，小明从书店沿街向东走了 40m，接着又向东走了 －60m，此时小明的位置在__________，共走了__________ m.

【精析】此题与数轴联系起来，小明向东走 40m，又向东走了 －60m 就明确了小明行走的方向，如图 3－2，共走 $|40|+|-60|=100$m.

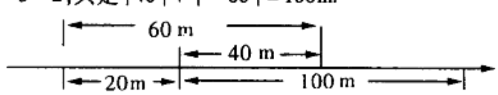


图 3－2

【解答】恰好到文具店，共走了 100m.

【例 2】(烟台市中考题)先阅读下面的材料，然后解答问题.

在一条直线上有依次排列的 $n(n>1)$ 台机床在工作，我们要设置一个零件供应站 p，使这 n 台机床到供应站 p 的距离总和最小，要解决这个问题，先"退"到比较简单的情形：

如图 3－3 如果直线上有 2 台机床时，很明显设在 A_1 和 A_2 之间的任意地方都行，因为甲和乙所走的距离和等于 $A_1\sim A_2$ 的距离.

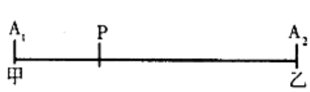


图 3－3

如图 3－4 如果直线上有 3 台机床时，不难判断供应站 p 设在中间一台机床 A_2 处最合适，因为如果 p 放在 A_2 处，甲和丙所走的距离之和恰好为 $A_1 \sim A_3$ 的距离，而如果把 p 放在别处，例如 D 处，那么甲和丙所走的距离之和仍是 $A_1 \sim A_3$ 的距离，可是乙还得走从 $A_2 \sim D$ 的这一段，这是多出来的，因此 p 放在 A_2 处是最佳选择.

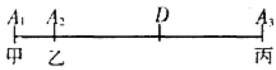


图 3－4

不难知道，如果直线上有 4 台机床，应设在第 2 台与第 3 台之间的任何地方，有 5 台机床应设在第 3 台位置.

问题(1)有 n 台机床时，应放在何处？

(2)根据问题(1)的结论，求 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-617|$ 的最小值.

【精析】(1)机床数是偶数，放在中间两数之间的任何位置，如果是奇数就放在中间的那一个数，所以当 n 为偶数时，P 应放在 $\frac{n}{2}$ 和 $\frac{n}{2}+1$ 之间，当 n 为奇数时，P 应放在 $\frac{n+1}{2}$ 处.

(2)可以看成有 617 台机床，$x=309$，代数式的值最小.

$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-617|=|309-1|+|309-2|+|309-3|+\cdots+|309-617|=308+307+306+\cdots+1+0+1+\cdots+307+308=95\ 172.$

三、名题赏析

【例 3】(湖北省黄冈市中考题)某公司员工分别住在 A、B、C 三个住宅区，A 区有 30 人，B 区有 15 人，C 区有 10 人，三个区在同一条直线上，位置如 3－4 图所示. 该公司接送车打算在此间只设一个停靠点，为使所有员工步行到停靠点的路程之和最小，那么停靠点的位置应设在(　　).

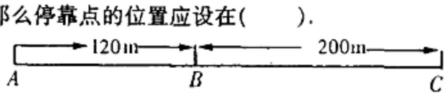


图 3－4

A. A 区　　B. B 区

C. C 区　　D. A,B 两区之间

【精析】题目的本质是在直线 AC 上求一点，使之到 A 点距离的 30 倍加上它到 B 点的距离的 15 倍再加上它到 C 点距离的 10 倍所得的和最小. 以 B 点为原点，建立数轴，则问题转化为 $30|x+100|+15|x|+10|x-200|$ 最小值.

把 30,15,10 作为绝对值的个数，共有 55 个绝对值相加，根据例 2 可知，中间这个数应该是第 23 个数，即 $x=-100$ 时，$30|-100+100|+15|-100|+10|-100-2\ 001|$ 有最小值是 4 500，所以停靠点的位置应设在 A 点.

【解答】停靠点的位置应设在 A 点，应选 A.

【例 4】求 $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$, 0, $-2\frac{1}{5}$ 的绝对值

【精析】学习此类题目，要注意书写格式.

【解答】$\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$　　$\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}$

$|0|=0$　　$\left|-2\frac{1}{5}\right|=2\frac{1}{5}$

【例 5】(湖北省选拔赛题)若 $|a|=5$, $|b|=3$, 且 $|a-b|=b-a$, 那么 $|a+b|$________.

【精析】$a-b$ 与 $b-a$ 互为相反数，一个绝对值等于它的相反数，那么这个数是一个非正数，所以 $a-b\leqslant 0$，即 $a\leqslant b$. 又因 $a=\pm5$, $b=\pm3$，所以 $a\neq5$.

【解答】$a+b=-2$，或 $a+b=-8$.

【例 6】(黄岗市竞赛题)满足 $|a-b|=|a|+|b|$ 成立的条件(　　).

A. $ab>0$,　　B. $ab>1$,

C. $ab\leqslant0$,　　D. $ab\leqslant1$

【精析】$|a-b|$ 可以理解为数轴上表示数 a 的点到数 b 的点之间的距离，$|a|$, $|b|$ 可以理解为数轴上 a, b 两点到原点的距离，它们要相等，所以 a, b 两点必须在原点的两旁，或至少有一点与原点重合.

【解答】故选 C.

【例 7】若 $abc\neq0$，求 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的可能的值.

【精析】这个问题的目标要去掉绝对值，这就需要我们 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 对 a、b、c 的符号进行讨论，但是在讨论前我们要先作好分类的依据(分类的标准是“不重复，不遗漏”)，事实上 $|abc|$ 的绝对值符号的化去是关键，而 abc 正负只与其中的负因子的个数有关，所以我们只讨论 a、b、c 中负数的个数即可.

【解答】(1)当 a、b、c 三个数全为正时，原式 $=4$

(2)当 a、b、c 三个数中两正一负时，不妨设 $a>0$, $b>0$, $c<0$，所以原式 $=0$

(3)当 a、b、c 三个数中一正两负时，不妨设

$a>0$、$b<0$、$c<0$，所以原式 $=0$

(4) 当 a、b、c 三个数中都为负时，不妨设 $a<0$、$b<0$、$c<0$，所以原式 $=-4$

【例 8】(荆州市中考试题) 如果 $|x-2|+(x-y+3)^2=0$，那么 $(x+y)^2$ 的值为(　　).

A. 25　　B. 36　　C. 49　　D. 81

【精析】绝对值 $|x-2|$ 的结果是一个非负数，而 $(x-y+3)^2$ 也是一个非负数，所以两数的和要为零，这两个数必然互为相反数，因为两个都是非负数，所以它们都为零.

【解答】$\because$ $|x-2|\geqslant 0$，$(x-y+3)^2\geqslant 0$，$|x-2|+(x-y+3)^2=0$

$\therefore$ $|x-2|=0$，$(x-y+3)^2=0$，

$\therefore$ $x=2$，$y=5$，$(x+y)^2=(2+5)^2=49$. 所以选 C

【例 9】已知 $|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$，设 $M=|x+1|+|y+1|+|2y-4|$，求 M 的最大值与最小值.

【精析】由已知求出 x、y 的取值范围，进而化简 M 的表达式，再求 M 的最大值与最小值

【解答】从已知入手讨论绝对值符号内的代数式的符号（或说明取值范围）

$\because$ $|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$，$\therefore$ $-1\leqslant x\leqslant 1$，$-1\leqslant y\leqslant 1$，

$\therefore$ $0\leqslant x+1\leqslant 2$，$0\leqslant y+1\leqslant 2$

又有 $-2\leqslant 2y\leqslant 2$，$-6\leqslant 2y-4\leqslant -2$

$\therefore$ $M=|x+1|+|y+1|+|2y-4|=x+1+y+1-(2y-4)=x-y+6$

$\therefore$ 当 $x=1$，$y=-1$ 时，$M_{最大值}=8$

当时 $x=-1$，$y=1$ 时，$M_{最小值}=4$

四、能力训练

1. 若 a ________ 0，则 $|a|-a=0$，若 $\frac{|a|}{a}=-1$，则 a ________ 0.（填“>”，“<”，“=”，“≥”，“≤”）
2. 求绝对值不大于 3 的所有整数的和__________.
3. (哈尔滨中考题) 已知 $|x|=3$，$|y|=2$，且 $x-y<0$，则 $x+y$ 的值等于__________________.
4. (“希望杯”竞赛题) 有理数 a 满足 $|a|+a=0$，$a\neq -1$，则 $\frac{|a|-1}{|a+1|}=$ __________________.
5. (宁波市中考题) 已知 $x-y=4$，$|x|+|y|=7$，那么 $x+y$ 的值是(　　).
（分成 $y\geqslant 0$，$-4\leqslant y<0$，$y<-4$，三种情况讨论）
A. $\pm\frac{3}{2}$　　B. $\pm\frac{11}{2}$　　C. ± 7　　D. ± 11
6. 若 $ab\neq 0$，则 $\frac{|a|}{a}+\frac{b}{|b|}$ 的取值不可能的是(　　).
A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. -2
7. (江苏省竞赛题) 已知数轴上三点 A、B、C、分别表示有理数 a、1、-1，那么 $|a+1|$ 表示(　　).
A. A，B 两点的距离.　　B. A，C 两点的距离.
C. A，B 两点到原点的距离之和.
D. A，C 两点到原点的距离之和.
8. (“希望杯”邀请赛试题) 设 $a+b+c=0$，$abc>0$，则 $\frac{b+c}{|a|}+\frac{c+a}{|b|}+\frac{a+b}{|c|}$ 的值(　　).
A. -3　　B. 1　　C. 3 或 -1　　D. -3 或 1
9. 若有理数 a、b 满足 $(a+b-2)^2+|b-2a+3|=0$，求 $2b-a+1$ 的值？
10. (湖北省选拔竞赛题) 已知有理数 a、b、c 在数轴上的对应位置如图 3－5 所示，
化简：$|c-1|+|a-c|+|a-b|$

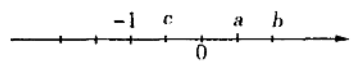


图 3－5

五、在线检测

1. (重庆市初一竞赛题) 如果 m，n 满足 $|3m-6|+(n+4)^2=0$，则 $mn=$ ______.
2. (迎春杯初一竞赛题) 已知 $|a|+|b|=1$，且 a，b 为整数，则 $|a-b|=$ ______.
3. 若 $|a+b|<|a|+|b|$，则 $\frac{a}{|a|}-\frac{|b|}{b}$ 等于______.
4. 已知 x 为有理数，$|x+7|-7$ 的最小值是______.
5. 已知 $|3y-18|+|ax-y|=0$，如果 x 是正偶数，那整数 $a=$ ____________________.
6. 已知 a、b、c、d 是有理数，且 $|a-b|\leqslant 9$，$|c-d|\leqslant 16$，$|a-b-c+d|=25$，那么 $|b-a|-|d-c|=$ ____________________.
7. (“希望杯”赛题) 在式子 $|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|$ 中，由不同的 x 值代入，得到对应

的值,在这些值中,最小的值是(　　).

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

8. (全国联赛题)已知 $x<y<0$,设 $M=|x|$,$N=|y|$,$P=\frac{|x+y|}{2}$,则 M,N,P 的大小关系是(　　).

A. $M<N<P$　B. $M<P<N$

C. $N<P<M$　D. $N<M<P$

9. ("希望杯"赛题)如果 $2a+b=0$,则 $\left|\frac{a}{|b|}-1\right|+\left|\frac{|a|}{b}-2\right|$ 等于(　　).

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

10. 已知 $a<0$,化简 $\frac{|a|-a}{a}$,得(　　).

A. 2　B. 1　C. 0　D. -2

11. 使代数式 $\frac{|3x-|x||}{4x}$ 的值为正整数的 x 值是(　　).

A. 正数　B. 负数　C. 零　D. 不存在

12. 若有理数 x、y 满足 $|2x-1|+(y+2)^2=0$,则 xy 的值等于(　　).

A. -1　B. 1　C. -2　D. 2

13. 适合 $|2a+7|+|2a-1|=8$ 整数 a 的值的个数有(　　).

A. 5 个　B. 4 个　C. 3 个　D. 2 个

14. (南平市中考题)已知 $\frac{a}{|a|}=\frac{b}{|b|}(ab\neq0)$ 则 a,b 所有可能的值有(　　).

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

15. (全国联赛题)求满足 $|a-b|+ab=1$ 的非负整数对 (a,b) 的值?

16. ("五羊杯"竞赛题)已知 $|ab-2|$ 与 $|b-1|$ 互为相反数,试求代数式

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}+\frac{1}{(a+2)(b+2)}\cdots+\frac{1}{(a+2\ 002)(b+2\ 002)}$$ 的值.