走向清华北大

同步导读

修订版

丛书主编 希扬

高二

数学

主编：[illegible]
[illegible]

与现行教材同步

龍門書局

责任编辑：王凤雷　杨　波

《走向清华北大》

足以成就一个强者

- 高一数学试验本(上、下)
- 高一物理试验本
- 高一化学试验本
- 高一语文(上、下)
- 高一英语
- 高一历史试验本
- [illegible]
- 高二物理
- 高二化学
- 高二语文(上、下)
- 高二英语
- 高二政治
- 高二历史
- 高二数学试验本(上、下)
- 高二物理试验本
- 高二化学试验本
- 高三数学
- 高三物理
- 高三化学
- 高三语文
- 高三英语
- 高三政治
- 高三历史
- 高中地理
- 高中地理试验本
- 高中生物

全国著名特高级教师　编写

ZOUXIANG QINGHUA BEIDA

ISBN 7-80111-975-4

9 787801 119759　01>

ISBN 7-80111-975-4/G…

定价：15.00元

走向清华北大·同步导读（修订版）

高二数学

主编　屠新民　王慧兴

编者　屠新民　王慧兴　侯学奎
　　　马玉霞　杜林涛　李丽琴
　　　兰社云　赵晓强

龍門書局

2001

走向清华北大·同步导读

修订版

高二数学

储新民　王慧兴　主编

责任编辑　王风霈　杨　波

龙门书局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

北京人卫印刷厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

*

2000年6月第一版　开本：850×1168　1/32

2001年6月修订版　印张：14 1/8

2001年8月第七次印刷　字数：438 000

印数：105 001—115 000

ISBN 7-80111-975-4/G·924

定价：15.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

走向清华北大·同步导读

丛书编委会

我要上清华！我要上北大！

——《走向清华北大·同步导读》序

“我要上清华！”“我要上北大！”这是时代的强音，是立志成才报效祖国的莘莘学子发自心底的呼声。1998 年，在文教图书界享有盛誉的龙门书局应时推出了鼓舞人心、大气凝重的《走向清华北大·高考阶梯训练》丛书，在强手如林、竞争激烈的图书市场异军突起，好评如潮。丛书主编曾应邀在北京图书大厦及全国各大城市中心书店签名售书，又掀起一股股小波澜。几年来，读者争相购买，销量达 20 万套之多。1999 年 9 月 10 日，在全国很有影响的报纸《南方周末》第 19 版评论说：那套《走向清华北大》，既响亮，又吉利，听得人浮想联翩，意气风发，士气高涨……

为了培养人才，培养高级人才，培养中国国宝级人才，而今，龙门书局又隆重推出了《走向清华北大·高考阶梯训练》丛书的姊妹篇——《走向清华北大·同步导读》丛书。

这套与现行教材同步的丛书，计 46 本，以能力培养为目的，以教育部最新教改精神为准绳，以 2001 年最新教材为依据，精心编纂，自成一家。它具有“三名”“三全”“一新”的显著特色。

“三名”即名家策划、名师主笔、名社出版。

为了编纂一套高质量的教辅书，以便多为全国重点院校培养人才，龙门书局特邀了教育界有影响的专家学者研究、策划，并编

制蓝图与提纲；又聘请了多位工作在教学第一线的“高分老师”，尤其聘请了辅导高考卓有成效，每年都为清华北大等名校输送较多新生的特、高级教师撰稿；再由久负盛名的龙门书局出版，构成了本书的“三名”特色。

“三全”即年级全、学科全、配套全，堪称“三全其美”。

年级全。有小学版——上清华北大，须从娃娃抓起；有初中版——上清华北大，初中打好基础；有高中版——上清华北大，高中阶段强势准备，蓄势待发。

学科全。除语、英、数、理、化学科外，新增政、史、地、生等学科，以利于学生综合能力的培养。

配套全。既有与统编教材配套的同步书，又有与试验教材配套的同步书。

“一新”即体例新，使本书别具一格，书香四溢。

品牌是跨入21世纪的入场券。教辅书的竞争，就是品牌的竞争，且往往是你中有我，我中有你。龙门书局在广泛调查文教图书市场之后，引发了新的思考，在博采众长的基础上，设计了科学、高效、实用、创新的新体例。同时，将试题中基础题、中等题和难题的比例设计为5:3:2，以便于拉开档次，使高材生能脱颖而出。

据教育行家说：新出版的《走向清华北大·同步导读》丛书，从内容剖析、体例安排到样题设置，均有其独到之处，使千百万小学生、初中生、高中生都能踏着时代的节拍，感受到教改的脉动；这是龙门书局为他们构架起的通向清华北大的宽阔桥梁。

最后以“我劝天公重抖擞，不拘一格降人才！”与大家共勉。

希　扬

修订版前言

本书依据最新高级中学课本教学内容编写。在编写和修订过程中突出了创新意识,突出了对中学生怎样学好数学的指导。

本书各章的每节都由“知识要点提示”、“重点问题剖析”、“高考样题例释”、“高考误区警示”、“素质能力训练”几部分组成。知识点明确,重点突出,并通过一些典型的高考题和近几年来的各省高考模拟题中的优秀题目,介绍解题的技巧和数学思想方法及解题策略。所选的训练题严格按高考的选择题、填空题、解答题编成,形成选择题由易到难,填空题由易到难,解答题由易到难,选择题、填空题、解答题由易到难的四个层次三个梯度的特色。每章都配有一套综合能力测试题,供检查测验用,以便读者从测试题中的最新题型,即阅读题、应用题中提高解决问题的能力,达到通过测试提高分析问题与解决问题的能力的目标。

本书由屠新民、王慧兴主编。参加编写的还有屠新民、王慧兴、侯学奎、马玉霞、杜林涛、李丽琴、兰社云、赵晓强。本书是我们教学工作与指导高二复习的经验结晶。尽管我们认真撰写反复修改,但不足之处在所难免,望广大读者批评、指正。

目　录

代数部分

平面解析几何部分

代 数 部 分

第五章 不等式

导 言

本章可分四个单元.第一单元是不等式的基本概念和不等式的性质，介绍了同向不等式、异向不等式的意义，提出了对任意两个实数比较大小的基本方法，这是不等式的证明和解不等式的主要依据.不等式的性质中讲了五个定理和三个推论，并给出了严格的证明，这是学习本章的基础.第二单元是不等式的证明，通过例题分别介绍了证明不等式时一些常用的基本方法——比较法、综合法和分析法，还提出了几个正数的算术平均数和几何平均数这一重要概念，并就 $n=2$、3 时算术平均数不小于几何平均数进行了证明.第三单元讲不等式的解法，在解一元一次不等式(组)、一元二次不等式的基础上，介绍了分式不等式、无理不等式和简单的超越不等式的解法.第四单元介绍了含有绝对值的不等式的两个基本定理，含有绝对值的不等式的解法和证明.

5.1 不等式及其性质

一 知识要点提示

(1) 同向不等式、异向不等式的概念

如在下列不等式中

$$2a+1>a+3, \quad ①$$

$$a^2+3>3a,\qquad ②$$

$$x^2<a,\qquad ③$$

$$x^2-2x-2<0.\qquad ④$$

①和②每一个的左边都大于右边，或者每一个的左边都小于右边如③和④，这样的两个不等式是同向不等式；如果一个不等式的左边大于右边，而另一个不等式的左边小于右边，如①和③，这两个不等式就是异向不等式.

(2) 以数轴上表示实数的点的有序性规定了实数的大小，由此得出性质

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b;$$

$$a-b=0\Leftrightarrow a=b;$$

$$a-b<0\Leftrightarrow a<b.$$

它不仅可以用来比较实数的大小，而且是推导不等式性质的基础.

(3) 不等式的性质

① $a>b\Leftrightarrow b<a$.

② $a>b,\ b>c\Rightarrow a>c$.

③ $a>b\Rightarrow a+c>b+c$.

④ $a>b,\ c>d\Rightarrow a+c>b+d$.

⑤ $a>b,\ c>0\Rightarrow ac>bc$;

$a>b,\ c<0\Rightarrow ac<bc$.

⑥ $a>b>0,\ c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

⑦ $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$ ($n\in Z$，且 $n>1$).

③ $a>b>0\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ ($n\in Z$，且 $n>1$).

对不等式的每条性质要会证明，对性质的条件要掌握确切.

重点问题剖析

本单元的重点问题是不等式的性质，它是解不等式与证明不等式的理论依据.关键是要正确理解和运用，对不等式的每条性质，要弄清条件与结论，注意条件的加强与放宽、条件与结论的关系.

如性质③中，$a>b$ 是 $a+c>b+c$ 的充分且必要条件，性质④中，$a>b$，$c>d$ 是 $a+c>b+d$ 的充分不必要条件，因此解不等式组时不能做如下变

形:例,解不等式组$\begin{cases}2x-1>3, & ①\\ 3x>1. & ②\end{cases}$

① + ②得:$5x-1>4$, $\therefore x>1$.

此种解法有误,因为原不等式组与 $5x-1>4$ 不等价.

正确解法:由①得 $x>2$,

由②得 $x>\frac{1}{3}$.

$\therefore$ 不等式组的解集是$\{x|x>2\}$.

高考样题例释

例 1 若 a、b 是任意实数,且 $a>b$,则 ( )

(A) $a^2>b^2$ (B) $\frac{b}{a}<1$

(C) $\lg(a-b)>0$ (D) $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

分析:逐个考察各选项,根据不等式的性质及函数的性质判断真假.

解一:当 $a>b>0$ 时,可得 $a^2>b^2$,$\frac{b}{a}<1$,但该题的条件是 $a>b$,故 $a^2>b^2$,$\frac{b}{a}<1$ 不一定成立.由 $\lg(a-b)>0$,则需 $a-b>1$,即 $a>b+1$,但由已知 $a>b$ 不能得到$a>b+1$,故(C)不一定成立.对于(D),可视为指数函数 $y=(\frac{1}{2})^x$,当 $a>b$ 时,得$(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$,故(D)成立.

解二:取特殊值 $a=0$, $b=-1$ 进行检验,排除(A)、(B)、(C),得(D).

评注:考点集中,简明容易判断,属考查基本性质的容易题,采用选择题的题型很合适.

例 2 已知 $a>b$,且 $ab\neq0$,则$\frac{1}{a}$与$\frac{1}{b}$的大小关系为 ( )

(A) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ (B) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

(C) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$或$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ (D) 以上答案都不对

分析:因 $ab\neq0$,需对 $ab<0$、$ab>0$ 进行讨论.

解:若 $ab<0$,只能是 $a>0$,$b<0$,显然有$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$;若 $ab>0$,则$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

$=\frac{b-a}{ab}<0$. $\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故选(C).

评注：含有字母的式子比较大小，需对字母的取值情况进行分类讨论；当 $ab>0$ 时，有 $a>b \Leftrightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 或 $a<b \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

例 3　若 $a>b$, $c>d$，则下面不等式成立的是　　(　　)

(A) $a+d>b+c$　　(B) $ac>bd$

(C) $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　(D) $d-a<c-b$

解：$\because a>b$, $c>d$,　$\therefore d<c$, $-a<-b$,　$\therefore d-a<c-b$.

故选(D).

评注：对不等式每条性质要准确地掌握，灵活地运用，此题也可用异向不等式相减推出结果.

例 4　若 $\log_a 2<\log_b 2<0$，则有　　(　　)

(A) $0<a<b<1$　　(B) $0<b<a<1$

(C) $a>b>1$　　(D) $b>a>1$

解一：将已知条件写成

$(\log_b 2)\log_a b<\log_b 2<0$,

$\because$　$\log_b 2<0$,　$\therefore$　$\log_a b>1$, $0<b<1$,

得　$0<b<a<1$，故选(B).

解二：$\because$　$\log_a 2<\log_b 2<0$,　$\therefore$　$\frac{1}{\log_2 a}<\frac{1}{\log_2 b}<0$,

$\therefore$　$(\log_2 a)\cdot(\log_2 b)>0$,　$\log_2 b<\log_2 a<0$,

得　$0<b<a<1$，故选(B).

评注：该题简明，但内涵丰富，考查了不等式及对数函数的性质，解法灵活多样，还可用特殊值等其它方法讨论，比较充分展现了选择题这种题型的特点和考查功能.

例 5　已知 $0<a<\frac{1}{2}$, $A=1-a^2$, $B=1+a^2$, $C=\frac{1}{1-a}$, $D=\frac{1}{1+a}$，试比较 A、B、C、D 的大小.

解：$\because 0<a<\frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{1}{2}<1-a<1$, $1<1+a<\frac{3}{2}$,

$\therefore \frac{3}{4}<A<1,\ 1<B<\frac{5}{4},\quad 1<C<2,\ \frac{2}{3}<D<1.$

又 $A-D=(1-a^2)-\frac{1}{1+a}=\frac{-a[(a+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}]}{1+a}$,

$\because\ -a<0,\ (a+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}<-\frac{1}{4}$,

$\therefore\ A-D>0$, 即 $D<A$,

同理得 $B-C=\frac{-a(a^2-a+1)}{1-a}<0$,

$\therefore\ B<C$,

$\therefore\ D<A<B<C.$

例 6 设 $60<a<84$, $28<b<33$,求 $a+b$, $a-b$ 及$\frac{a}{b}$的范围.

解: $\because\ 60<a<84,\ 28<b<33$,

$\therefore\ -33<-b<-28,\ \frac{1}{33}<\frac{1}{b}<\frac{1}{28}$,

$\therefore\ 88<a+b<117,\ 27<a-b<56$,

$\therefore\ \frac{20}{11}<\frac{a}{b}<3.$

例 7 已知 $x>a>0$,比较 x^3+13a^2x 与 $5ax^2+9a^3$ 的大小.

解: $\because\ x^3+13a^2x-(5ax^2+9a^3)$

$=x^3-5ax^2+13a^2x-9a^3$

$=(x^3-ax^2)-(4ax^2-4a^2x)+(9a^2x-9a^3)$

$=x^2(x-a)-4ax(x-a)+9a^2(x-a)$

$=(x-a)(x^2-4ax+9a^2)$

$=(x-a)\cdot[(x-2a)^2+5a^2]>0$,

$\therefore\ x^3+13a^2x>5ax^2+9a^3.$

评注: 用作差法比较大小是常用的基本方法,作差后多采用因式分解、配方等变形技巧来判断符号.

例 8 已知 $f(x)=ax^2-c$,且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$, $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$, 求 $f(3)$的取值范围.

解一：∵ $\begin{cases} f(1)=a-c, \\ f(2)=4a-c \end{cases}$

求得 $a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)]$, $c=\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$,

∴ $f(3)=9a-c=3[f(2)-f(1)]-\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$

$=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$,

又∵ $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$, $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,

∴ $-\frac{8}{3}\leqslant \frac{8}{3}f(2)\leqslant \frac{40}{3}$, $\frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant \frac{20}{3}$,

∴ $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

解二：设 $f(3)=9a-c=Af(1)+Bf(2)$

$=A(a-c)+B(4a-c)$

$=(A+4B)a+(-A-B)c$,

由 $\begin{cases} A+4B=9, \\ A+B=1 \end{cases}$ 解得 $A=-\frac{5}{3}$, $B=\frac{8}{3}$,

即 $f(3)=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$,

∵ $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$, $-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,

∴ $\frac{5}{3}\leqslant -\frac{5}{3}f(1)\leqslant \frac{20}{3}$, $-\frac{8}{3}\leqslant \frac{8}{3}f(2)\leqslant \frac{40}{3}$,

∴ $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

例 9 若 $ab>0$，求使不等式 $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$ 成立的条件.

解：由 $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a-b}$,

得 $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3<(\sqrt[3]{a-b})^3$,

∴ $a-3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}-b<a-b$,

有 $\sqrt[3]{ab^2}<\sqrt[3]{a^2b}$,

$\because\ ab>0,\therefore \sqrt[3]{b}<\sqrt[3]{a}$,得 $b<a$.

例 10 求证:$a>b,\ \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}.\Rightarrow a>0,\ b<0.$

证明: $\because\ a>b,\ \therefore\ a-b>0,$

又 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b},\ \therefore\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}>0,$

即 $\dfrac{b-a}{ab}>0$.而 $b-a<0$,

$\therefore\ ab<0$,而 $a>b$, $\therefore\ a>0,\ b<0.$

例 11 已知 $a>b\geq 0,\ c<d<0$,求证:$\dfrac{b}{a-c}<\dfrac{a}{b-d}.$

分析: 利用不等式的性质进行证明

证明: $\left.\begin{array}{l}a>b>0\\c<d<0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a-c>b-d>0\\a>b>0\end{array}\right\}$

$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a(a-c)>b(b-d)\\(a-c)(b-d)>0\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{a}{b-d}>\dfrac{b}{a-c}$

$\Rightarrow\dfrac{b}{a-c}<\dfrac{a}{b-d}.$

a>b>0
-c>-d>0

高考误区警示

例 设 $0<x<1,a>0$ 且 $a\neq 1$,比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小. (1982 年,全国)

解一: 对参数 a 分类讨论去掉绝对值,再进行比较大小.

当 $a>1$ 时,由 $0<x<1$ 知 $\log_a(1-x)<0,\ \log_a(1+x)>0,$

$\therefore\ |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)$

$=-\log_a(1-x^2)>0;$

当 $0<a<1$ 时,由 $0<x<1$ 知 $\log_a(1-x)>0,\ \log_a(1+x)<0,$

$\therefore\ |\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)$

$=\log_a(1-x^2)>0.$

综上所述,$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

解二: 用平方法去掉绝对值,避免对 a 的分类讨论.

$|\log_a(1-x)|^2-|\log_a(1+x)|^2=[\log_a(1-x)]^2-[\log_a(1+x)]^2$