

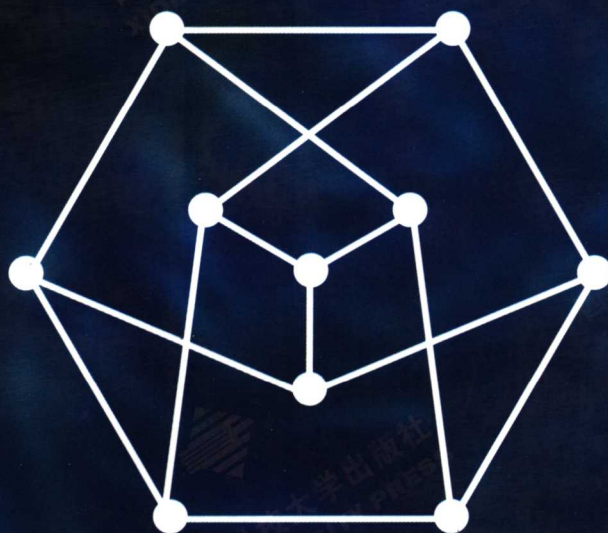
本科生辅导及研究生入学考试用书

DISCRETE  
MATHEMATICS

# 离散数学

—— 精讲 · 精解 · 精练

黄健斌 编著



西安电子科技大学出版社  
<http://www.xduph.com>

# 离散数学

---

——精讲·精解·精练

黄健斌 编著

西安电子科技大学出版社

2006

## 内 容 简 介

本书共分为四篇九章,每一章按内容体系分成若干节,每一节又分为内容精讲、综合题解和习题三部分。内容精讲部分以充实严谨、深入浅出、形象生动的方式将离散数学的主要内容展现在读者面前,对于难以理解的概念和定理配以例题、插图或漫画,能够加深读者对基本概念和基本定理的理解;综合题解部分选编了大量的经典例题,着重于解题思路和方法的引导;习题部分精选了多道与本节重点内容相关的典型练习题,使得读者可以在做题的过程中巩固已学的知识。书中对重点和难点内容作了注解,对题目的难度按等级作了标注,使得不同程度的学生都能从中获益。

本书可作为高等院校工科离散数学课程的教学参考书以及硕士研究生入学考试的辅导书,也可以作为其他需要学习离散数学的相关人员的参考读物。

### 图书在版编目(CIP)数据

离散数学——精讲·精解·精练/黄健斌编著.

—西安:西安电子科技大学出版社,2006.1

ISBN 7-5606-1594-5

I. 离… II. 黄… III. 离散数学 IV. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 127936 号

策 划 臧延新

责任编辑 龙 晖 臧延新

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

<http://www.xduph.com> E-mail: [xdupfbx@pub.xaonline.com](mailto:xdupfbx@pub.xaonline.com)

经 销 新华书店

印刷单位 西安文化彩印厂

版 次 2006年1月第1版 2006年1月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 21.875

字 数 523千字

印 数 1~4 000册

定 价 24.00元

ISBN 7-5606-1594-5/O·0078

**XDUP 1885001-1**

\*\*\* 如有印装问题可调换 \*\*\*

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

# 前言

离散数学是对研究离散数量关系的数学分支的统称,它是为了适应计算机科学的发展而建立的,并且为研究计算机科学提供了有力的理论基础。离散数学课程是计算机科学与技术专业的一门重要的专业基础课程,它为学习高级语言程序设计、数据结构、数字逻辑设计、编译原理、计算机网络、人工智能、信息安全等许多专业课程提供了必要的数学基础,同时对于培养学生的抽象思维和逻辑推理能力有着十分重要的作用。

## 写作目标

离散数学一直以来都以它的内容抽象和深奥而闻名,是一门典型的难教难学的课程,学生对于学习这门课程普遍感到困惑和吃力。目前的离散数学教材往往偏重于对基础理论的阐述,而且内容往往比较形式化和抽象,这使得学生通过教材自学成为了一件相当困难的事情。同时,由于学生的能力存在差异,学生的学习要求也不尽相同。能力稍差的学生希望搞懂书中的基本概念和定理,能顺利通过课程考试,而一些思维活跃、好学上进的学生,则希望能够汲取更多的知识,掌握更多的解题方法和技巧。这使得一本指定的教材很难同时满足不同学生的需求。

对于这些问题的感悟引导着我写作本书。我的目标是希望能够写出一本为大多数学生所喜欢、深入浅出的教学参考书,并希望能够尽量满足不同层次读者的要求。

## 离散数学的特点

离散数学是与计算机科学有紧密联系的一门数学学科,它以研究离散量的结构以及关系为主要目标,研究的主要对象是有限或可数个元素构成的集合。

离散数学中有大量的定义和定理,学习好离散数学的前提是理解和掌握这些定义和定理的基本内涵。特别要注意提炼出内容体系之间的内在逻辑联系,总结概念和性质的内在规律性,这是学好这门课程的关键。

离散数学包含大量的方法和技巧。例如,证明方法就包含直接证明法、间接证明法、反正法、构造法、归纳法等,而在具体的证明过程中根据具体条件又可能会用到不同的技巧。因此解答离散数学题是不能指望有固定的套路可循的,这需要大量练习,并且要善于总结、归纳,方能做到熟能生巧、游刃有余。

## 怎样使用本书

本书分为四篇九章,每一章又分为若干节,每一节由内容精讲、综合题解和习题这三部分组成。内容精讲部分对基本的概念进行了总结和归纳,对重要的定理进行了证明,特别是对于难以理解的内容加入了基础性的示例,以便于读者更好地学习那些重要的概念和定理。本书借鉴了国外一些书籍的体例,对书中的重点内容加入了一些旁白、插图和漫画,以加深读者对这些内容的理解和掌握。综合题解部分针对本节的内容,选择了一些经典的例题进行分析和解答,侧重于对解题方法和技巧的训练。习题部分精选了典型的练习题,用于对所学知识进行巩固和提高。

本书对需重点理解和掌握的定理以“✱”号标注，对题解或习题的难度以“◇”号标注（“◇”表示较难，“◇◇”表示难，“◇◇◇”表示很难），以供读者把握学习的深浅。

致谢

感谢西安电子科技大学软件学院的武波教授审阅了全书，并提出了许多宝贵的意见。本书的编写得到了西安电子科技大学出版社的大力支持，感谢臧延新和龙晖编辑为本书的出版所做的努力。

本书的出版得到了西安电子科技大学教材基金的资助。

作者力图用通俗的语言和形象的方式来阐述离散数学抽象的原理，并向读者传递作者对于这些内容的理解。由于作者实践理论水平有限，加之时间仓促，书中的错误和不足之处在所难免，敬请各位专家和读者给予批评指正。

作者：

2005年8月

# 目 录

## 第一篇 数理逻辑

|                       |    |
|-----------------------|----|
| 第 1 章 命题逻辑 .....      | 3  |
| 1.1 命题公式 .....        | 3  |
| 1.2 逻辑等价式与永真蕴含式 ..... | 11 |
| 1.3 联结词的完备集 .....     | 18 |
| 1.4 对偶与主范式 .....      | 22 |
| 1.5 推理规则与证明方法 .....   | 30 |
| 第 2 章 谓词逻辑 .....      | 39 |
| 2.1 谓词和量词 .....       | 39 |
| 2.2 谓词公式 .....        | 43 |
| 2.3 谓词演算中的永真公式 .....  | 51 |
| 2.4 前束范式 .....        | 60 |
| 2.5 谓词演算的推理规则 .....   | 63 |

## 第二篇 集 合 论

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 第 3 章 集合 .....         | 73  |
| 3.1 集合的概念与表示 .....     | 73  |
| 3.2 集合的运算 .....        | 78  |
| 3.3 容斥原理与鸽巢原理 .....    | 85  |
| 3.4 归纳法 .....          | 92  |
| 3.5 集合的笛卡儿积 .....      | 101 |
| 第 4 章 二元关系 .....       | 104 |
| 4.1 关系及其运算 .....       | 104 |
| 4.2 集合上的二元关系及其特性 ..... | 110 |
| 4.3 关系的闭包运算 .....      | 118 |
| 4.4 等价关系与集合的划分 .....   | 126 |
| 4.5 序关系 .....          | 137 |
| 第 5 章 函数 .....         | 149 |
| 5.1 函数的基本概念 .....      | 149 |
| 5.2 特殊函数类 .....        | 155 |
| 5.3 复合函数 .....         | 160 |
| 5.4 逆函数 .....          | 165 |
| 第 6 章 无限集合 .....       | 170 |
| 6.1 可数与不可数集合 .....     | 170 |
| 6.2 基数的比较 .....        | 177 |

### 第三篇 代 数 系 统

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| <b>第 7 章 代数</b> .....     | 183 |
| 7.1 代数结构 .....            | 183 |
| 7.2 子代数 .....             | 191 |
| 7.3 同态与同余 .....           | 193 |
| 7.4 半群与独异点 .....          | 201 |
| 7.5 群 .....               | 208 |
| 7.6 子群与群同态 .....          | 214 |
| 7.7 特殊的群 .....            | 221 |
| 7.8 陪集与拉格朗日定理 .....       | 226 |
| 7.9 环和域 .....             | 230 |
| <b>第 8 章 格与布尔代数</b> ..... | 238 |
| 8.1 格 .....               | 238 |
| 8.2 子格与格同态 .....          | 245 |
| 8.3 特殊的格 .....            | 250 |
| 8.4 布尔代数与布尔表达式 .....      | 257 |

### 第四篇 图 论

|                       |     |
|-----------------------|-----|
| <b>第 9 章 图论</b> ..... | 267 |
| 9.1 图的基本概念 .....      | 267 |
| 9.2 路径和回路 .....       | 279 |
| 9.3 欧拉图与哈密尔顿图 .....   | 290 |
| 9.4 图的矩阵表示 .....      | 305 |
| 9.5 平面图 .....         | 314 |
| 9.6 图的着色 .....        | 326 |
| 9.7 树 .....           | 330 |
| <b>参考文献</b> .....     | 344 |

# 第一篇 数理逻辑

逻辑学是一门研究思维形式及其规律的科学，传统的逻辑学是哲学家们的研究课题。1666年，德国数学家莱布尼兹在《论组合的艺术》一书中首先提出了数理逻辑的思想，就是通过引入一套符号体系来研究思维的形式及推理，所以数理逻辑又称作符号逻辑。

随着时代的发展，数理逻辑不再局限在所谓的元数学抽象形式的研究上，而是与计算机科学取得了密切的联系。它为机器证明、程序设计与验证等许多领域提供了必要的理论基础。数理逻辑对培养计算机专业学生的逻辑思维能力和推理能力也大有帮助。正如著名的计算机科学家 ACM 图灵奖获得者迪杰斯特拉(Dijkstra)所说的：“假如我早年在数理逻辑上下点功夫，就不会出那么多错误，不少东西数理逻辑上早就讲过了，如果我年轻 20 岁，一定回去学数理逻辑。”可以预言，21 世纪数理逻辑与计算机科学的关系将更加密切。

现代数理逻辑的分支很多，包括证明论、公理集合论、递归论、模型论、多值逻辑、时态逻辑和模糊逻辑等。这里介绍的是数理逻辑最基本的内容：命题逻辑和谓词逻辑。



## 第1章 命题逻辑

## 1.1 命题公式



## A. 内容精讲

## 命题的基本概念

**命题：**一个或真或假但不能两者都是的断言(陈述句)。

**【例题 1.1-1】**判断以下语句是否是命题。

- (a) 北京是中国的首都。 是
- (b) 别的星球上有生物。 是
- (c) 天气真好! 否 不是陈述句
- (d)  $x+y=z$ 。 否 没有确定的真假值
- (e) 如果明天不下雨, 那么我去郊游。 是

**命题的真值：**命题只能取“真”(T, 1)或“假”(F, 0)之一, 称为命题的真值。命题的两个真值构成了命题常元。

**命题变元：**用来表示命题的符号, 通常用大写字母( $P, Q, R, \dots$ )或带下标的大写字母( $P_1, P_2, P_3, \dots$ )来表示。

## 常用的联结词

**联结词：**联结词是命题演算中的运算符, 亦称为逻辑运算符。常用的联结词有以下五种, 其运算表如表 1.1-1 所示。

表 1.1-1

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \rightarrow Q$ | $P \leftrightarrow Q$ |
|-----|-----|----------|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| 0   | 0   | 1        | 0            | 0          | 1                 | 1                     |
| 0   | 1   | 1        | 0            | 1          | 1                 | 0                     |
| 1   | 0   | 0        | 0            | 1          | 0                 | 0                     |
| 1   | 1   | 0        | 1            | 1          | 1                 | 1                     |

命题是一个具有

确定真假值的陈述句。为了运算方便, 通常用符号化的命题变元  $P, Q, R$  等来指代具体的命题, 其值域为  $\{T, F\}$ 。

命题是一个具有

确定真假值的陈述句。为了运算方便, 通常用符号化的命题变元  $P, Q, R$  等来指代具体的命题, 其值域为  $\{T, F\}$ 。

命题是一个具有确定真假值的陈述句。为了运算方便, 通常用符号化的命题变元  $P, Q, R$  等来指代具体的命题, 其值域为  $\{T, F\}$ 。



一个开关要么是开、要么是关, 只能是这两者之一, 命题的真值也是如此。

命题是一个具有确定真假值的陈述句。为了运算方便, 通常用符号化的命题变元  $P, Q, R$  等来指代具体的命题, 其值域为  $\{T, F\}$ 。

联结词通常规定为以下优先级顺序：

否定词( $\neg$ )、合取词( $\wedge$ )、析取词( $\vee$ )、蕴含词( $\rightarrow$ )、等值词( $\leftrightarrow$ )  
按运算优先级别由高到低排列

常用联结词的特性如表 1.1-2 所示。

表 1.1-2

| 联结词 | 记号                | 复合命题                  | 读法         | 真 值                                                | 对应的汉语词汇                                                    |
|-----|-------------------|-----------------------|------------|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 否定词 | $\neg$            | $\neg P$              | 非 $P$      | $\neg P$ 为 T 当且仅当 $P$ 为 F                          | “不是”，“非”，“并非如此”                                            |
| 合取词 | $\wedge$          | $P \wedge Q$          | $P$ 合取 $Q$ | $P \wedge Q$ 为 T 当且仅当 $P$ 为 T 且 $Q$ 也为 T           | “和”，“并且”，“与”，“也是”，“虽然……但是”，“不仅……而且”，“尽管……仍然”               |
| 析取词 | $\vee$            | $P \vee Q$            | $P$ 析取 $Q$ | $P \vee Q$ 为 T 当且仅当 $P$ 为 T 或 $Q$ 为 T              | “或者”，“要么……要么”                                              |
| 蕴含词 | $\rightarrow$     | $P \rightarrow Q$     | $P$ 蕴含 $Q$ | $P \rightarrow Q$ 为 F 当且仅当 $P$ 为 T 而 $Q$ 为 F       | “若……则”，“如果……那么”，“当”，“仅当”，“是充分条件”，“是必要条件”，“除非……否则”，“只有……才能” |
| 等值词 | $\leftrightarrow$ | $P \leftrightarrow Q$ | $P$ 等值 $Q$ | $P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 $P$ 和 $Q$ 的真值同为 T 或 F | “当且仅当”，“是充要条件”                                             |

联结词是命题演算的运算符，具有确定的运算规则，并规定了优先级。其中  $\neg$  是一元运算符， $\wedge$ 、 $\vee$ 、 $\rightarrow$  和  $\leftrightarrow$  等是二元运算符。

联结词的运算规则是对自然语言中一些词汇的抽象。

联结词“ $\rightarrow$ ”是对自然语言中“如果……那么”、“只有……才能”、“除非……否则”等词汇的抽象，其内涵基于一种善意推定。



如果证据确凿，那么一定是辛普森杀害了其前妻。但警方提供的证据不足，因此凶手可能是辛普森也可能不是。

联结词“ $\rightarrow$ ”是自然语言中“如果……那么”、“若……则”、“只有……才能”、“除非……否则”等的逻辑抽象。但需要注意的是，在自然语言中，如果前提为假，不管结论的真假，这个语句的意义往往无法判断。但在数理逻辑中，当前件  $P$  为 F 时，不管  $Q$  的真值如何， $P \rightarrow Q$  的真值均为 T，换句话说，“ $P \rightarrow Q$  真值为 T，则有若  $P$  为 T，则  $Q$  也必为 T，至于  $P$  为 F 时， $Q$  为 T 还是为 F 无所谓”，这称为“善意推定”。

若  $P$  和  $Q$  是命题，则  $P \rightarrow Q$  也是命题， $P$  称为前件或前提， $Q$  称为后件或结论。将  $Q \rightarrow P$ 、 $\neg P \rightarrow \neg Q$ 、 $\neg Q \rightarrow \neg P$  分别称为命题  $P \rightarrow Q$  的逆命题、反命题和逆反命题。

### 命题公式与翻译

原子命题：单个命题常元或命题变元构成的命题。原子命题是不能

再分解的命题。

**复合命题：**由原子命题和联结词组成的复杂命题。

命题公式(归纳定义)：

- (1) (基础)单个原子命题是命题公式；
- (2) (归纳)如果  $A$  和  $B$  是命题公式，那么  $(\neg A)$ 、 $(A \wedge B)$ 、 $(A \vee B)$ 、 $(A \rightarrow B)$ 、 $(A \leftrightarrow B)$  都是命题公式；
- (3) (极小性)当且仅当能够有限次应用条款(1)和条款(2)所得才是命题公式。

这种由归纳定义产生的公式又称为合式公式。

**【例题 1.1 - 2】**验证  $((P \wedge (Q \vee R)) \rightarrow (Q \wedge ((\neg S) \vee R)))$  是命题公式。

解答：根据命题公式的归纳定义，命题公式  $((P \wedge (Q \vee R)) \rightarrow (Q \wedge ((\neg S) \vee R)))$  的构造过程如图 1.1 - 1 所示。

该命题公式可以简化为

$$P \wedge (Q \vee R) \rightarrow (Q \wedge ((\neg S) \vee R))$$

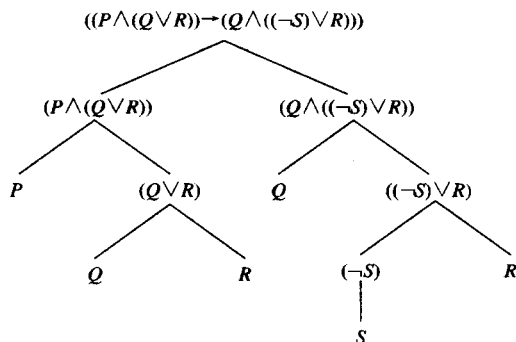


图 1.1 - 1

**【例题 1.1 - 3】**将以下自然语言中的语句翻译成命题公式。

- (a) 天下着雨夹雪；
- (b) 若不下雨且不下雪，则我去学校；
- (c) 若下雨或下雪，则我不去学校；
- (d) 我去学校当且仅当下雨但不下雪；
- (e) 如果我去学校，那么不下雪。

解答：首先找出语句中的原子命题，并用命题变元表示。

$P$ ：天下雨， $Q$ ：天下雪， $R$ ：我去学校

- (a)  $P \wedge Q$ ；
- (b)  $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$ ；
- (c)  $(P \vee Q) \rightarrow \neg R$ ；
- (d)  $(P \wedge \neg Q) \leftrightarrow R$ ；
- (e)  $R \rightarrow \neg Q$  或  $Q \rightarrow \neg R$ 。与该语句等价的说法还有：“只有不下雪，

单个命题常元  
或命题变元构成  
原子命题公式。

由原子命题和  
联结词按一定规  
则组合在一起构  
成命题公式，用  
来表示复杂的  
命题。  
括号()的运算  
优先级最高，但  
为了减少括号的  
数量，可以删去  
那些不影响运算  
顺序的多余括  
号对。

我才去学校”、“我去学校，仅当不下雪”、“除非不下雪，否则我不去学校”、“不下雪是我去学校的必要条件”、“我去学校是天不下雪的充分条件”等。

### 真值表



对命题公式中的每一个命题指定真(T, 1)、假(F, 0)值，称为命题公式的赋值，命题公式  $A$  在每一种赋值指派下都将取得确定的真(T, 1)、假(F, 0)值。

**命题变元的赋值：** 对一个命题变元，指定其真值为真(T, 1)或假(F, 0)之一。

**命题公式的赋值：** 含有  $n$  个命题变元的命题公式  $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ ，对其中的每个命题变元赋值，共有  $2^n$  种不同的赋值指派。对于每一种赋值指派， $A$  将取得确定的真(T, 1)、假(F, 0)值。

**真值表：** 设命题公式  $A$  由  $n$  个命题变元  $P_1, P_2, \dots, P_n$  构成，把  $P_1, P_2, \dots, P_n$  的各种指派列在左边，把结果命题  $A$  的对应真值列在右边，这样构成的一张表称为命题公式  $A$  的真值表。

**【例题 1.1 - 4】** 写出命题公式  $(P \vee \neg R) \vee (P \rightarrow Q)$  的真值表。

解答：命题公式  $(P \vee \neg R) \wedge (P \rightarrow Q)$  的真值表如表 1.1 - 3 所示。

表 1.1 - 3

| $P$ | $Q$ | $R$ | $\neg R$ | $P \vee \neg R$ | $P \rightarrow Q$ | $(P \vee \neg R) \wedge (P \rightarrow Q)$ |
|-----|-----|-----|----------|-----------------|-------------------|--------------------------------------------|
| 0   | 0   | 0   | 1        | 1               | 1                 | 1                                          |
| 0   | 0   | 1   | 0        | 0               | 1                 | 0                                          |
| 0   | 1   | 0   | 1        | 1               | 1                 | 1                                          |
| 0   | 1   | 1   | 0        | 0               | 1                 | 0                                          |
| 1   | 0   | 0   | 1        | 1               | 0                 | 0                                          |
| 1   | 0   | 1   | 0        | 1               | 0                 | 0                                          |
| 1   | 1   | 0   | 1        | 1               | 1                 | 1                                          |
| 1   | 1   | 1   | 0        | 1               | 1                 | 1                                          |

真值表以直观的形式描述了命题公式在各种赋值指派下的真值。

构造真值表首先将  $n$  个变元的  $2^n$  种不同的赋值指派列在表的左边，最好按二进制顺序排列。如果结果命题公式较简单，能够直观地看出其在各种赋值指派下的真值，则可直接写出其对应的真值。如果结果命题公式比较复杂，可以由简至繁，先求出其若干子公式的对应真值，最后再求结果命题公式的真值。

**【例题 1.1 - 5】** 给出命题公式  $(P \wedge \neg Q) \wedge \neg P$  和  $Q \rightarrow (P \vee Q)$  的真值表。

解答：命题公式  $(P \wedge \neg Q) \wedge \neg P$  和  $Q \rightarrow (P \vee Q)$  的真值表分别如表 1.1 - 4 和表 1.1 - 5 所示。

表 1.1 - 4

| P | Q | $(P \wedge \neg Q) \wedge \neg P$ |
|---|---|-----------------------------------|
| 0 | 0 | 0                                 |
| 0 | 1 | 0                                 |
| 1 | 0 | 0                                 |
| 1 | 1 | 0                                 |

表 1.1 - 5

| P | Q | $Q \rightarrow (P \vee Q)$ |
|---|---|----------------------------|
| 0 | 0 | 1                          |
| 0 | 1 | 1                          |
| 1 | 0 | 1                          |
| 1 | 1 | 1                          |

由以上两例可以看出, 有的命题公式在不同的赋值指派下真值可能取 T 也可能取 F; 有的命题公式在所有赋值指派下真值均为 F; 有的命题公式在所有赋值指派下真值均为 T。

### 重言式与矛盾式



设  $A$  是由命题变元  $P_1, P_2, \dots, P_n$  构成的命题公式。

**重言式:** 若对于命题变元的所有真值指派,  $A$  的真值均为 T, 则称  $A$  为重言式(或永真式)。

在所有的赋值指派下真值均为 T 的命题公式称为重言式。

**矛盾式:** 若对于命题变元的所有真值指派,  $A$  的真值均为 F, 则称  $A$  为矛盾式(或永假式)。

**偶然式:**  $A$  既不是重言式, 又不是矛盾式, 则称  $A$  为偶然式。

**可满足式:** 至少存在一种真值指派, 使  $A$  的真值为 T, 则称  $A$  为可满足式。

在所有的赋值指派下真值均为 F 的命题公式称为矛盾式。

**非永真式:** 至少存在一种真值指派, 使  $A$  的真值为 F, 则称  $A$  为非永真式。

图 1.1 - 2 给出了不同种类的命题公式之间的关系。

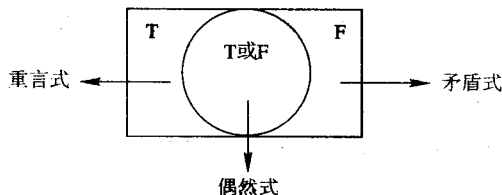


图 1.1 - 2

✱「定理」(代入规则) 重言式  $A$  中的某个子公式  $B$  出现的每一处均用同一命题公式  $C$  置换, 所得命题公式  $A'$  仍然是一个重言式。

【例题 1.1 - 6】证明:  $((P \vee S) \wedge R) \vee \neg((P \vee S) \wedge R)$  为重言式。

证明: 因为  $P \vee \neg P$  为重言式, 所以用  $(P \vee S) \wedge R$  置换  $P$  所得公式  $((P \vee S) \wedge R) \vee \neg((P \vee S) \wedge R)$  亦为重言式。 □



## B. 综合题解

理解命题、联结词、命题公式、真值表、重言式和矛盾式的基本定义是掌握本节的关键。常见的题型有：(一)判断一句话是否是命题；(二)命题符号化；(三)判断一个命题公式是否是重言式或矛盾式。

**【题解 1.1 - 1】**下列句子中哪些是命题？是命题的句子中哪些是复合命题？并将复合命题符号化。

- ① 你喜欢照像吗？
- ② 大熊猫产在我国四川卧龙。
- ③  $3+x=7$ 。
- ④  $2+3>5$ 。
- ⑤ 小张与小刘住一个寝室。
- ⑥ 别撒谎了！
- ⑦ 这首歌真好听！
- ⑧ 李群的英语和数学好。
- ⑨ 只要天气好，飞机就能正常降落。
- ⑩ 只有你不怕困难，你才能战胜困难。

解答：① 不是命题，因为不是陈述句。

② 是命题，且是原子命题。

③ 不是命题，因为没有唯一确定的真值。

④ 是命题，且是原子命题。

⑤ 是命题，且是原子命题。

⑥ 不是命题，因为它是祈使句而不是陈述句。

⑦ 不是命题，因为它是感叹句而不是陈述句。

⑧ 是命题，且是复合命题。

设  $P$ ：李群英语好， $Q$ ：李群数学好，则原命题符号化为

$$P \wedge Q$$

⑨ 是命题，且是复合命题。

设  $P$ ：天气好， $Q$ ：飞机能正常降落，则原命题符号化为

$$P \rightarrow Q$$

⑩ 是命题，且是复合命题。

设  $P$ ：你怕困难， $Q$ ：你能战胜困难，则原命题符号化为

$$Q \rightarrow \neg P$$

**【题解 1.1 - 2】**以下说法中与  $P \rightarrow Q$  不等价的是\_\_\_\_\_。

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| (A) $P$ 是 $Q$ 的充分条件 | (B) $Q$ 是 $P$ 的必要条件 |
| (C) $Q$ 仅当 $P$      | (D) 只有 $Q$ 才 $P$    |

解答：(C)。

“ $P \rightarrow Q$ ”的意义是：如果将  $Q$  看作结论，则“ $P$  是  $Q$  的充分条件”；如

果将  $P$  看作结论, 则“ $Q$  是  $P$  的必要条件”。“ $Q$  仅当  $P$ ”表示“ $P$  是  $Q$  的必要条件”显然与“ $P \rightarrow Q$ ”不符。其  $P \rightarrow Q$  等价的说法还有“ $P$  仅当  $Q$ ”、“ $Q$  当  $P$ ”、“若非  $Q$  则非  $P$ ”等。

◇【题解 1.1 - 3】将以下语句翻译成命题公式。

“除非你年满 18 周岁, 否则只要你身高不足 1.6 米就不能乘坐过山车。”

解答: 将命题形式化最简单的方式莫过于用单个命题变元来表示整个句子, 但是如果需要进行推理证明这种翻译方式是无用的。我们尝试着来分析这个句子。

首先, 试图找到每个原子命题:

$P$ : 你年满 18 周岁,  $Q$ : 你身高不足 1.6 米,  $R$ : 你乘坐过山车

然后, 分析原子命题间合适的联结词。“除非  $P$ ……否则  $A$ ”显然要翻译成蕴含词, 其语义等价于“如果非  $P$ , 那么  $A$ ”, 即  $\neg P \rightarrow A$ ; “只要  $Q$ ……就  $B$ ”也要翻译成蕴含词, 即“ $Q \rightarrow B$ ”; “不能……”要翻译成否定词。综合以上分析, 可知正确的解答应该是

$$\neg P \rightarrow (Q \rightarrow \neg R)$$

当然, 有许多方式可以将该语句翻译成合适的命题公式, 例如:  $(\neg P \wedge Q) \rightarrow \neg R$ , 可知以上语句与“如果你未年满 18 周岁且身高不足 1.6 米, 那么你就不能乘坐过山车”是等价的。

◇【题解 1.1 - 4】将下列句子翻译成命题演算公式。

(1) 仅当我有时间且天不下雨, 我将去郊游。

(2) 张强在图书馆看书, 除非图书馆不开门或张强生病了。

解答: (1) 设  $P$ : 我有时间,  $Q$ : 天不下雨,  $R$ : 我将去郊游, 将该句翻译成命题公式为

$$R \rightarrow (P \wedge Q)$$

(2) 设  $P$ : 张强在图书馆看书,  $Q$ : 图书馆不开门,  $R$ : 张强生病了, 将该句翻译成命题公式为

$$\neg (Q \vee R) \rightarrow P$$

◇◇【题解 1.1 - 5】关于物质有以下两种定义:

(1) 占据空间、有质量并且不断变化的客体称为物质。

(2) 占据空间的有质量的客体称为物质, 而物质是不断变化的。

请问关于物质的这两种定义有什么区别? 试用命题逻辑进行分析。

解答: 设命题  $P$ : 它占据空间,  $Q$ : 它有质量,  $R$ : 它不断变化,  $S$ : 它是物质。

定义(1):  $(P \wedge Q \wedge R) \leftrightarrow S$

定义(2):  $(P \wedge Q \leftrightarrow S) \wedge (S \rightarrow R)$

这两种定义的不同点在于: 定义(2)含有“如若  $P \wedge Q$  为真, 则必有  $R$  为真”的意思, 即“占据空间并且有质量的客体一定是不断变化的客体”, 而定义(1)没有这层意思。

为了正确地将自然语言中的语句翻译成相应的命题公式, 有时可以将语句转换为语义等价的另一个语句后再翻译, 但是要确保两者语义的等价性。

**【题解 1.1 - 6】**写出命题公式  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$  为真的赋值。

解答：首先写出  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$  的真值表，如表 1.1 - 6 所示。

表 1.1 - 6

| $P$ | $Q$ | $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ |
|-----|-----|----------------------------------------------|
| 0   | 0   | 1                                            |
| 0   | 1   | 0                                            |
| 1   | 0   | 0                                            |
| 1   | 1   | 1                                            |

所以，命题公式  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$  为真的赋值为： $P=0, Q=0$  或  $P=1, Q=1$ 。

## C. 习题

**【习题 1.1 - 1】**下列句子中哪些是命题？是命题的句子中哪些是复合命题？并将复合命题符号化。

- (a) 离散数学是一门必修课。
- (b) 明天你有空吗？
- (c) 请勿随地吐痰！
- (d) 如果  $a$  和  $b$  都是偶数，那么  $a+b$  也是偶数。
- (e) 5 和 7 都是素数。

**【习题 1.1 - 2】**写出命题“如果出太阳并且没刮风，那么我将去冲浪”的逆命题、反命题和逆反命题。

**【习题 1.1 - 3】**设命题变元  $P$ ：你的车速超过了 100 千米/小时， $Q$ ：你受到交警的处罚。将以下语句翻译成命题公式。

- (a) 你的车速没有超过 100 千米/小时；
- (b) 你的车速超过了 100 千米/小时，却没有受到交警的处罚；
- (c) 你的车速若超过了 100 千米/小时，你将会受到交警的处罚；
- (d) 你的车速若不超过 100 千米/小时，你就不会受到交警的处罚；
- (e) 只要你受到交警的处罚，你的车速就超过了 100 千米/小时。

**【习题 1.1 - 4】**给定命题  $P$ ：天下雪， $Q$ ：我有时间， $R$ ：我进城，将以下语句翻译成命题公式。

- (a) 天没有下雪。
- (b) 如果天不下雪且我有时间，那么我就进城。
- (c) 除非下雪，否则我不进城。
- (d) 我进城的必要条件是我有时间。
- (e) 我进城当且仅当我有时间且天不下雪。

**【习题 1.1 - 5】**给出以下命题公式的真值表，并指出各命题公式的