数学精品库

SHUXUE JINGPIN KU

平面几何思维训练

PINGMIAN JIHE SIWEI XUNLIAN

余文竑
詹方玮

民主与建设出版社

数学精品库

平面几何思维训练

余文竑
詹方玮 著

民主与建设出版社

图书在版编目(CIP)数据

平面几何思维训练/余文竑,詹方玮著.
—北京:民主与建设出版社,1996.11
(数学精品库)

ISBN 7-80112-067-3

Ⅰ.平…
Ⅱ.①余…
②詹…
Ⅲ.平面几何-中学-习题
Ⅳ.G634.635

责任编辑:闵　杰

民主与建设出版社出版发行
(社址:北京朝外大街吉祥里 208 号　邮编:100020)
北京佳顺印刷厂印刷
开本:787×1092　1/32　印张:6.25
2001 年 1 月第 3 次印刷
字数:21 千字　印数:13001-23000　定价:9.80 元

《初等数学精品库》编委会

作 者 介 绍

余文竑，男，1945年10月出生于福建泉州市，1967年7月福建师范大学数学系毕业，泉州一中任数学课程，中学高级教师，泉州市区数学校际教研组组长，中国数学奥林匹克一级教练员，泉州市政协委员，曾获"泉州市先进教育工作者"称号。代表作《求曲线方程复习课的设计教案》获福建省中学数学教学研究会优秀论文奖，专著《异面直线》1987年由福建教育出版社出版，《把问题一般化》等多篇论文被正式刊用。

詹方玮，男，1945年9月出生于福建泉州市，1968年7月毕业于福建师范大学数学系，泉州教师进修学校数学教研员，中学高级教师，1995年获"福建省优秀教研员"称号。福建省数学学会理事，福建省第三届中学数学研究会常务理事、副秘书长。代表作《对一项教改实验的理论分析》获福建省教委优秀成果奖，该论文获福建省中学数学教学研究会优秀论文奖，有多篇数学论文被正式刊用。

前　言

平面几何是数学王国中最古老的一个分支。2000多年前，古希腊的大数学家欧几里得(Euclid，公元前330－前275)在前人的几何成就的基础上，写成了一部不朽的巨著《几何原本》，他是第一个使平面几何成为系统学科的人。多少世纪以来，经过众多卓越学者的不懈努力，许许多多的定理不断地被发现，使得这座巍峨的几何学宫殿更为灿烂辉煌，它为人类留下一笔不可估量的文化遗产。

随着现代科学技术日新月异的发展，不可否认，在当今，欧氏几何的实用性并不大，但为什么现行的初中数学课本仍把几何作为教学内容的一个部分把它保留下来，而中学生奥林匹克数学竞赛也把它作为重要内容之一列进竞赛大纲呢？答案是明确的，它有其不可替代的功能。古希腊的数学家柏拉图(Plato，公元前427－前347)说过："几何会把人们引向真理，产生哲学思想。"几何不仅对人类的美学价值观念进行有益的熏陶，更重要的价值还在于有助人们的思维训练，犹如健身器一般。所以可以这样说：几何是锻炼思维的体操。几何与逻辑推理有着千丝万缕的联系，它为我们创造了思考和观察世界的方法，使人类能够卓有成效地进行一系列推理，为培养一代又一代的科学家做出了不可磨灭的贡献。难怪现代物理学家爱因斯坦说："如果欧几里得几何未能激起你少年时代的热情，那么你就不是一个天生的科学思想家。"

本书把有史以来许多著名的平几定理介绍给读者，其中包括着以驰骋疆场的法国皇帝拿破仑名字命名的定理，并详尽地给出这些定理的多种证法，有的证法是定理发现者的原证。某些定理的发现或者对它们的推广，只是近几年的事，本书也给予介绍。作者试图以此引发广大青少年学习这些知识的欲望，激起他们对科学的热爱、追求和为之献身的精神，同时也为中学数学老师和数学爱好者提供有用的资料。

由于作者水平有限，本书的疏漏和错误在所难免，敬请读者不吝指出。

目　录

一 三角形巧合点

三角形的巧合点是由三角形的特殊线共点形成的，例如三角形的三条中线、三条内角平分线、三条高线，它们都分别交于一点，分别称为重心、内心、垂心等。关于这些巧合点的研究有的历史相当悠久，有的深入探讨则是近几十年的事，例如伪垂心、界心、陪位重心的研究近几年来陆续见于国内外一些刊物。本章准备对其中 12 种三角形巧合点进行归纳整理，并对一些巧合点性质给出几种典型的证明。这 12 种三角形的巧合点是：外心、内心、垂心、重心、旁心、格高尼点、威毕特点、费马点、伪垂心、界心、陪位重心、布洛卡点。

我们已经熟悉以下 5 个巧合点：

（一）**外心定理**　三角形三边的中垂线交于一点 O（外心），这个点到三角形三个顶点的距离相等。

（二）**内心定理**　三角形三内角的平分线交于一点 I（内心），这个点到三角形三边的距离相等。

（三）**垂心定理**　三角形三条高线交于一点 H（垂心）。

（四）**重心定理**　三角形三条中线交于一点 G（重心），这个点到一边中点的距离等于这边上的中线长的 1/3。

（五）**旁心定理**　三角形的每一个内角的平分线与其他两角的外角平分线交于一点（旁心），这样的交点有三个：I_1、I_2、I_3，这些点分别和三边等距离。

这五心之间的主要关系有：

(1) **锐角三角形的垂心是垂足三角形的内心，钝角三角形的垂心是垂足三角形的旁心，三角形的内心是旁心三角形的垂心。**

下面以锐角三角形为例证明(钝角三角形仿照可得)。

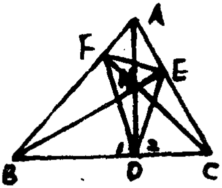
证明一 ∵ H 在 AD 上，

∴ AD 平分 $\angle EDF$(见第二章六)。

同理 BE 平分 $\angle DEF$，

则 H 是 $\triangle DEF$ 的内心。

又∵ $\angle 1=\angle 2$，∴ BD 是 $\angle EDF$ 的外角平分线，B 点为 $\triangle DEF$ 的一个旁心，从而 $\triangle ABC$ 是 $\triangle DEF$ 的旁心三角形。



(图 1)

证明二 ∵ H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，

∴ B、D、H、F 四点共圆，于是 $\angle 1=\angle BHF$，同理 $\angle 2=\angle CHE$，则 $\angle 1=\angle 2$。

故 AD 平分 $\angle EDF$。以下略。

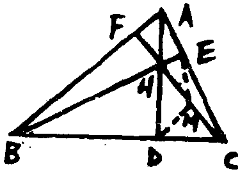
证明三 取 CH 的中点，连 DM、EM，

∴ $DM=\frac{1}{2}CH=EM$

∵ $\angle MDH=\angle DHM=\angle B$，

$\angle DMH=2\angle MCD$，

$\angle EMH=2\angle ECM$，



(图 2)

∴ $\angle DME=\angle DMH+\angle EMH=2\angle C$，$\angle MDE=90^\circ-\angle C$，$\angle EDH=\angle MDH-\angle MDE=90^\circ-\angle A$。

同理 $\angle FDH=90^\circ-\angle A$，

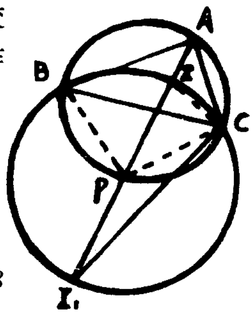
故　AD 平分 $\angle EDF$。以下略。

注　若垂足$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$，我们易得：当$\triangle ABC$为锐角三角形时，三内角比为1：1：1，即$\triangle ABC$为正三角形；当$\triangle ABC$为钝角三角形时，三内角比为4：2：1，即三角形一边的倒数等于其他的两边的倒数之和。

(2) 外心与垂心是互为等角共轭点，内心是自等角共轭点（若 AO、AH 关于 AH 对称，BO、BH 关于 BI 对称，且 CO、CH 关于 CI 对称，则 O、H 两点叫 $\triangle ABC$ 的等角共轭点）。

(3) 三角形的内心与旁心连成的线段被外接圆平分。

证明　设$\triangle ABC$的$\angle A$平分线交外接圆于 P，以 P 为圆心，PC 为半径作圆交直线 AP 于 I 和 I_1 两点。



(图 3)

$\because$　$PB = PC = PI$，

$\therefore$　$\angle PIC = \angle PCI$。

但　$\angle PIC = \frac{1}{2}\angle A + \angle ACI$，

而　$\angle PCI = \angle BCI + \angle PCB = \angle BCI + \frac{1}{2}\angle A$，

于是 $\angle ACI = \angle BCI$，即 CI 平分 $\angle ACB$，

从而 I 为$\triangle ABC$的内心。

再由 $CI \perp CI_1$，可得 CI_1 平分 $\angle ACB$ 的外角，

于是 I 是$\triangle ABC$的一个旁心，

故　P 点是 II_1 的中点。

(4) 阿波罗尼定理　三角形的垂心与顶点的距离等于外心到对边中点距离的 2 倍。

证明一　设 AB 的中点 F，BC 的中点 D，

$\because$ O 为 $\triangle ABC$ 外心，H 为垂心，

$\therefore$ $OD \perp BC$，$AH \perp BC$。

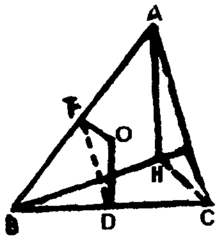
则　$AH \parallel OD$。同理 $CH \parallel OF$。

又　$DF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AC$，

$\therefore$ $\triangle ODF \backsim \triangle HAC$。

因此 $AH : OD = AC : DF$。

故　$AH = 2OD$。



(图 4)

证明二　分别取 AB、BC、HB 的中点 F、D、M。

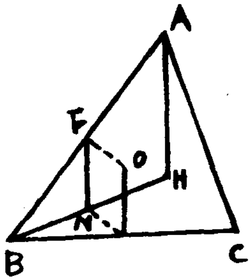
$\because$ $AH \perp BC$，$OD \perp BC$，

$\therefore$ $CD \parallel AH \parallel FM$。

同理可得 $OF \parallel DM$。

则 $CFMD$ 为平行四边形。

故　$AH = 2FM = 2OD$。



(图 5)

证明三　设 BO 交 $\triangle ABC$ 外接圆 O 于 N，连结 AN、NC。

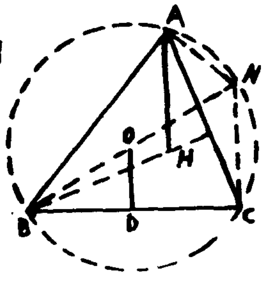
$\because$ $NC \perp BC$，$AH \perp BC$，

$\therefore$ $AH \parallel NC$。

同理 $CH \parallel NA$。

则　$ANCH$ 为平形四边形。

故　$AH = CN = 2OD$。



(图 6)

证明四　连 BO，设 $BO = R$，

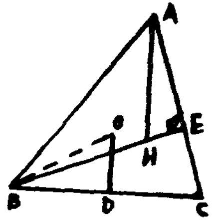
$\therefore$ $\angle BOD = \angle A$，

$OD = OB\cos A = R\cos A$。

在 $Rt\triangle ABE$ 中，$AE = AB\cos A$，

在 $Rt\triangle AHE$ 中，$AH = \dfrac{AE}{\sin\angle AHE}$

$= \dfrac{AE}{\sin C} = \dfrac{AB\cos A}{\sin C} = 2R\cos A = 2OD$。



(图 7)

证明五 如图建立坐标系，

设 $A(m,0)$，$B(0,n)$，$c(0,-t)$。

AC 边上的高：$y = -\dfrac{m}{t}x + n$，

垂心 $H(\dfrac{nt}{m},0)$，

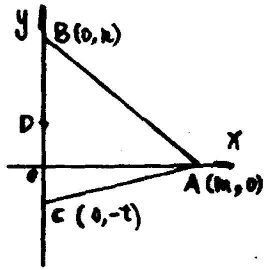
$\therefore \quad |AH| = \dfrac{m^2 - nt}{m}$

$\because \quad BC$ 的中垂线：$y = \dfrac{n-t}{2}$

AB 的中垂线：$y = \dfrac{m}{n}x + \dfrac{n^2 - m^2}{2m}$

$\therefore \quad$ 外心 $O(\dfrac{m^2 - nt}{2m}, \dfrac{n-t}{2})$

故 $\quad |AH| = 2|OD|$。



(图 8)

阿波罗尼是公元前 3 世纪希腊著名学者，他的著作在古代数学文献中占颇大部分，其中关于圆锥曲线的著作（共 8 卷，据说有 1 卷失传）尤负盛名。他提出的著名的阿波罗尼问题：求作一圆，使与三个给定圆相切。他本人对问题的解未能传到今天，但另外一些古代的作者曾提到过它。看来阿波罗尼为求通解预先考察了一些特殊和极限的情况：

（Ⅰ）作圆使经过三个给定点；

（Ⅱ）作圆使与给定三直线相切；

（Ⅲ）作圆使经过给定点并与给定二平行线相切；

（Ⅳ）作圆使经过给定点，并与给定二相交直线相切；

（Ⅴ）作圆使经过二给定点，并与给定直线相切；

（Ⅵ）作圆使经过二给定点，并与给定圆相切；

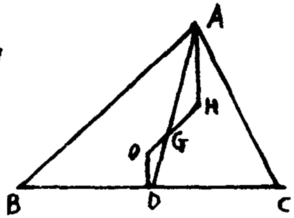
（Ⅶ）作圆使与给定圆相切；

研究表明，如果阿波罗尼问题有有限个解，则其数目不超过 8 个。

(5) **欧拉线(Euler Line)定理**　**三角形的外心、重心、垂心三点共线(欧拉线)，且重心三等分外心和垂心之连线段。**

此题欧拉于 1765 年首先解决。

证明一　设 O、G、H 各为 $\triangle ABC$ 的外心、重心、垂心。



（图 9）

$\because$ $OD \parallel AH$，

$\therefore$ $\angle ODG = \angle HAG$。

$\because$ $AG = 2DG, AH = 2OD$，

$\therefore$ $\triangle DGO \backsim \triangle AGH$，

从而 $\angle DGO = \angle AGH$，

故 O、G、H 共线，且 $OG : GH = GD : AG$，即 $OH = 3OG$。

证明二　设 AD 交 OH 于 G。

$\because$ $OD \parallel AH$，

$\therefore$ $\triangle OGD \backsim \triangle HGA$。

则 $AG : GD = AH : OD = 2$，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，故 O、G、H 三点共线。

证明三(解析法)　与阿氏定理证明五相同可得

$$H\left(\frac{nt}{m},0\right), O\left(\frac{m^2-nt}{2m},\frac{n-t}{2}\right), G\left(\frac{m}{3},\frac{n-t}{3}\right)$$

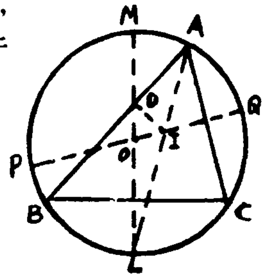
易得欧拉线方程为　$y=\dfrac{n-t}{m^2-3nt}(mx-nt)$。

设 G' 内分 OH 之比为 $1:2$，由定比分点公式解得 $x_{G'}=x_G$，$y_{G'}=y_G$，则 G' 与 G 点重合。

故　O、G、H 三点共线。

(6) **查帕耳——欧拉(Chapple－Euler)定理**　设 R、r **是三角形的外接圆和内切圆的半径，则三角形的外心与内心间的距离** $OI^2=R^2-2Rr$。

证明一　过 O、I 两点作直径 PQ，作直径 $ML\perp BC$，过 I 作 $ID\perp AB$ 于 D。



(图 10)

∵　$Rt\triangle ADI\backsim Rt\triangle MBL$，

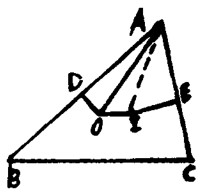
∴　$ID:BL=AI\cdot ML$，

即　$2Rr=AI\cdot BL$。

∵　$BL=IL$，

∴　$2Rr=AI\cdot IL=(R+OI)(R-OI)=R^2-OI^2$。

证明二　作 $OD\perp AB$ 于 D，引 $IE\perp AC$ 于 E，$\angle AOD=C$，$\angle OAD=90°-C$，$\angle IAE=\dfrac{1}{2}A$。



(图 11)

$$\angle IAO=\left|\frac{1}{2}A-(90°-C)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left|C-B\right|$$

在 $Rt\triangle AIE$ 中，$AI=\dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}=4R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$。

$$OI^2 = AI^2 + R^2 - 2R \cdot AI\cos\angle OAI$$
$$= 16R^2\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} + R^2 - 8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C-B}{2}$$
$$= R^2 + 8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}(2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{C-B}{2})$$
$$= R^2 - 8R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B+C}{2})$$
$$= R^2 - 2Rr。$$

因为$OI^2 \geqslant 0$,可得$R \geqslant 2r$。这就是著名的欧拉(*Euler*)定理。

若$\triangle ABC$的内切圆I与三边AB、BC、CA分别切于D、E、F,$AD = \frac{1}{2}(b + c - a)$,$BE = \frac{1}{2}(c + a - b)$,$CF = \frac{1}{2}(a + b - c)$,根据欧拉定理可得不等式

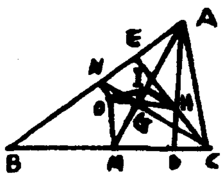
$$(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a) \leqslant abc,$$
$$8AD \cdot BE \cdot CF \leqslant AB \cdot BC \cdot CA。$$

欧拉定理推广一　双心四边形的外接圆半径R,内切圆半径r,则$R \geqslant \sqrt{2}r$。

欧拉定理推广二　四面体的外接球半径R,内切球半径r,则$R \geqslant 3r$。

(7) 外心O、内心I、重心G、垂心H间的距离的数量关系:

$$6OI^2 = 3IH^2 = 2OH^2 + 9IG^2$$
$$2OI^2 + IH^2 = 6OG^2 + 3IG^2$$
$$4OI^2 + 2IH^2 = 3GH^2 + 6IG^2。$$



(图 12)

证明 $\because$ O、G、H 三点共线，$GH = 2OG$，$\triangle IOH$ 中，根据斯台瓦特(Stewart)定理

$OI^2 \cdot GH + IH^2 \cdot OG - IG^2 \cdot OH = OH \cdot OG \cdot GH$，化简整理即可得上面三个数量关系式。

(8) 旁心三角形 $I_1I_2I_3$ 与原三角形 ABC 的一些数量间的关系。设边长分别为 a'、b'、c'；a、b、c，外接圆半径为 R'、R，内切圆半径各为 r'、r，面积分别为 $\triangle'$、$\triangle$，则

$\triangle' \geqslant 4\triangle$，

$R' = 2R$，

$r' \geqslant 2r$，

$a' + b' + c' \geqslant 2(a + b + c)$，

$a'b' + b'c' + c'a' \geqslant 4(ab + bc + ca)$，

$a'^2 + b'^2 + c'^2 \geqslant 4(a^2 + b^2 + c^2)$，

$\dfrac{1}{a'} + \dfrac{1}{b'} + \dfrac{1}{c'} \leqslant \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c})$，

$\dfrac{1}{a'b'} + \dfrac{1}{b'c'} + \dfrac{1}{c'a'} \leqslant \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca})$，

$\dfrac{1}{a'^2} + \dfrac{1}{b'^2} + \dfrac{1}{c'^2} \leqslant \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2})$，

$\dfrac{a'}{a} + \dfrac{b'}{b} + \dfrac{c'}{c} \geqslant 6$，

$\dfrac{a}{a'} + \dfrac{b}{b'} + \dfrac{c}{c'} \leqslant \dfrac{3}{2}$，

$\dfrac{a'b'}{ab} + \dfrac{b'c'}{bc} + \dfrac{c'a'}{ca} \geqslant 12$，

$\dfrac{ab}{a'b'} + \dfrac{bc}{b'c'} + \dfrac{ca}{c'a'} \leqslant \dfrac{3}{4}$，